

一种针对双旋转惯导系统的协同初始对准算法

徐长申, 贺 涛, 李冲辉

(中国直升机设计研究所, 天津 300300)

摘要:在载机装备两台旋转惯导系统的场景中,传统初始对准采用分别为每台旋转惯导系统单独执行对准的方式,导致无法发挥双旋转惯导系统的协同优势;为了提高双惯导系统的初始对准精度,提出了一种针对双旋转惯导系统的协同初始对准算法,推导了旋转惯导系统的误差传播模型,通过将两台旋转惯导系统的速度之差增广为卡尔曼滤波器观测量,抑制了公共扰动对应的速度误差部分,提升了观测量的信噪比,最终提高了初始对准精度;仿真实验和结果表明,相对传统对准算法,提出的针对双旋转惯导系统的协同初始对准算法,将方位失准角误差减小约25%,初始对准精度和稳定性均得到提升,验证了该算法的有效性。

关键词:双旋转惯导系统;协同初始对准;对准算法;卡尔曼滤波;惯性导航

A Collaborative Initial Alignment Algorithm for Two RINS

XU Changshen, HE Tao, LI Chonghui

(China Helicopter Research and Development Institute, Tianjin 300300, China)

Abstract: In the scenario where an aircraft is equipped with two rotational inertial navigation systems (RINS), traditional initial alignment employs a separate alignment approach for each of two RINS, failing to leverage the collaborative advantages of two RINS. To improve the initial alignment accuracy of two RINS, this paper proposes a collaborative initial alignment algorithm for two RINS, deduces the error propagation model of two RINS, introduces the velocity difference between two RINS into the observation value of Kalman filter, suppresses the velocity error corresponding to common disturbances, thereby improving the signal-to-noise ratio of the observation value, and finally enhancing the initial alignment accuracy. Simulation experiments and results demonstrate that compared with traditional alignment methods, the proposed collaborative initial alignment algorithm for two RINS reduces the azimuth alignment error by 25%, improving the initial alignment accuracy and stability, and verifying the effectiveness of the algorithm.

Keywords: two RINS; collaborative initial alignment; alignment algorithm; Kalman filter; inertial navigation

0 引言

相对于捷联惯导系统(SINS, strapdown inertial navigation system)与载体固联,旋转惯导系统(RINS, rotational inertial navigation system)得益于转位机构,可以通过在初始对准阶段执行适当的转位方案,增强对失准角、陀螺随机常值漂移、加速度计随机常值偏置相应参数的激励,提高滤波器状态矩阵可观测度,获得优于SINS的初始对准效果^[1-2]。同时,RINS在导航精度提升^[3-7]、惯导系统误差自标定^[8-12]等方向均取得较好效果。

考虑到飞行安全、健康检测、冗余备份及特定任务等需求,载机通常装备两台及以上惯导系统^[13-14]。虽然

载机装备的惯导系统数量为两台或更多,但是目前关于RINS初始对准算法的研究却是大多针对单台RINS开展的。由于RINS是从SINS发展而来,通过采用旋转调制技术使得惯性器件误差在导航解算的积分过程中相互抵消,实现导航精度的提高。因此,SINS初始对准中的两个重点研究方向,同样也是RINS初始对准的研究热点。一是提出适用于不同场景下解决特定问题的初始对准滤波算法^[15-16],二是基于回溯思想提升惯性测量单元(IMU, inertial measurement unit)传感器数据信息利用率^[17]。文献[15]提出了一种基于模糊自适应滤波的单轴RINS初始精对准算法,利用信息序列实际与理论协方差之间的比值和模糊推理构建自适应量测噪声协方差矩阵,解决单轴旋转过程中产生的“锯齿形”

收稿日期:2025-06-28; 修回日期:2025-08-03。

作者简介:徐长申(1993-),男,硕士,工程师。

引用格式:徐长申,贺 涛,李冲辉.一种针对双旋转惯导系统的协同初始对准算法[J].计算机测量与控制,2026,34(6):165-173.

速度误差导致初始对准精度降低的问题。但是该文献未从根本上解决导致出现“锯齿形”速度误差的诱因。文献 [16] 指出 RINS 惯性器件的尺寸效应会体现在作为观测量速度误差中, 导致“锯齿形”波动, 并提出了一种基于尺寸效应在线补偿的旋转惯性导航系统初始对准算法, 实现对双轴 RINS 的内杆臂长度参数进行在线估计, 消除初始对准过程中的尺寸效应误差, 提高初始对准精度。但是, 内杆臂长度参数可以视为固定常量, 通过定期标定并在导航解算中补偿的方式消除其影响。因此, 在进行双 RINS 协同初始对准算法研究中可以假设尺寸效应已得到标定及补偿, 无需再增广为卡尔曼滤波器状态变量进行在线估计。此外, 基于回溯思想, 文献 [17] 提出一种针对 RINS 的实时信息复用初始对准算法, 将 RINS 初始对准阶段转动过程中的传感器数据记录存储下来, 并利用导航计算机的计算能力, 在精对准过程中, 完成对存储信息回溯导航更新和滤波估计, 通过提高信息利用率的方式提高初始对准精度。基于回溯思想同样可以应用于双 RINS 协同初始对准, 但实现正向导航下的初始对准是进行回溯导航的基础, 因此在进行双 RINS 协同初始对准算法研究中可暂不考虑回溯, 仅实现正向导航及滤波估计。此外, 由于 RINS 采用了旋转调制技术, 关于 RINS 初始对准的转位方案研究也是研究热点^[18-19]。文献 [18] 设计了一套单轴转位方案, 并通过 PWCS 理论证明了该转位方案下选取的 10 个状态变量为完全可观的。文献 [19] 提出了一种针对 RINS 的新的初始对准转位方案, 在该转位方案中 IMU 绕双轴分别转动至 6 个不同位置进行对准, 通过抑制 IMU 误差实现了初始对准精度的提升。由此可以看出, 采用合理的转位方案可以确保滤波器状态向量完全可观, 本文借鉴上述转位方案思路, 采用绕 z_c 轴的连续旋转增加系统的可观度, 保证每台 RINS 对应的 10 个状态变量均为可观的, 并通过 PWCS 理论和奇异值分解加以证明。同时, 需要指出上述研究提出的初始对准方法均针对单台 RINS 设计, 当扩展为两台 RINS 时, 虽然具有一定借鉴意义, 却无法直接使用。因此, 导致在实际应用中往往只能通过两台 RINS 各自独立执行初始对准算法的方式完成初始对准, 无法发挥两台 RINS 的协同对准优势。

