

# 基于一致性的异构多无人机编队控制

刘磊<sup>1</sup>, 李志宇<sup>1,2</sup>, 郭剑东<sup>1,2</sup>

(1. 南京航空航天大学 自动化学院, 南京 210016;

2. 南京航空航天大学 中小型无人机先进技术工信部重点实验室, 南京 210016)

**摘要:** 编队控制在异构多无人机系统研究中具有重要意义, 是实现多无人机任务协同、信息共享与路径优化的关键技术, 广泛应用于军事侦察、灾害救援、环境监测及空域管控等复杂场景; 为解决由四旋翼与垂起固定翼无人机组成的异构无人机编队的协同控制问题, 针对传统控制方法依赖固定通信拓扑、面对通信中断导致的拓扑切换易失稳等不足, 提出了基于一致性的分布式控制框架; 针对固定拓扑设计一致性控制律, 同时引入联合连通性条件, 突破传统固定拓扑约束进行切换拓扑控制律设计; 结合轴向独立解耦模型, 通过李雅普诺夫理论证明了系统全局渐进稳定; 数值仿真验证表明, 其在固定与切换拓扑下均能实现渐进收敛一致, 为异构多无人机协同控制提供有效解决方案。

**关键词:** 异构多无人机; 一致性; 编队控制; 固定拓扑; 切换拓扑

## Heterogeneous Multi-UAV Formation Control Based on Consensus

LIU Lei<sup>1</sup>, LI Zhiyu<sup>1,2</sup>, GUO Jiandong<sup>1,2</sup>

(1. College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,  
Nanjing 210016, China;

2. Key Laboratory of Unmanned Aerial Vehicle Technology Ministry of Industry and Information Technology,  
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** It is of great significance for formation control in heterogeneous multi-unmanned aerial vehicle (UAV) systems. As a crucial technology for enabling task collaboration, information sharing, and path optimization among multiple UAVs, it is widely applied in complex scenarios such as military reconnaissance, disaster relief, environmental monitoring, and airspace management and control. To solve cooperative control for heterogeneous UAV formation consisting of quadrotor UAVs and vertical takeoff and landing fixed-wing UAVs, a distributed control framework based on consensus is proposed, which overcomes the limitation of traditional control methods relying on fixed communication topologies and their susceptibility to instability caused by topology switching due to communication disruptions, with a consensus control law designed for fixed topologies. Additionally, a joint connectivity condition is introduced to break through the limitations of traditional fixed topologies and design the control law of switching topologies. By integrating an axial independent decoupling model, the global asymptotic stability of the system is proven by using the Lyapunov theory. Numerical simulation shows that this approach can achieve asymptotic convergence and consensus for both fixed and switching topologies, thus offering an effective solution for the cooperative control of heterogeneous multi-UAV systems.

**Keywords:** heterogeneous multi-UAV; consensus; formation control; fixed topology; switching topology

## 0 引言

随着无人机技术的快速发展, 多无人机编队系统凭借高效的任务协同能力与优异的环境适应性能, 已在军事侦察、灾害应急、环境监测和智能交通管控等领域展现出广阔的应用前景。多无人机编队的研究, 需要综合

任务分配、路径规划、编队控制等核心技术, 其中, 编队协同控制是最为关键的部分, 能够确保各无人机在执行任务时高效协作, 保持编队稳定, 并在复杂环境中稳定运行。

依据控制结构的差异, 传统无人机编队控制方法主要包括领航-跟随法<sup>[1-3]</sup>、虚拟结构法<sup>[4-6]</sup>、基于行为的

收稿日期: 2025-11-05; 修回日期: 2025-11-24。

作者简介: 刘磊(2001-), 男, 硕士研究生。

通讯作者: 李志宇(1976-), 男, 硕士, 研究员。

引用格式: 刘磊, 李志宇, 郭剑东. 基于一致性的异构多无人机编队控制[J]. 计算机测量与控制, 2026, 34(4): 105-114, 121.

控制方法<sup>[7-8]</sup>、人工势场法<sup>[9-11]</sup>、拟态物理法<sup>[12]</sup>以及一致性方法<sup>[13]</sup>。

近年来,有关异构多无人机系统的研究蓬勃发展。异构多无人机系统由不同物理特性、功能的无人机构成协同单元,借个体功能差异互补形成强综合能力。相较同构系统,其任务适配灵活,故障容错性强,还能精准调度机型,避免冗余。文献 [14] 针对异构多无人机系统的协同任务分配问题,提出了基于自适应遗传算法的解决方案,通过多类型基因染色体编码、交叉变异操作和动态参数调整,实现异构无人机对多目标的高效任务分配。文献 [15] 针对输入饱和和约束下异构多智能体系统的一致性问题,提出了融合输入饱和补偿机制的分布式一致性控制策略,并基于图论与 LaSalle 不变集原理提出一致性充分条件。文献 [16] 针对一阶与二阶智能体构成的异构多智能体系统在 Markov 切换拓扑下的均方一致性达成问题,提出了基于邻居信息的分布式控制协议,并 SIA 矩阵的性质,推导系统实现均方一致性的充要条件。文献 [17] 针对一阶与二阶智能体构成的异构多智能体系统,研究固定及切换拓扑下的分组一致性问题,提出分组一致性协议,并基于非周期不可约分矩阵性质,讨论切换拓扑的一致性问题。文献 [18] 针对异构无人机集群的编队控制问题,引入事件触发机制,提出了一种事件驱动机制下的分布式优化算法,并对事件触发条件进行计算分析,证明其不会引发 Zeno 行为。