针对两台 RINS 的研究, 文献 [20] 提出一种单/双轴 RINS 融合方法, 其中单轴 RINS 精度较低, 双轴 RINS 精度更高。该方法通过对比两台 RINS 误差特性特点, 设计融合滤波器将两台 RINS 信息优势结合, 将较低精度的单轴 RINS 速度和姿态稳定性精度提高了 50%。但是, 该方法仅针对导航阶段, 无法直接应用于初始对准阶段。文献 [21] 针对同等精度的两台 RINS, 以速度误差和姿态误差作为观测量, 建立了包含陀螺和

加速度计常值误差的误差模型, 通过卡尔曼滤波器实现了对各参数的有效估计。但是, 该方法主要针对外场误差自标定。因此, 需针对初始对准阶段, 进行双 RINS 的协同初始对准算法研究。

综上, 为了充分发挥两台 RINS 的协同优势, 本文提出了一种针对双 RINS 的协同初始对准算法。首先, 介绍了 RINS 的姿态和速度更新微分方程, 并推导了 RINS 误差传播模型。然后, 构建了双 RINS 协同初始对准卡尔曼滤波器, 将两台 RINS 的速度误差差值增广为卡尔曼滤波器的观测量, 并通过理论分析证明该观测量抵消了两台 RINS 公共扰动引起的速度误差部分, 仅保留与初始对准误差相关的速度误差部分, 提升了卡尔曼滤波器的观测量的信噪比, 在卡尔曼滤波器的递推迭代中利用观测噪声矩阵和信息更新实现了对状态变量估计的精度提升。接着通过 PWCS 理论和奇异值分解证明了双 RINS 协同初始对准卡尔曼滤波器的状态是完全可观的。最后进行了仿真实验, 验证了本文提出的针对双 RINS 协同初始对准算法的有效性。

1 RINS 的姿态和速度更新

RINS 在 IMU 外部加装了转位机构和测角装置, 然后将转位机构与载体固联。转位机构为 IMU 提供水平面内旋转和/或竖直平面内翻转的能力, 使得惯性器件误差在导航坐标系中的投影呈现周期变化的形式, 并在导航解算的积分运算中相互抵消, 实现导航精度的提升。RINS 工作原理如图 1 所示。

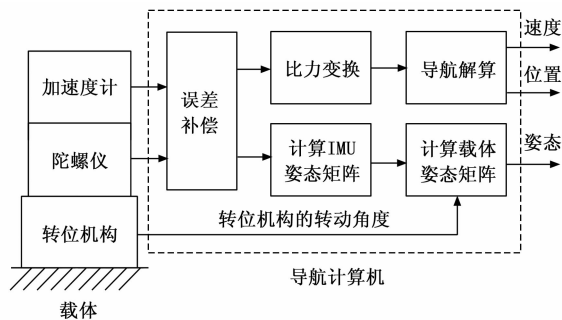


图 1 RINS 工作原理框图

RINS 使用的坐标系列如下:

- i 系: 地心惯性坐标系;
- n 系: 导航坐标系, 选取“东—北—天”地理坐标系作为导航坐标系;
- n' 系: 计算导航坐标系;
- b 系: 载体坐标系, 与载体固联的坐标系。其原点位于载体重心, 轴 x_b 、 y_b 、 z_b 分别指向载体的右、前、上方向;
- s 系: IMU 坐标系。其原点位于转位机构的中心, 轴 x_s 、 y_s 、 z_s 的指向与惯性器件的敏感轴一致。

RINS的导航解算算法可通过类比SINS获得。其中,类比SINS的载体姿态矩阵 C_b^c 更新的微分方程^[22]:

$$\dot{C}_b^c = C_b^c (\omega_{cb}^b \times) \quad (1)$$

可以得到RINS的IMU姿态矩阵 C_s^c 更新的微分方程:

$$\dot{C}_s^c = C_s^c (\omega_{cs}^s \times) \quad (2)$$

式中, $(\cdot \times)$ 表示向量 $\cdot$ 构成的反对称矩阵; ω_{cb}^b 表示 b 系相对于 n 系的角速度矢量在 b 系的投影(后文矢量的上标、下标含义以此类推)。

那么,RINS的载体姿态矩阵可通过IMU姿态矩阵结合转位机构的旋转矩阵 C_b^c 按式所示的矩阵链式相乘求得:

$$C_b^c = C_s^c C_b^s \quad (3)$$

类比SINS的速度 v_{en}^n 更新的微分方程:

$$\dot{v}_{en}^n = C_b^c f_{sf}^b - (2\omega_{en}^n + \omega_{en}^n) \times v_{en}^n + g^n \quad (4)$$

可以得到RINS的速度更新微分方程:

$$\dot{v}_{en}^n = C_s^c f_{sf}^s - (2\omega_{en}^n + \omega_{en}^n) \times v_{en}^n + g^n \quad (5)$$

式中, f_{sf}^s 为加速度计输出的比力矢量, $(\omega_{en}^n \times v_{en}^n)$ 为载体运动和地球自转引起的哥氏加速度, $(\omega_{en}^n \times v_{en}^n)$ 为载体运动引起的对地向心加速度, g 为重力加速度矢量。

2 RINS静基座误差模型

2.1 RINS姿态误差方程

实际上,用于RINS的IMU姿态矩阵更新的微分方程中各个物理量是带有误差的,如公式所示:

$$\dot{C}_s^{c'} = C_s^{c'} (\tilde{\omega}_{cs}^s \times) \quad (6)$$

式中, $\tilde{\omega}_{cs}^s = \omega_{cs}^s + \delta\omega_{cs}^s$ 。

由于RINS的姿态矩阵通过矩阵链式乘法通过IMU姿态矩阵求得,因此,RINS的载体姿态矩阵也存在误差,如公式(7)所示:

$$C_b^{c'} = C_s^{c'} C_b^s \quad (7)$$

$C_b^{c'}$ 与 C_b^c 之间的偏差在于计算得到的导航坐标系 n' 系与理想无误差的导航坐标系 n 系之间的偏差,如公式(8)所示:

$$C_b^{c'} = C_n^c C_b^n \quad (8)$$

记从 n 系至 n' 系的等效旋转矢量为 (ϕ_{mn}) (后文简记为 (ϕ) ,常称其为失准角。当失准角为小量,根据等效旋转矢量与方向余弦阵关系式,可以得到式(9):

$$C_n^{c'} = I - (\phi \times) \quad (9)$$

因此,RINS的载体计算姿态矩阵的微分 $\dot{C}_b^{c'}$ 一方面可以将式(3)、(9)代入式(8)求得,经过整理得到式(10):

$$\dot{C}_b^{c'} = (-\phi \times) C_b^c C_s^c + (I - \phi \times) (\dot{C}_b^c C_s^c + C_b^c \dot{C}_s^c) \quad (10)$$