基于现有研究进展,本文针对由四旋翼与垂起固定翼 (VTOL, vertical take-off and landing) 无人机组成的异构编队系统,开展一致性控制律设计研究。研究面向山区应急通信中继与城市多区域协同巡检等典型任务场景,此类应用环境既要求四旋翼具备的低空灵活机动能力以适应复杂地形作业,又依赖 VTOL 无人机的长航时与远程覆盖特性以提升整体任务效能。针对中小规模编队配置,支持分层、梯队等常规作业构型的稳定保持。控制算法设计充分考虑机载处理器的计算资源约束,以期异构无人机编队在复杂任务环境下的工程化应用提供可行的理论与技术支撑。

### 1 理论基础

#### 1.1 代数图论

设  $G = (S, E, A)$  为有向图,其中顶点集  $S$  是有向图的节点集合,边集为  $E$ 。 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$  为有向图的邻接矩阵,矩阵元素非负。

在有向拓扑图中,节点  $i$  的度等于入度和出度之和。入度  $d_{in}(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}$ ; 出度  $d_{out}(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ 。 $G$  的出度矩阵  $D_{out} = \text{diag} \{d_{1out}, d_{2out}, \dots, d_{nout}\}$ 。

定义图的 Laplacian 矩阵  $L = D_{out} - A$ 。

引理 1:

对于  $n$  阶有向图  $G$ ,若存在全局可达节点,则图  $G$  对应的拉普拉斯矩阵  $L$  满足:

- 1) 矩阵秩为  $n-1$ ;
- 2) 具有唯一零特征值,该零特征值的几何重数为 1,对应的右特征向量为全 1 向量;其余特征值均具有正实部。
- 3) 系统  $\dot{x}(t) = -Lx(t)$  以指数收敛一致上述性质等价<sup>[19]</sup>。

若图  $G$  中存在节点  $v_i$  能够到达图中其他任意节点,且途经路径均为有向边,则称该图存在有向生成树,该节点称为全局可达节点。若  $G$  包含全局可达节点,称  $G$  是联通的<sup>[20]</sup>。

### 1.2 系统模型

为凸显主要问题,提高研究效率,针对编队控制的理论研究,可重点研究轨迹跟踪控制器设计。

考虑低速飞行的典型编队场景,本文对四旋翼无人机的非线性动力学模型进行合理简化:忽略空气阻力及陀螺效应的影响,并假定低速飞行时,无人机的姿态角变化率与角速率近似相等<sup>[20]</sup>。基于上述工程假设,构建适用于编队控制研究的四旋翼简化动力学模型如下:

$$\begin{cases} \ddot{x} = g\theta \\ \ddot{y} = -g\phi \\ \ddot{z} = \frac{U_1(\cos\theta\cos\phi)}{m} - g \\ \dot{\phi} = \frac{U_2}{J_x} \\ \ddot{x}\theta = \frac{U_3}{J_y} \\ \dot{\psi} = \frac{U_4}{J_z} \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x, y, z$  是无人机在惯性系下的位置;  $\phi, \theta, \psi$  为无人机的滚转角、俯仰角、偏航角;  $J_x, J_y, J_z$  为无人机的转动惯量;  $g$  为重力加速度。 $U_1, U_2, U_3, U_4$  是与螺旋桨转速有关的虚拟控制量。

从上式可以看出,  $x$  和  $y$  的状态分别只与  $\theta$  和  $\phi$  有关,而与输入  $U$  和另外两个欧拉角解耦。由此,得到四旋翼无人机的轴向独立的高阶积分器模型:

令:  $x = [x, \dot{x}, g\theta, g\dot{\theta}]$ :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U'_3$$

$y = [y, \dot{y}, -g\phi, -g\dot{\phi}]$ :

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U'_2$$

$$z = [z, \dot{z}]:$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U'_1 \quad (2)$$

其中:

$$U'_1 = -g + \frac{U_1 \cos\phi \cos\theta}{m}, U'_2 = -\frac{g}{J_x} U_2, U'_3 = \frac{g}{J_y} U_3$$

针对 VTOL 无人机, 在以位置协同为核心目标的编队控制场景中, 无人机的刚体动力学细节可作为次要因素处理。因此可将无人机的运动模型简化为惯性坐标系下的质点平动模型, 保留质心位置与线速度的运动学特性<sup>[21]</sup>。基于这一质点假设, 给出 VTOL 无人机的运动学模型:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_{xy} \cos\psi \\ \dot{y} = v_{xy} \sin\psi \\ \dot{z} = v_z \end{cases} \quad (3)$$

引入虚拟控制量, 得到轴向独立的一阶积分器系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = U_3 \\ \dot{y} = U_2 \\ \dot{z} = U_1 \end{cases} \quad (4)$$

尽管上述假设存在一定局限, 空气阻力与陀螺效应, 在高速或强扰动场景下会引入位置误差; 低速飞行时姿态角变化率与角速率的近似关系, 在大姿态调整时也会出现偏差; 质点假设忽略了刚体动力学细节, 无法表征姿态扰动对位置的间接影响。但在非大机动飞行的编队控制场景中, 上述简化模型已经能较好地满足编队控制律设计的要求。

基于上述假设, 建立轴向独立模型, 将无人机的三维空间运动解耦为 3 个坐标轴方向的独立控制问题。与传统的非线性动力学模型相比, 这种处理方式在更适合本文的编队控制研究场景。非线性模型虽然能够完整描述无人机在飞行过程中的姿态耦合与动态特性, 但其复杂的模型结构给多无人机系统的协同控制设计带来相当大的挑战。特别是在异构系统中, 不同构型无人机的模型差异使得编队控制器的设计变得异常困难。相比之下, 轴向独立模型通过合理的简化, 将重点集中在运动协同上, 使得控制器的设计能够专注于编队控制这一核心任务。在各个轴向上独立设计分布式控制律, 可降低多耦合系统中控制器结构的复杂性; 将复杂的空间协同问题转化为多个轴向的并行控制子问题, 也为后文的系统稳定性分析提供了简明的理论框架, 更适合异构多无人机的编队控制。

考虑到编队模型中各轴运动的独立性, 为简化论述, 给出  $x$  轴通道的异构编队模型:

$$\dot{X}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U_i \quad i \in S_1 \quad (5)$$

$$\dot{X}_i = U'_i i \in S_2 \quad (6)$$

其中:  $X_i = [x_i, v_i, a_i, J_i]$  为广义状态变量, 代表无人机的位置及其的各阶导数;  $S_1$ 、 $S_2$  分别表示四旋翼和 VTOL 无人机集合,  $U_i$  和  $U'_i$  为待设计的控制输入。

## 2 编队控制律设计

编队控制是异构多无人机系统的核心, 是实现多无人机系统在复杂环境下的协同作业、相对位置稳定及动态调节的关键。由于实际应用中无人机间的邻接关系和网络拓扑常随时间变化, 编队控制不仅要确保系统稳定性, 还需具备对切换拓扑的适应能力。本节将分别针对固定拓扑与切换拓扑两种情形, 设计一致性编队控制律, 并对系统的稳定性与收敛性进行分析证明。

### 2.1 固定拓扑

#### 2.1.1 固定拓扑编队控制律设计

基于前文建立的异构编队模型, 针对四阶和一阶无人机, 分别设计如下一致性控制律:

$$u_i = \sum_{j=1}^n l_1 \alpha_{ij} (x_j - x_i) - l_2 v_i - l_3 a_i - l_4 J_i \quad i \in S_1 \quad (7)$$

$$u_i = \sum_{j=1}^n l_1 \cdot \alpha_{ij} (x_j - x_i) \quad i \in S_2 \quad (8)$$

式中,  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$  为大于零的控制增益,  $x_i = p_i - s_i$ ,  $s_i$  表示编队期望构型中各无人机间相对位置。无人机间的通信连接拓扑可用有向图  $G = (S, E, A)$  表示,  $S_1$ 、 $S_2$  分别表示四旋翼和 VTOL 无人机集合。

#### 2.1.2 收敛性分析

本节将针对上文提出的一致性控制律, 给出稳定性分析与增益参数设计过程。

首先给出一致性定义:

定义 1: 对于异构多无人机系统 (5)、(6), 若有稳定状态  $\alpha$  存在, 使得:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \alpha, \lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} a_i(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} J_i(t) = 0$ , 则称异构多无人机系统在一致性算法 (7)、(8) 下渐进收敛一致。

为便于后续稳定性分析, 对状态变量作如下代换:

$$\begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{v} = \frac{v}{k_1} + \bar{x} \\ \bar{a} = \frac{a}{k_2} + 2\bar{v} - \bar{x} \\ \bar{J} = \frac{J}{k_3} + 3\bar{a} - \bar{v} - \bar{x} \end{cases} \quad (9)$$

$k_1, k_2, k_3$  为大于 0 的参数。

定义广义状态变量:

$$X^T = [x_f^T, \bar{v}^T, \bar{a}^T, \bar{J}^T, x_o^T]$$

其中:



根据初等行列变换的性质, 矩阵  $\mathbf{W}$  和  $\mathbf{W}'$  具有相同的秩, 即:

$$\text{rank}(\mathbf{W}) = \text{rank}(\mathbf{W}')$$

根据引理 1, 若异构多无人机系统的通信拓扑图  $\mathbf{G}$  中包含全局可达节点, 则  $\mathbf{G}$  对应的拉普拉斯矩阵仅有一个零特征值, 且其余特征值具有负实部。因此, 有:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_3 & \mathbf{L}_4 \end{bmatrix} = n - 1$$

接下来, 分析矩阵  $\mathbf{W}$  的秩。根据系统状态空间的分块结构, 矩阵  $\mathbf{W}$  可视为由一个  $3m$  维的子系统动态矩阵和一个  $n$  维的通信拓扑拉普拉斯矩阵耦合而成。通过分块矩阵的秩运算规则, 矩阵  $\mathbf{W}$  的秩是其子矩阵的秩之和, 即:

$$\text{rank}(\mathbf{W}) = \text{rank}(\mathbf{W}') = 3m + \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_3 & \mathbf{L}_4 \end{bmatrix}$$