也可以将式(2)代入式(7),经过整理得到式(11):

$$\dot{C}_b^{c'} = C_s^{c'} (\tilde{\omega}_{cs}^s \times) C_b^c - (\tilde{\omega}_{cn}^n \times) C_s^{c'} C_b^c + C_s^{c'} \dot{C}_b^c \quad (11)$$

两式右端相等,同时右乘 C_b^c ,展开并略去关于误差量的二阶小量,经过整理可得式:

$$(\dot{\phi} \times) = [(\phi \times \omega_{cn}^n + \delta\omega_{cn}^n - \delta\omega_{cs}^s) \times] \quad (12)$$

将该公式表示为矢量形式,即得:

$$\dot{\phi} = \phi \times \omega_{cn}^n + \delta\omega_{cn}^n - \delta\omega_{cs}^s \quad (13)$$

在静基座下,有 $\omega_{cn}^n=0$ 、 $\delta\omega_{cn}^n=0$,式中0表示适当维数的零向量或零矩阵。因此,RINS姿态误差方程可由式简化为式:

$$\dot{\phi} = \phi \times \omega_{cs}^s - \delta\omega_{cs}^s \quad (14)$$

式中, $\delta\omega_{cs}^s$ 为陀螺的测量误差。

2.2 RINS速度误差方程

在静基座下, $v_{en}^n=0$,且忽略重力矢量误差,则由式推导得RINS速度误差方程:

$$\dot{\delta v}^n = \dot{v}^n - \dot{v}^n = f_{sf}^n \times \phi + \delta f_{sf}^n \quad (15)$$

式中, $\dot{v}$ 为RINS导航解算得到的包含误差的速度矢量。

3 双RINS协同初始对准算法

3.1 构建双RINS协同初始对准卡尔曼滤波器

传统初始对准算法采用为两台RINS分别构建以速度误差为量测的卡尔曼滤波器,实现对两台RINS各自初始失准角的状态估计的方式。但是,传统初始对准算法无法发挥双RINS的协同优势。因此,本文提出一种针对双RINS协同初始对准算法,将两台RINS速度之差增广为卡尔曼滤波器观测量,用于抵消两台RINS公共扰动引起的速度误差部分,保留与初始对准误差相关的速度误差部分,提升卡尔曼滤波器的观测量的信噪比。双RINS协同初始对准卡尔曼滤波器的状态向量包含两台RINS的失准角和IMU常值误差,并以两台RINS失准角的平均值作为状态估计结果。双RINS协同初始对准算法如图2所示。

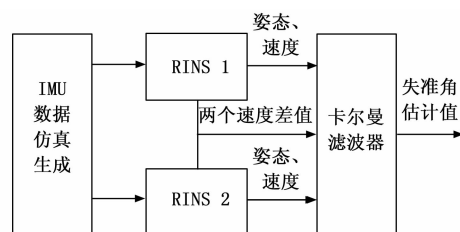


图2 双RINS协同初始对准算法框图

假设执行初始对准的两台RINS的导航解算输出已经时空对齐,且各自IMU的误差项均以经过标定和补偿,陀螺测量误差 $\delta\omega_{cs}^s$ 仅需考虑陀螺随机常值漂移 ε^s ,加速度计测量误差 δf_{sf}^s 仅需考虑加速度计随机常值偏置 ∇^s ,代入式(14)、(15),并展开为方程组形式可得:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_E = \omega_U \varphi_N - \omega_N \varphi_U - \epsilon_E^n \\ \dot{\varphi}_N = -\omega_U \varphi_E - \epsilon_N^n \\ \dot{\varphi}_U = \omega_N \varphi_E - \epsilon_U^n \\ \dot{\partial v}_E = -g \varphi_N + \nabla_E \\ \dot{\partial v}_N = g \varphi_E + \nabla_N \\ \dot{\partial v}_U = \nabla_U \end{cases} \quad (16)$$

式中, $\omega_N = -\omega_E \cos L$, $\omega_U = \omega_E \sin L$:

$$\begin{aligned} \epsilon^n &= \begin{bmatrix} \epsilon_E^n \\ \epsilon_N^n \\ \epsilon_U^n \end{bmatrix} = \mathbf{C}_s^n \epsilon^s = \begin{bmatrix} C_{11} \epsilon_x^s + C_{12} \epsilon_y^s + C_{13} \epsilon_z^s \\ C_{21} \epsilon_x^s + C_{22} \epsilon_y^s + C_{23} \epsilon_z^s \\ C_{31} \epsilon_x^s + C_{32} \epsilon_y^s + C_{33} \epsilon_z^s \end{bmatrix}, \\ \nabla^n &= \begin{bmatrix} \nabla_E^n \\ \nabla_N^n \\ \nabla_U^n \end{bmatrix} = \mathbf{C}_s^n \nabla^s = \begin{bmatrix} C_{11} \nabla_x^s + C_{12} \nabla_y^s + C_{13} \nabla_z^s \\ C_{21} \nabla_x^s + C_{22} \nabla_y^s + C_{23} \nabla_z^s \\ C_{31} \nabla_x^s + C_{32} \nabla_y^s + C_{33} \nabla_z^s \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由于无外界信息辅助的纯惯导系统的天向通道是发散的, 且天向速度仅用于加速度计零偏的估计, 对于失准角的估计没有作用, 因此, 可以忽略天向通道, 以降低状态矩阵的维度。

因此, 选取两台 RINS 的失准角、东向和北向速度误差、陀螺随机常值漂移、 x 轴和 y 轴加速度计随机常值偏置, 共 20 个参数作为双 RINS 协同初始对准卡尔曼滤波器的状态向量:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1^T \quad \mathbf{X}_2^T]^T$$

$$\mathbf{X}_1 = [\varphi_{1E}, \varphi_{1N}, \varphi_{1U}, \varphi_{2E}, \varphi_{2N}, \varphi_{2U}, \partial v_{1E}, \partial v_{1N}, \partial v_{2E}, \partial v_{2N}]^T$$

$$\mathbf{X}_2 = [\epsilon_{1x}, \epsilon_{1y}, \epsilon_{1z}, \epsilon_{2x}, \epsilon_{2y}, \epsilon_{2z}, \nabla_{1x}, \nabla_{1y}, \nabla_{2x}, \nabla_{2y}]^T$$

则双 RINS 协同初始对准算法的状态方程为:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{G}\mathbf{W} \quad (17)$$