故:

$$\text{rank}(-\mathbf{W}) = \text{rank}(\mathbf{W}) = 3m + n - 1$$

根据定理 1, 矩阵  $-\mathbf{W}$  对应一个  $n+3m$  阶有向图的拉普拉斯矩阵。根据引理 1 中拉普拉斯矩阵的性质, 矩阵  $-\mathbf{W}$  有且仅有一个零特征值, 零特征值的几何重数为 1, 对应右特征向量  $\mathbf{1}_{n+3m}$ , 其余特征值均具有正实部。

因此, 若异构多无人机系统的通信拓扑图  $\mathbf{G}$  包含全局可达节点时, 则矩阵  $\mathbf{W}$  有且仅有一个零特征值, 零特征值的几何重数为 1, 零特征值对应的右特征向量  $\mathbf{1}_{n+3m}$ , 其余特征值均具有负实部。证毕。

定理 3: 若异构多无人机系统的通信连接拓扑包含全局可达节点, 系统 (10) 在控制律 (7)、(8) 下实现一致性。

证明: 根据定理 2, 当异构多无人机系统的通信连接拓扑  $\mathbf{G}$  包含全局可达节点时, 矩阵  $-\mathbf{W}$  具有且仅有一个零特征值, 其余特征值均为负实数。

根据定理 1, 矩阵  $-\mathbf{W}$  即对应一个阶数为  $n+3m$  的连通有向图的拉普拉斯矩阵。依据图论基本定理, 该矩阵仅有一个零特征值 (几何重数为 1), 其余特征值实部均为正值。由此可知, 矩阵  $-\mathbf{W}$  的特征值分布必然满足定理 2 的描述。

考虑系统  $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{X}(t)$ , 由于  $\mathbf{W}$  的特征值中只有一个零特征值且其余特征值的实部均为负数, 根据引理 1, 可推断出该系统收敛一致。

系统的收敛性和稳定性依赖于通信拓扑  $\mathbf{G}$  的连通性。根据定理 2 的条件, 只有当通信拓扑  $\mathbf{G}$  包含全局可达节点时, 矩阵  $-\mathbf{W}$  才能满足上述特征值的条件。因此, 若异构多无人机系统的通信连接拓扑包含全局可达节点, 系统  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{x}(t)$  一致收敛。证毕。

定理 4 (一致性状态): 若异构多无人机系统的通

信连接拓扑包含全局可达节点, 则异构多无人机系统 (10) 实现一致性, 且一致性状态:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{a}^*; \mathbf{a}^* = \boldsymbol{\alpha}_i^T \cdot \mathbf{X}(0), \mathbf{X}(0) \text{ 是系统 (10) 的初始状态, } \boldsymbol{\alpha}_i^T \text{ 是矩阵 } \mathbf{W} \text{ 的属于零特征值的左特征向量, 且 } \boldsymbol{\alpha}_i^T \cdot \mathbf{1}_{3m+n} = 1.$$

高阶状态:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{a}_i(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{J}_i(t) = 0$$

证明: 存在可逆矩阵  $\mathbf{P}$ , 将矩阵  $\mathbf{W}$  化为若尔当标准型<sup>[22]</sup>:

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{P}$$

由定理 2, 若异构多无人机系统的通信连接拓扑包含全局可达节点, 则矩阵  $\mathbf{W}$  有且仅有一个零特征值, 几何重数为 1, 零特征值对应的右特征向量  $\mathbf{1}_{n+3m}$ , 其余特征值均具有负实部。

若尔当标准形在排列若尔当块顺序的意义下唯一, 易得:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_k \end{bmatrix}$$

则:

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

状态方程:  $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{X}(t)$  的时域解:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{W}t}\mathbf{X}(0)$$

设  $f(\mathbf{W}) = e^{\mathbf{W}t}$ , 则:

$$f(\mathbf{W}) = \mathbf{P}f(\mathbf{J})\mathbf{P}^{-1} =$$

$$\mathbf{P}\text{diag}[f(\mathbf{J}_1), f(\mathbf{J}_2), \dots, f(\mathbf{J}_m)]\mathbf{P}^{-1}$$

其中:

$$f(\mathbf{J}_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{(n_i-1)!}f^{(n_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

根据定理 2, 矩阵  $\mathbf{W}$  仅有一个零特征值, 几何重数 1, 其余特征值均具有负实部, 故:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\mathbf{J}_k)\mathbf{O}_{(3m+n)(3m+n)}$$

则:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{P} \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & f(\mathbf{J}_k) \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}(0) =$$

$$\mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}(0) = \boldsymbol{\alpha}_r \cdot \boldsymbol{\alpha}_i^T \cdot \mathbf{X}(0) =$$

$$\mathbf{1}_{3m+n} \cdot \boldsymbol{\alpha}_i^T \cdot \mathbf{X}(0) = \mathbf{1}_{3m+n} \cdot \mathbf{a}^*$$



$$e^T \mathbf{L}(t) \mathbf{e} \geq \lambda(t) \|\mathbf{e}\|^2;$$

3) 存在常数  $T > 0$  和  $\lambda_0 > 0$ , 使得对任意  $t_0 \geq 0$  有:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \lambda(s) ds \geq \lambda_0 T$$