式中, $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{20 \times 20}$ 为状态矩阵:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \omega_U & -\omega_N & 0 & 0 & 0 & 0_{1 \times 4} \\ -\omega_U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{1 \times 4} \\ \omega_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{1 \times 4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_U & -\omega_N & 0_{1 \times 4} \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_U & 0 & 0 & 0_{1 \times 4} \\ 0 & 0 & 0 & \omega_N & 0 & 0 & 0_{1 \times 4} \\ 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{1 \times 4} \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{1 \times 4} \\ 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{1 \times 4} \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{1 \times 4} \end{bmatrix}_{10 \times 10}$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{s1}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{C}_{s2}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{11}^1 & \mathbf{C}_{12}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{21}^1 & \mathbf{C}_{22}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{11}^2 & \mathbf{C}_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{21}^2 & \mathbf{C}_{22}^2 & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 10}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{s1}^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{s2}^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{G}_2 \\ 0_{10 \times 3} & 0_{10 \times 3} & 0_{10 \times 3} & 0_{10 \times 3} \end{bmatrix}_{20 \times 12}$$

$\mathbf{G}[]$ 为噪声分配矩阵; $\mathbf{G}_1$ 为 $\mathbf{C}_{s1}^n$ 前两行元素对应的矩阵, $\mathbf{G}_2$ 为 $\mathbf{C}_{s2}^n$ 前两行元素对应的矩阵。

$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_{g1}^T \quad \mathbf{w}_{g2}^T \quad \mathbf{w}_{a1}^T \quad \mathbf{w}_{a2}^T]^T$ 为陀螺角速率白噪声和加速度计比力白噪声。

选取两台 RINS 的东向速度、北向速度、东向速度之差、北向速度之差作为观测量:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= [\tilde{v}_{1E}, \tilde{v}_{1N}, \tilde{v}_{2E}, \tilde{v}_{2N}, \tilde{v}_{1E} - \tilde{v}_{2E}, \tilde{v}_{1N} - \tilde{v}_{2N}]^T = \\ &= [\partial v_{1E}, \partial v_{1N}, \partial v_{2E}, \partial v_{2N}, \partial v_{1E} - \partial v_{2E}, \partial v_{1N} - \partial v_{2N}]^T \end{aligned}$$

则观测方程为:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{V} \quad (18)$$

$$\text{式中, } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 为观测}$$

矩阵, $\mathbf{V}$ 为观测噪声。

双 RINS 协同初始对准卡尔曼滤波器的状态方程、观测方程确定之后, 可以按照式 (19) ~ 式 (23) 进行递推迭代更新:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k/k-1} = \Phi_{k/k-1} \hat{\mathbf{X}}_{k-1} \quad (19)$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \Phi_{k/k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T + \Gamma_{k/k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k/k-1}^T \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (21)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{Z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{X}}_{k/k-1}) \quad (22)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k/k-1} \quad (23)$$

式中, Φ 为状态转移矩阵, Γ 为系统过程噪声输入矩阵, $\mathbf{P}$ 为初始状态信息误差矩阵, $\mathbf{Q}$ 为状态方程的高斯噪声矩阵, $\mathbf{R}$ 为观测方程的噪声矩阵, $\mathbf{K}$ 为滤波增益系数矩阵。

3.2 双 RINS 协同初始对准算法提高对准精度的理论分析

双 RINS 协同初始对准算法通过在构建的卡尔曼滤波器的观测量中引入两台 RINS 的速度之差, 抵消了公共扰动引起的速度误差部分。

将公共扰动引起的东向、北向速度误差构成矢量记为 δv_c , 表示两台 RINS 因共同的误差源 (例如, 静基座下载体的振动、环境温度变化等) 产生的相同误差成分, 进而在两者的速度解算中出现的完全一致的速度误差部分。将两台 RINS 相互独立的东向、北向速度误差部分构成矢量记为 δv_d , 则双 RINS 协同初始对准卡尔曼滤波器的观测量可以重新写为:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \delta v_c + \delta v_{d1} \\ \delta v_c + \delta v_{d2} \\ (\delta v_c + \delta v_{d1}) - (\delta v_c + \delta v_{d2}) \end{bmatrix} \quad (24)$$

可以看出,公共扰动引起的速度误差仅出现在前两行,即两台 RINS 各自的速度误差中,在第三行,即两台 RINS 的速度之差中将被完全抵消。

然后,不含公共误差的观测量进入卡尔曼滤波器,卡尔曼滤波器的核心正是通过观测新息更新状态估计,式中观测新息为:

$$\mathbf{Z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{X}}_{k/k-1} = \begin{bmatrix} \delta v_c + (\delta v_{d1} - \delta \hat{v}_{d1}) \\ \delta v_c + (\delta v_{d2} - \delta \hat{v}_{d2}) \\ (\delta v_{d1} - \delta \hat{v}_{d1}) - (\delta v_{d2} - \delta \hat{v}_{d2}) \end{bmatrix} \quad (25)$$

观测新息的第三行同样不含公共误差,观测新息与滤波器增益矩阵 $\mathbf{K}_k$ 相乘,叠加在前一时刻状态估计上,形成新的更准确的状态估计。滤波器增益矩阵 $\mathbf{K}_k$ 按式计算,其中使用的观测噪声协方差矩阵 $\mathbf{R}_k$ 与单台 RINS 相比变化为:

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 & \mathbf{R} \\ 0 & \mathbf{R} & -\mathbf{R} \\ \mathbf{R} & -\mathbf{R} & 2\mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (26)$$

式中,单台 RINS 速度观测量对应的噪声协方差矩阵为 $\mathbf{R}$,速度之差观测量对应的噪声协方差矩阵为 $2\mathbf{R}$ 。通过引入两台 RINS 速度之差提供了噪声相关性(非对角项),为滤波提供了公共误差的零信息约束,即公共误差在观测量中贡献降低,令滤波聚焦于独立误差的修正。根据该观测噪声协方差矩阵 $\mathbf{R}_k$ 计算得到的增益矩阵 $\mathbf{K}_k$ 对于独立误差的灵敏度更高。

综上,双 RINS 协同初始对准算法相对于单台 RINS 主要通过两方面实现初始对准精度的提高。一是观测新息中第三行无公共误差,其已通过速度之差实现抵消。二是通过式对状态进行更新时,由于观测新息中速度之差部分不含公共误差,直接反映独立误差的差值,因此,该信息通过增益矩阵强化对状态中 δv_1 、 δv_2 的更新,并通过姿态-速度耦合关系最终提高姿态对准精度。

3.3 基于 PWCS 理论和 SOM 矩阵奇异值分解的系统可观测度分析

分段定常系统(PWCS, piece wise constant system)理论将时变系统的整个运行时间段按照适当时间间隔划分为几个连续时间段,在较短时间段内,将系统看成定常系统。根据 PWCS 理论,可以使用提取可观测性矩阵(SOM, stripped observability matrix)代替总体可观测性矩阵(TOM, total observability matrix)进行系统可观测性分析,通过系统可观测性定性判断系统状态是否可估计。