4) 异构多无人机系统的通信拓扑是联合联通的。

则对于误差  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{X}(t) - \boldsymbol{\alpha}(t) \mathbf{I}$ , 定义的李雅普诺夫函数  $V(t) = \frac{1}{2} \|\mathbf{e}(t)\|^2$  满足:

$$V(t) \leq V(0) e^{-2\lambda_0 t + 2\lambda_0 T}$$

从而全局一致性得以保证, 误差  $\mathbf{e}(t)$  以指数速率衰减。

证明: 为了分析一致性问题的收敛性, 选取李雅普诺夫函数:  $V(t) = \frac{1}{2} \|\mathbf{e}(t)\|^2$ , 其时间导数:

$$\dot{V}(t) = \mathbf{e}(t)^T \dot{\mathbf{e}}(t) = -\mathbf{e}(t)^T \mathbf{L}(t) \mathbf{e}(t)$$

因此, 对于任意时刻  $t$ , 有不等式:

$$\dot{V}(t) \leq -\lambda(t) \|\mathbf{e}(t)\|^2 = -2\lambda(t)V(t)$$

当图连通时, 由于  $\lambda(t) > 0$ , 李雅普诺夫函数  $V(t)$  将呈现指数衰减。当系统的通信拓扑在某些时段内不连通时, 可能出现  $\lambda(t) = 0$  的情况, 此时只能得到:  $\dot{V}(t) \leq 0$ , 无法保证指数衰减。

引理 3: 若系统满足联合连通性条件, 则存在常数  $\lambda_m > 0$ , 使得在任意时间窗口  $[t_0, t_0 + T]$  内, 至少存在一个子区间  $[t_k, t_k + \Delta t_m]$ , 其中拓扑连通且  $\lambda(t) \geq \lambda_m$ , 积分下界满足:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \lambda(s) ds \geq \lambda_m \Delta t_m = \lambda_0 T$$

其中:  $\lambda_0 = \lambda_m \frac{\Delta t_m}{T}$ 。

此条件表明, 尽管在某些时刻  $\lambda(s) = 0$ , 图不连通, 只要在联合区间内存在足够长的时间段, 其中拓扑是连通的, 则该区间内的累积权重足以保证平均下界不低于  $\lambda_0$ 。

定义拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}(t)$  的最小非零特征值为代数连通度, 记为  $\lambda(t)$ 。对每个时刻  $t$ , 若当前拓扑连通,  $\lambda(t) > 0$ ; 否则  $\lambda(t) = 0$ 。

由联合连通性定义, 窗口  $[t_0, t_0 + T]$  内所有切换拓扑的联合图包含生成树。根据图论中的有限覆盖定理, 存在有限个连通子区间覆盖该窗口, 且每个连通子区间对应一个连通拓扑。设连通子区间为  $[t, t + \Delta t]$ , 对应拉普拉斯矩阵  $L$  的最小非零特征值  $\lambda \geq \lambda > 0$ ,  $\lambda$  为所有可能连通拓扑的最小代数连通度。由切换系统的平均驻留时间条件, 存在  $\Delta t > 0$ , 使得每个窗口内至少有一个子区间满足  $\Delta t \geq \Delta t$ 。在窗口  $[t_0, t_0 + T]$  内, 至少存在一个连通子区间  $[t, t + \Delta t]$ , 积分:

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \lambda(s) ds \geq \alpha_m \Delta t_m$$

总窗口积分满足:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \lambda(s) ds \geq \lambda_m \Delta t_m = \lambda_0 T$$

将时间区间  $[t_0, t_0 + T]$  细分为若干子区间, 假设每个子区间内的拓扑保持不变。设切换时刻为:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k+1} = t_0 + T$$

在每个子区间  $[t_i, t_{i+1}]$  上, 系统对应的拉普拉斯矩阵为  $L_i$ , 并设该子区间的代数连通度的局部下界为  $\lambda_i$ , 即:

$$e^T L_i \mathbf{e} \geq \lambda_i \|\mathbf{e}\|^2, \lambda_i \geq 0$$

显然, 若某一子区间内的拓扑是连通的, 则  $\lambda_i > 0$ ; 若不连通, 则  $\lambda_i = 0$ 。设每个子区间的时长为  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ , 区间积分:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \lambda(s) ds$$

由引理 3:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \lambda(s) ds \geq \lambda_0 T$$

在每个子区间  $[t_i, t_{i+1}]$  上, 由于:

$$\dot{V}(t) \leq -2\lambda(t)V(t)$$

应用积分不等式, 得到每个子区间内的衰减行为:

$$V(t_{i+1}) \leq V(t_i) e^{-2\lambda \Delta t_i}$$

将所有子区间的结果连乘, 得到:

$$V(t_0 + T) \leq V(t_0) e^{-2 \sum_{i=1}^k \lambda_i \Delta t_i} \leq V(t_0) e^{-2\lambda_0 T}$$