由于系统的可观测性与外部输入激励无关,为了简化分析,只需要研究齐次系统的可观测性即可。系统的

状态方程和观测方程离散化后对应的第 j 个时间段的齐次方程为:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{F}_j \mathbf{X}_k \\ \mathbf{Z}_k = \mathbf{H} \mathbf{X}_k \end{cases} \quad (27)$$

第 j 个时间段系统的可观测性矩阵为:

$$\mathbf{Q}_j = [\mathbf{H}^T \quad (\mathbf{H}\mathbf{F}_j)^T \quad \cdots \quad (\mathbf{H}\mathbf{F}_j^{n-1})^T]^T \quad (28)$$

则第 r 个时间段系统的提取可观测矩阵为:

$$\mathbf{Q}_s(r) = [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{Q}_r]^T \quad (29)$$

若 SOM 矩阵满秩,则可以给出定性结论,系统是完全可以观测的。否则,系统是不完全可观测的,只能确定部分状态量或状态量组合。

为了定量给出系统状态估计的可观测程度,在 PWCS 分析的基础上,进一步对系统 SOM 矩阵进行奇异值分解,利用奇异值大小判断状态的可观测程度:

$$\mathbf{Q}_s(r) = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ 0_{(rmn-n) \times n} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \quad (30)$$

式中, $\mathbf{U} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_{rmn}]$ 为 rmn 维酉矩阵, $\mathbf{V} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$ 为 n 维酉矩阵, $\mathbf{S} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ 为 $\mathbf{Q}_s(r)$ 的奇异值。

第 k 个状态变量的可观测度定义为:

$$\eta_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_0} \quad (31)$$

式中, σ_0 表示可直接由外部观测得到的状态变量所对应的奇异值; σ_k 表示第 k 个状态变量所对应的奇异值,奇异值与状态变量的对应关系可通过比较 v_k 中各元素绝对值的大小得到。

因此,可观测矩阵奇异值和对应列向量可以用来分析状态变量的可观测度。最大奇异值对应列向量中绝对值最大的数对应的状态是可观测度最高的。最小奇异值对应列向量中绝对值最大的数对应的状态是可观测度最低的。

3.4 双 RINS 协同对准系统的可观测度分析

双 RINS 协同对准系统进行初始准时,以两台 RINS 的东向速度、北向速度、东向速度之差、北向速度之差作为外部观测测量。IMU 绕方位轴匀速转动,转动角速度为 $10^\circ/\text{s}$,取转动 180° 所需的时间作为一个时间段的时间跨度,即为 18 s。表 1 给出前 3 个时间段 SOM 矩阵的秩以及系统状态变量可观测度变化情况。

SOM 矩阵的秩的变化情况,从表 1 可以看出,时间段一对应的初始位置的 SOM 矩阵的秩为 14,当 IMU 转动 180° 后,时间段二的 SOM 矩阵的秩为 20,达到满秩,系统完全可以观测。后续时间段, SOM 矩阵均为满秩。

同时,各状态变量可观测度的变化情况,从表 1 可以看出,8 个最大可观测度对应的状态变量为两台 RINS

表 1 SOM 矩阵的秩及系统状态变量可观测度

	时间段一	时间段二	时间段三
$r(Q_s)$	14	20	20
φ_{1E}	13.83	19.35	23.57
φ_{1N}	13.83	19.35	23.57
φ_{1U}	2.70×10^{-6}	9.81×10^{-4}	0.031
φ_{2E}	13.83	19.35	23.57
φ_{2N}	13.83	19.35	23.57
φ_{2U}	2.70×10^{-6}	9.81×10^{-4}	0.031
δv_{1E}	1	1	1
δv_{1N}	1	1	1
δv_{2E}	1	1	1
δv_{2N}	1	1	1
ϵ_{1x}	0	0.004	0.03
ϵ_{1y}	0.68	4.95	7.66
ϵ_{1z}	0.68	4.95	7.66
ϵ_{2x}	0	0.004	0.03
ϵ_{2y}	0.68	4.9	57.66
ϵ_{2z}	0.68	4.95	7.66
∇_{1x}	0	0.66	0.89
∇_{1y}	0	0.66	0.89
∇_{2x}	0	0.66	0.89
∇_{2y}	0	0.66	0.89

的东向、北向失准角，y 轴、z 轴陀螺随机常值漂移，也就意味着其在滤波过程中可以快速估计出来。可观测度数值为 1 的状态变量为东向北向速度误差、东向北向速度误差的之差，可以直接通过外部观测量得到。在时间段一中，可观测矩阵的秩为 14，有 6 个状态变量不可观测，分别对应了两台 RINS 的 x 轴、y 轴加速度计随机常值偏置和 x 轴陀螺随机常值漂移。经过 IMU 转动后，在时间段二、时间段三，不可观测的 6 个状态变量转换为可观测，可观测度分别增长为 0.89 和 0.03，并在对准结束对应的时间段可观测度达到 1.24 和 0.05。综上所述，通过 PWCS 理论和奇异值分解的分析表明，双 RINS 协同初始对准算法对应的状态变量均是可观测的，可以通过卡尔曼滤波获得各个状态变量的估计结果。

4 仿真实验与分析

4.1 仿真实验环境设置

在双 RINS 协同初始对准仿真实验过程中，参考霍尼韦尔激光陀螺惯导系统技术指标，设置陀螺随机常值漂移和随机游走系数为 $0.01^\circ/\text{h}$ 和 $0.001^\circ/\text{h}^{1/2}$ ，加速度计随机常值偏置和随机游走系数为 $100\text{ }\mu\text{g}$ 和 $1\text{ }\mu\text{g}/\text{Hz}^{1/2}$ 。

初始姿态角设置为 $[1^\circ, 0^\circ, 0^\circ]^T$ 。

位置设置为 $[34^\circ\text{N}, 116^\circ\text{E}, 480\text{ m}]^T$ 。

初始失准角设置为 $[0.1^\circ, 0.1^\circ, 0.5^\circ]^T$ 。

卡尔曼滤波器状态变量 $\mathbf{X}$ 初始值均为零。

状态协方差矩阵初始值为：

$$\mathbf{P}(0) = \text{diag} \{ [(1^\circ)_{1 \times 6}, (1\text{ m/s})_{1 \times 4}, (0.01^\circ/\text{h})_{1 \times 6}, (100\text{ }\mu\text{g})_{1 \times 4}]^2 \}$$