这表明, 在每个联合区间内, 李雅普诺夫函数至少以指数衰减因子  $e^{-2\lambda_0 t}$  衰减。进一步, 考虑全局时间  $t \geq 0$ , 可以将时间表示为若干个长度为  $T$  的联合区间。设  $t = nT + \tau$ , 其中  $0 \leq \tau < T$ ; 则得到以下迭代不等式:

$$V(t) \leq V(0) e^{-2\lambda_0 t}$$

这表明误差  $\mathbf{e}(t)$  以指数速率衰减, 有:

$$\|\mathbf{e}(t)\| \leq \sqrt{2V(0)} e^{-\lambda_0 t}$$

证毕。

在切换拓扑条件下, 本节所设计的控制律, 通过引入时变耦合项, 替代传统固定拓扑控制中的静态邻接矩阵元素, 使系统能够依据实时的通信拓扑, 动态调整控制输入。同时, 针对切换拓扑场景, 引入联合连通性条件, 仅要求系统在一定时间窗口内的拓扑联合图保持连通, 降低了对通信链路持续连通的苛刻要求。在此基础上, 构造公共李雅普诺夫函数, 证明了切换拓扑闭环系统的渐近稳定性, 为异构无人机编队在动态通信环境下的控制问题提供了理论依据, 更适用于存在链路不稳定或通信受限情形的切换拓扑中的编队飞行任务。

### 3 仿真结果与分析

#### 3.1 固定拓扑

假设异构多无人机系统中包含 6 架无人机, 3 架四旋翼无人机和 3 架 VTOL 无人机, 系统通信拓扑的邻接矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由邻接矩阵，易得：

$$C = \max_{0 < i < n} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = 1$$

其拉普拉斯矩阵：

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

显然，该拓扑是一个包含全局可达节点的有向图。该拓扑结构能够确保在编队控制过程中，各无人机之间的通信关系稳定，从而为后续的控制策略验证提供了可靠的基础。

为了验证所提出的编队控制策略在该固定拓扑条件下的有效性，本文设计了相关的数值仿真实验。

设期望构型矩阵为：

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 & 17 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 0 & 6 & -6 \\ 30 & 30 & 30 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix}$$

对应的编队期望构型为存在水平距离和纵向垂直距离的两组三角形编队。

为保持论述的简洁性，本文仅给出沿  $x$  轴方向的数值仿真结果。由于所建立的控制模型及所设计的一致性控制律在三轴坐标系中具有独立性，其在各轴上的动态响应与收敛特性具有等价性，因此，选取  $x$  轴方向作为典型分析对象即可充分验证算法的有效性与收敛性能。

根据定理 1，选择一组满足定理 1 要求的增益参数： $l_1=2$ ； $l_2=29$ ； $l_3=19$ ； $l_4=8$ ； $l_5=4$ ；根据上文的证明过程，可以保证，当增益参数满足定理 1 要求，且无人机的通信连接拓扑包含全局可达节点时，异构多无人机系统可收敛一致。

设置各无人机的初始位置：

$$p_0 = [27, 12, 10, 32, 21, 19]^T$$

状态变量：

$$x_0 = p_0 - s_r = [20, 16, 14, 15, 15, 13]^T$$

高阶状态设置为零；

根据式 (9) 的变换关系，得：

$$X(0) = [20, 16, 14, 20, 16, 14, 20, 16,$$

$$14, 20, 16, 14, 15, 15, 3]$$

根据定理 4，计算矩阵  $W$  属于 0 特征值，且满足  $\alpha_l^T \cdot I_{3m+n} = 1$  的左特征向量：

$$\alpha_l^T = \begin{bmatrix} 0.0741 & 0.0741 & 0.0741 & 0.0988 & 0.0988 \\ 0.0988 & 0.1235 & 0.1235 & 0.1235 & 0.0247 \\ 0.0247 & 0.0247 & 0.0123 & 0.0123 & 0.0123 \end{bmatrix}$$

根据定理 4，计算系统 (10) 的一致性状态：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = a^* = \alpha_l^T \cdot X(0) = 16.6$$

高阶状态：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} a_i(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} J_i(t) = 0$$

基于上述条件，对固定拓扑下动态过程进行了仿真，状态变量及其各阶导数变化如图 1、2 所示。

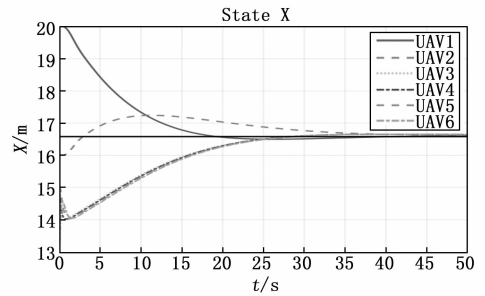


图 1 固定拓扑各无人机位置变化曲线图

根据上述数值仿真结果，计算各无人机状态的平均收敛时间如表 1 所示。

表 1 固定拓扑各无人机状态平均收敛时间

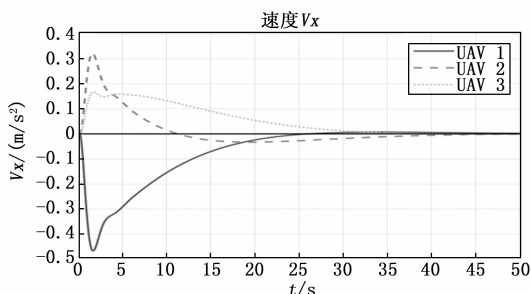
无人机状态	平均收敛时间/s
位置	19.5
速度	33.1
加速度	13.3
加加速度	5.8