系统噪声协方差矩阵初始值为：

$$\mathbf{Q}(0) = \text{diag} \{ [(0.001^\circ/\text{h}^{1/2})_{1 \times 6}, (1\text{ }\mu\text{g}/\text{Hz}^{1/2})_{1 \times 4}, (0)_{1 \times 10}]^2 \}$$

观测噪声协方差矩阵式中 $\mathbf{R}$ 的初始值为：

$$\mathbf{R}(0) = \text{diag} \{ [(0.01\text{ m/s})_{1 \times 2}]^2 \}$$

两台 RINS 采用的转位方案相互对称，分别以 $10^\circ/\text{s}$ 的角速率匀速连续转动 300 s，其中，RINS1 绕 z_s 轴转动，RINS2 绕 $-z_s$ 轴转动。

考虑 RINS 安装位置所处的振动环境，依据工程经验，设置载机存在 z_b 轴方向的低频正弦扰动线速度 $v_{zb} = 0.001\sin(10\pi t + 0.5\pi)$ 。

4.2 仿真实验及结果分析

双 RINS 协同初始对准算法的仿真实验步骤总结如下：

1) 仿真生成两台 RINS 的 IMU 数据，数据时间长度为 300 s。该步骤中使用的仿真实验环境设置信息有初始姿态角真值、线速度扰动、初始位置、RINS 转位方案、陀螺和加速度计的相关误差系数。同时，仿真生成传统对准算法即单台 RINS 初始对准的 IMU 数据，使用的仿真环境设置信息与 RINS1 完全相同。

2) 两台 RINS 使用各自的 IMU 数据分别进行导航解算。该步骤将分别得到两台 RINS 的姿态、速度解算结果。同时，传统对准算法对应的单台 RINS 进行导航解算，输出姿态、速度解算结果。

3) 在 RINS1 中构建双 RINS 协同初始对准卡尔曼滤波器。该步骤中使用的仿真实验环境设置信息有卡尔曼滤波器相关的初始值，此外，需使用步骤 2 中得到的导航解算结果初始化卡尔曼滤波器的状态矩阵、过程噪声输入矩阵。同时，为传统对准算法对应的单台 RINS 构建卡尔曼滤波器，相关初始值、状态矩阵、过程噪声输入矩阵与 RINS1 的设置相同。

4) 在两台 RINS 导航解算的同时，在 RINS1 中按照卡尔曼滤波器迭代更新公式进行双 RINS 协同初始对准卡尔曼滤波器的状态估计。同时，为传统对准算法对应的单台 RINS 执行导航解算和卡尔曼滤波器迭代更新。

5) 300 s 初始对准结束，计算两台 RINS 失准角的平均值，输出双 RINS 协同初始对准卡尔曼滤波器状态估计结果。同时，输出传统对准算法对应的单台 RINS 失准角作为对照。

图 3~5 分别给出进行 300 s 初始对准后，东向、北向、方位失准角误差的收敛曲线。从图 3、图 4 可以看出，本文提出的双 RINS 协同初始对准算法相对于传统

对准算法, 在向东、北向失准角误差上具有更快的收敛速度, 在对准结束时刻, 失准角误差更小。这是因为将速度之差增广作为观测量后, 在卡尔曼滤波估计过程中, 通过观测噪声协方差矩阵的噪声相关性实现了对公共误差的抑制, 使得收敛过程更少地受到干扰影响, 收敛曲线超调更小, 最终收敛速度更快, 收敛精度有所提高。从图 5 可以看出, 本文提出的双 RINS 协同对准算法显著提高了方位失准角的估计精度, 图中曲线对应的方位失准角误差值由 $0.197\ 6'$ 减小为 $0.057\ 4'$ 。方位失准角估计精度的提升主要得益于初始对准过程中, 观测增广速度之差后通过卡尔曼滤波器的状态更新, 将速度之差对应的观测新息通过增益矩阵更新至状态估计中, 方位失准角因此获得了更优的估计精度。

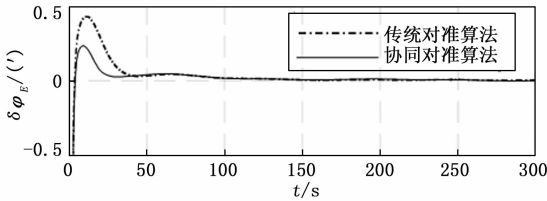


图 3 向东失准角误差收敛曲线

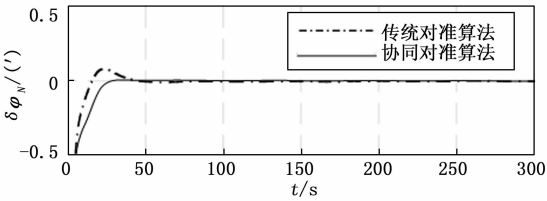


图 4 北向失准角误差收敛曲线

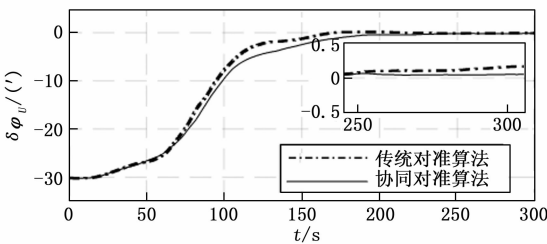


图 5 方位失准角误差收敛曲线

图 6~8 分别给出进行 300 s 初始对准, 两台 RINS 的 x 轴、 y 轴、 z 轴陀螺随机常值漂移的估计值收敛曲线, 图中可以看出, x 轴、 y 轴、 z 轴陀螺随机常值漂移的估计值在初始对准结束时均趋于收敛, 为仿真设置值 $0.01^{\circ}/h$ 。 x 轴陀螺随机常值漂移估计曲线的收敛相对另外两个参数较慢, 主要是因为 x 轴陀螺随机常值漂移的可观测度在初始对准开始阶段不可观测, 并随着 IMU 转动变为可观测的, 且可观测度增加至 0.03。仿真结果与可观测性分析结果一致。