上述数值仿真实验，验证了本文提出的一致性控制律，在固定拓扑下对异构多无人机系统的有效性。在设定的控制增益和初始条件下，各无人机的位置状态在约 19.5 s 内收敛，相对误差逐步减小并收敛于定理 4 中的理论值；同时，高阶状态也表现出良好的收敛性能，速度、加速度、加加速度都在较短时间内收敛为 0，系统整体动态响应，符合定义 1 中渐近一致性的要求。

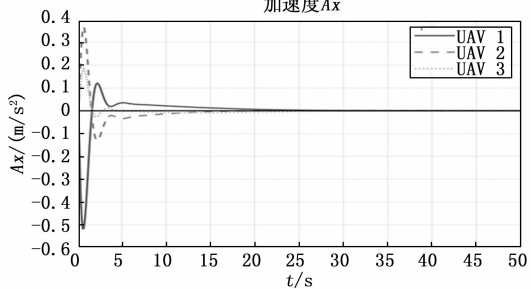
图 3 给出了各无人机在三维空间中的运动轨迹。可以观察到，轨迹与期望构型矩阵描述的编队构型一致，进一步证明了该算法在异构多无人机系统中实现稳态队形保持的有效性。

### 3.2 切换拓扑

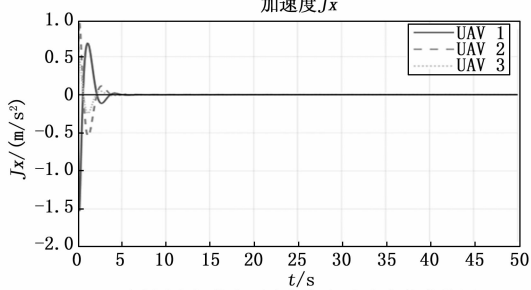
考虑一个异构多无人机系统，各无人机之间的拓扑结构具有时变性。系统的拓扑结构将根据时间周期性变化，在以下的两种拓扑中切换：



(a) 固定拓扑各无人机速度变化曲线图



(b) 固定拓扑各无人机加速度变化曲线图



(c) 固定拓扑各无人机加加速度变化曲线图

图 2 固定拓扑各无人机各阶导数变化

固定拓扑异构多无人机系统编队轨迹

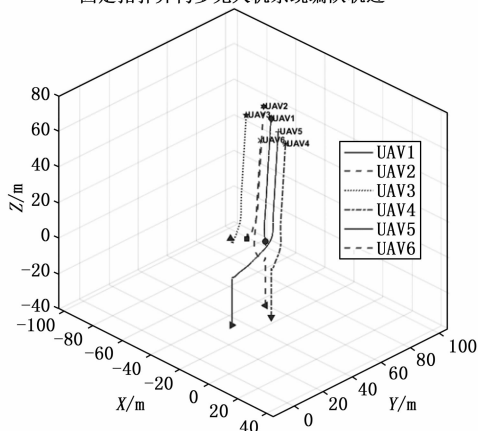


图 3 固定拓扑异构多无人机编队轨迹

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

显然, 通信拓扑 1 和 2 均不包含全局可达节点, 但其联合图包含有向生成树, 满足定理 5 中的联合连通性条件。

拓扑切换时间设置为 2 s, 通信系统的拓扑结构将上述两种拓扑中周期性切换。

根据定理 1, 同样选择一组满足要求的增益参数:  $L_1=16; L_2=32; L_3=24; L_4=5; L_5=3;$

同样, 根据上文的证明过程, 当增益参数满足定理 1 要求, 且无人机的通信连接拓扑联合连通时, 异构多无人机系统可收敛一致。

设置各无人机的初始位置:

$$p_0 = [20, 12, 6, 25, 17, 15]^T$$

状态变量:

$$x_0 = p_0 - s_x = [13, 16, 10, 8, 11, 9]^T$$

高阶状态设置为零。

基于上述条件, 对切换拓扑下动态过程进行仿真, 位置变量及其各阶导数变化如图 4、5 所示。

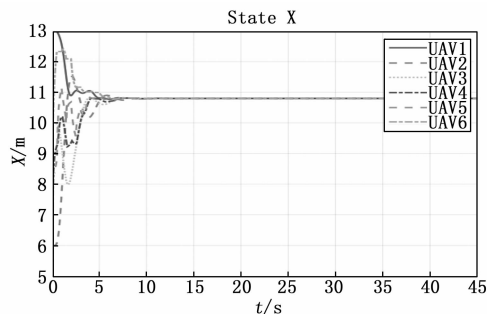


图 4 切换拓扑

根据上述数值仿真结果, 计算各无人机状态的平均收敛时间如表 2 所示。

表 2 切换拓扑各无人机状态平均收敛时间

无人机状态	平均收敛时间/s
位置	6.7
速度	7.1
加速度	7.5
加加速度	8.3

上述仿真结果进一步表明, 即使在拓扑结构频繁切换的条件下, 异构多无人机编队仍能够逐步调整各自状态, 最终收敛到期望的队形。系统在较短时间内完成位置的协同, 并且速度、加速度及加加速度等状态也在较