图 9~10 分别给出进行 300 s 初始对准, 两台

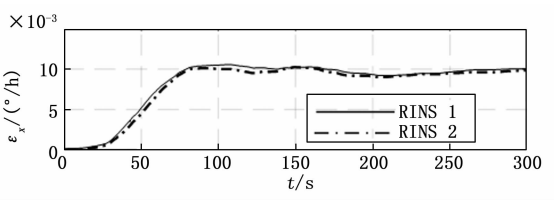


图 6 x 轴陀螺随机常值漂移估计曲线

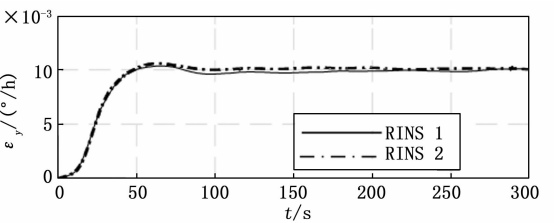


图 7 y 轴陀螺随机常值漂移估计曲线

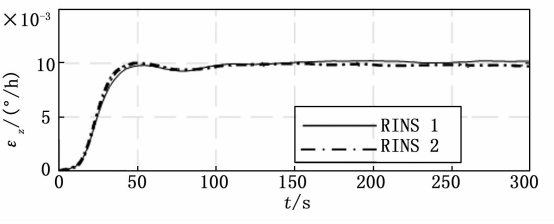


图 8 z 轴陀螺随机常值漂移估计曲线

RINS 的 x 轴、 y 轴加速度计随机常值偏置的估计值收敛曲线, 图中可以看出, 本文提出的双 RINS 协同初始对准算法对 x 轴、 y 轴加速度计随机常值偏置的估计值收敛于仿真设置值 $100\ \mu g$ 。 x 轴、 y 轴加速度计随机常值偏置是可观测的, 其可观测度为 0.04, 仿真结果收敛表明与可观测性分析结果一致。

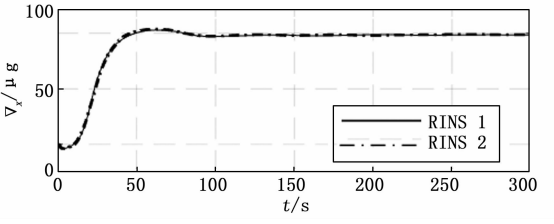


图 9 x 轴加速度计随机常值偏置估计曲线

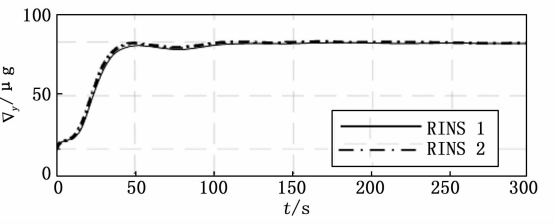


图 10 y 轴加速度计随机常值偏置估计曲线

为了验证本文算法的初始对准稳定性, 进行了 30 次蒙特卡洛初始对准仿真实验, 并统计对准结果见表

2. 其中, 均方根误差 (RMSE, root mean square error) 表示估计值与真实值之间的平均误差, 用于反映估计值接近真实值的程度, 按照式计算得到:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}{m}} \quad (32)$$

式中, y_i 为真实值, $\hat{y}_i$ 为估计值, m 为仿真次数。

从表 2 可以看出, 本文提出的双 RINS 协同初始对准算法相对于传统初始对准算法的失准角误差均值和均方根误差更小。其中, 东向失准角误差由 $0.000\ 8'$ 降低为 $0.000\ 4'$, 北向失准角误差由 $0.001\ 9'$ 降低为 $0.001\ 1'$, 两个失准角在精度上略有提高。方位失准角误差由 $0.1481'$ 降低为 $0.106\ 8'$, 方位失准角的精度提升更为显著, 方位失准角误差减小了约 25%。同时方位失准角的 RMSE 由 $0.543\ 6'$ 降低为 $0.184\ 7'$, 反映出估计值稳定性的提升。综上, 通过 30 次蒙特卡洛仿真实验, 表明了本文提出的双 RINS 协同初始对准算法有效提高了初始对准的精度, 并且具有更优的稳定性, 仿真结果验证了算法的有效性。

表 2 蒙特卡洛仿真失准角均值和 RMSE (′)

		传统对准算法	协同对准算法
$\delta\varphi_E$	均值	0.000 8	0.000 4
	RMSE	0.005 6	0.003 1
$\delta\varphi_N$	均值	0.001 9	0.001 1
	RMSE	0.002 4	0.001 5
$\delta\varphi_U$	均值	0.148 1	0.106 8
	RMSE	0.543 6	0.184 7

5 结束语

针对载机装备两台 RINS 的场景, 为了解决当前单台 RINS 各自单独初始对准, 两台 RINS 之间无信息交互协同的缺点。本文提出一种针对双 RINS 的协同初始对准算法, 推导了 RINS 的误差传播模型, 将两台 RINS 的速度之差增广为卡尔曼滤波器观测量, 抑制了公共扰动对应的速度误差部分, 提升了观测量的信噪比。最终提高了双 RINS 协同初始对准的精度。使用 PWCS 和奇异值分解从理论上分析得出了系统状态完全可观测的结论。仿真实验结果表明, 相对传统对准算法, 本文提出的针对双 RINS 的协同初始对准算法, 提升了失准角的收敛速度和收敛精度, 方位失准角误差减小了 25%, 同时 RMSE 减小意味着初始对准的稳定性得到了提升, 算法的有效性得到了验证。

需要说明的是, 由于本文研究范围聚焦在双 RINS 协同初始对准的实现, 本文未对基于回溯思想在双 RINS 的应用、双 RINS 的初始对准转位方案设计进行深入讨论。因此, 未来关于双 RINS 的研究中, 可以围

绕回溯思想如何提高双 RINS 的 IMU 数据利用效率、如何设计双 RINS 的转动次序获得最优初始对准转位方案等方向持续进行深入探索。

参考文献:

- [1] 常振军, 张志利, 周召发, 等. 单轴旋转 SINS 惯性系对准方法研究 [J]. 计算机测量与控制, 2019, 27 (6): 205 - 208.
- [2] JIN Z, HUANG J W, YANG W P, et al. A precision evaluation method for initial alignment algorithm of rotating inertial navigation system [J]. Advances in Guidance, Navigation and Control, 2025 (3): 321 - 332.
- [3] 雷宏杰, 王晓斌, 刘放. 机载双轴旋转调制激光惯导系统误差特性及关键技术分析 [J]. 导航定位与授时, 2016, 3 (4): 13 - 18.
- [4] 李魁, 李启航, 梁文伟, 等. 一种旋转式惯导双轴同时连续旋转策略 [J]. 中国惯性技术学报, 2024, 32 (12): 1167 - 1175.
- [5] LI Q H, LI K, LIANG W W. A dual-axis rotation scheme for long-endurance inertial navigation systems [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2022, 71 (6): 1 - 9.
- [6] 董旭, 董建树, 王惠, 等. 一种捷联惯性导航系统的旋转控制机构设计技术 [J]. 计算机测量与控制, 2022, 30 (10): 110 - 117.
- [7] 贺继超, 谢波. 一种可抑制航向运动影响的单轴转位方案 [J]. 计算机测量与控制, 2020, 28 (3): 197 - 200.
- [8] REN Q, WANG B, DENG Z H, et al. A multi-position self-calibration method for dual-axis rotational inertial navigation system [J]. Sensors and Actuators A (Physical), 2014, 219: 24 - 31.
- [9] GAO W, ZHANG Y, WANG J G. Research on initial alignment and self-calibration of rotary strapdown inertial navigation systems [J]. Sensors, 2015, 15 (2): 3154 - 3171.
- [10] ZHENG Z C, HAN S L, ZHENG K F. An eight-position self-calibration method for a dual-axis rotational inertial navigation system [J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2015: 232: 39 - 48.
- [11] WANG B, REN Q, DENG Z H, et al. A self-calibration method for nonorthogonal angles between gimbals of rotational inertial navigation system [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015, 62 (4): 2353 - 2362.
- [12] SUN X, LAI J Z, LÜ P, et al. A fast self-calibration method for dual-axis rotational inertial navigation systems based on invariant errors [J]. Sensors, 2024, 24 (2): 1 - 23.
- [13] 梁钟泓, 罗晖, 廖志坤, 等. 冗余配置双轴旋转惯导故