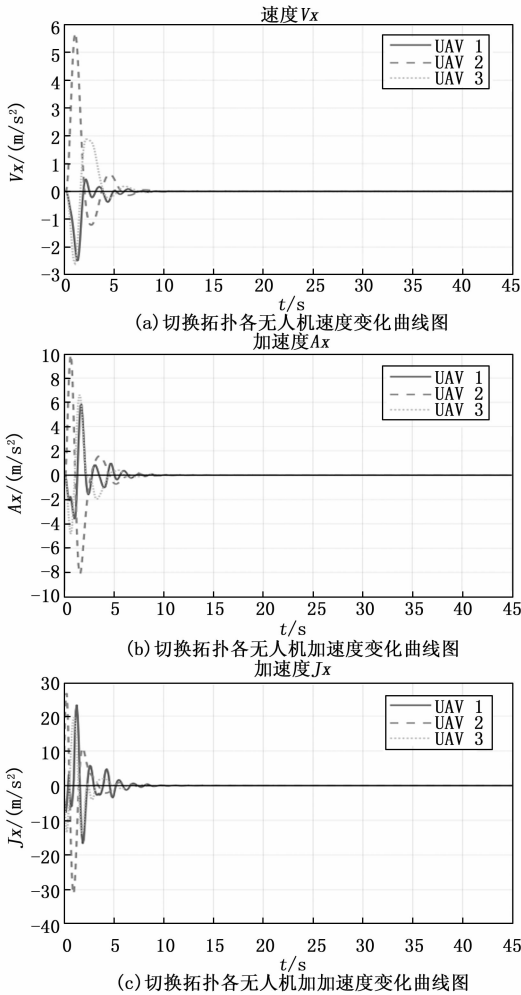


图 5 切换拓扑各无人机各阶导数变化

短时间内收敛为 0，同样符合定义 1 中关于一致性的要求。这表明，在满足联合连通性条件时，控制策略能够有效引导系统在切换过程中保持协调，实现稳定编队。

图 6 展示了三维轨迹仿真结果，可以看到，在切换拓扑情况下，各无人机的运动轨迹最终同样能够达到期望编队构型，验证了切换拓扑下的编队控制策略的有

切换拓扑异构多无人机系统编队轨迹

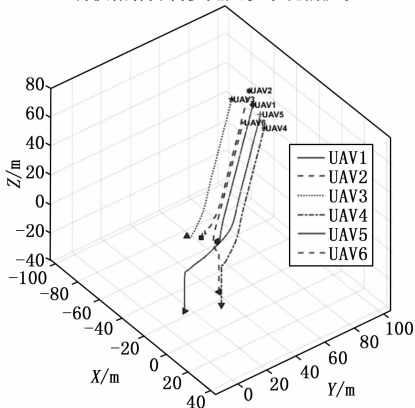


图 6 切换拓扑异构多无人机编队轨迹

效性。

### 4 结束语

本文围绕异构多无人机系统的编队控制问题，提出了一种结合一致性算法的分布式控制框架。通过构建异构多无人机系统的编队模型，设计了适用于异构系统的一致性控制律，并从理论上分析了系统的稳定性。结合固定拓扑与切换拓扑条件下的数值仿真，验证了该算法在多种通信约束下的适应性，特别是在拓扑频繁变化及网络不稳定的情况下，仍能有效保持编队的稳定与协同，实现系统的渐进收敛一致。

### 参考文献:

[1] GUSTAVI T, HU X. Observer-based leader-following formation control using onboard sensor information [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2008, 24 (6): 1457 - 1462.

[2] MARIOTTINI G L, MORBIDI F, PRATTICHIZZO D, et al. Vision-based localization for formation control [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 25 (6): 1431 - 1438.

[3] CHEN X, YAN P, SERRANI A. On input-to-state stability-based design for leader-follower formation control with measurement delays [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2013, 23 (13): 1433 - 1455.

[5] SADOWSKAA A, BROEK T V D, HUIJBERTSA H, et al. A virtual structure approach to formation control of unicycle mobile robots using mutual coupling [J]. International Journal of Control, 2011, 84 (11): 1886 - 1902.

[6] WATANABE Y, AMIEZ A, CHAVENT P. Fully-autonomous coordinated flight of multiple UAV using decentralized virtual leader approach [C] // IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 2013: 1 - 6.

[7] GIULIETTI F, POLLIM L, INNOCENT M. Formation flight control: a behavioral approach [C] // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, 2001: 1 - 10.

[8] LAWTON J R T, BEARD R W, YOUNG B J. A decentralized approach to formation maneuvers [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2003, 19 (6): 933 - 941.

[9] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Distributed cooperative control of multiple vehicle formations using structural potential functions [C] // IFAC World Congress, 2002.

(下转第 121 页)