障自主在线检测与诊断方法 [J/OL]. 国防科技大学学报, 2025: 1 - 9 [2025 - 06 - 07]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/43.10.67.T.20250314.0936.002.html>.

[14] 赵伟高, 朱启举, 白 亮. 一种基于双主惯导的直升机载导弹传递对准精度评估方法 [J]. 弹箭与制导学报, 2021, 41 (6): 71 - 75.

[15] 胡 杰, 石潇竹. 基于模糊自适应滤波的单轴旋转惯导精对准方法 [J]. 系统仿真学报, 2021, 33 (2): 315 - 323.

[16] 常振军, 张志利, 周召发, 等. 基于尺寸效应在线补偿的旋转捷联惯性导航系统初始对准 [J]. 兵工学报, 2020, 41 (10): 2016 - 2021.

[17] FU Q W, LI S H, LIU Y, et al. Information-reusing alignment technology for rotating inertial navigation system [J]. Aerospace Science and Technology, 2020, 99 (4): 102333.

(上接第 103 页)

臂模型与实际动力学在关节力矩-运动耦合空间。充分考虑关节角加速度约束, 利用双 PI 控制器克服偏摆力矩对稳定性的影响, 实现对关节角驱动力矩的有效控制。实验结果表明, 使用所研究方法驱动力矩变化曲线与变化范围均与实验指标一致, 双臂在三维空间坐标系的运动轨迹也与实验指标一致, 说明使用该方法在双臂协同摆动方面优于传统方法, 为空间机器人高效执行复杂任务提供了技术支撑。

参考文献:

[1] 徐建明, 陈显汉. 基于 CODESYS 平台的移动机械臂运动控制系统设计 [J]. 浙江工业大学学报, 2024, 52 (3): 237 - 247.

[2] 贾 蓉, 郑秀娟, 张金亮. 双臂机器人协调轨迹滑模鲁棒控制算法研究 [J]. 计算机仿真, 2021, 38 (4): 286 - 290.

[3] 罗 刚, 何 涛, 许 博, 等. 爬杆机器人动力学仿真及其驱动转矩控制研究 [J]. 机械科学与技术, 2024, 43 (5): 781 - 789.

[4] 苏永华, 李佳阳, 韩 蓉, 等. 机器人关节机械驱动下手臂位置的闭环控制 [J]. 机械设计与研究, 2024, 40 (1): 121 - 124.

[5] 李 肖, 李世其, 韩 可, 等. 面向实时自避碰的双臂机器人力矩控制策略 [J]. 信息与控制, 2023, 52 (2): 211 - 219.

[6] 王冲冲, 杨桂林, 陈庆盈, 等. 基于自适应干扰估计器的协作机器人关节速度波动抑制方法 [J]. 机器人, 2023, 45 (1): 48 - 57.

[7] 万珍平, 罗 钊, 陆龙生, 等. 关节角参数化结合接近矢量可行方向的五自由度机械臂逆运动学求解 [J]. 华南理工大学学报: 自然科学版, 2023, 51 (1): 16 - 21.

[8] 朱琦歆, 俞 滨, 王春雨, 等. 液压驱动单元基于力的阻抗控制系统前馈抗扰控制研究 [J]. 机械工程学报, 2023, 59 (4): 295 - 307.

[9] 陈小璐, 李鹏远, 魏海鸿, 等. 遥操作机械臂在托卡马克内运动轨迹的虚拟仿真研究 [J]. 核聚变与等离子体物理, 2024, 44 (2): 191 - 197.

[10] 武 毅, 胥 超, 刘力源, 等. 基于多任务转换的冗余度机器人控制算法 [J]. 机械工程学报, 2023, 59 (15): 83 - 93.

[11] 刘佳俊, 张欣波, 谢银辉, 等. 7 自由度外骨骼上肢康复机器人的肩部优化及运动仿真 [J]. 机械传动, 2024, 48 (5): 67 - 74.

[12] 李丽平, 邵鹏程. 基于有限差分法的巡检机器人位姿伺服控制策略 [J]. 电气传动, 2023, 53 (6): 3 - 7.

[13] 王学军, 张 帆. 攀爬机器人动力学建模与分析 [J]. 机械科学与技术, 2023, 42 (1): 38 - 45.

[14] 张博研, 李钰强, 吴 晗, 等. 带电作业螺丝紧固机械臂作业规划研究 [J]. 电工电能新技术, 2023, 42 (12): 19 - 28.

[15] 朱大昌, 盘意华, 杜宝林, 等. 一种并联机器人轨迹规划算法研究 [J]. 机床与液压, 2023, 51 (5): 14 - 22.

[16] 刘宜成, 张飞越, 严 文. 空间机器人预定义任意时间最优轨迹规划 [J]. 电光与控制, 2024, 31 (2): 58 - 64.

[17] 张 辉, 左孝中, 张 伟, 等. 空间双臂机器人漂浮基座扰动最小化轨迹规划 [J]. 电光与控制, 2025, 32 (2): 24 - 31.

[18] 张耀文, 王证普, 刘业超, 等. 一种冗余机械臂构型优化方法 [J]. 哈尔滨工程大学学报, 2023, 44 (3): 329 - 336.

[19] 张振翮, 杨蹈宇, 舒奕彬, 等. 改进粒子群优化算法在搬运机器人机械臂中的应用 [J]. 机械传动, 2024, 48 (8): 49 - 56.

[20] 陈 怡, 黄炜皓, 陈静文, 等. 乒乓发球机器人手臂末端位置误差补偿研究 [J]. 机械设计与制造, 2023 (7): 257 - 261.