

# Volterra 级数改进的 Tolles-Lawson 磁干扰补偿方法

刘 强, 张晓明, 张 鹤, 王亚国, 赵晨阳, 潘凯霖

(中北大学 仪器与电子学院, 太原 030051)

**摘要:** 针对无人机航空磁测数据时间序列的混沌特性, 提出了一种考虑非线性动态磁场的航磁补偿方法; 该方法首先采用 Tolles-Lawson 模型对航空磁测数据进行初步补偿, 随后利用互信息法和 Cao 氏法确定无人机非线性动态磁场的延迟时间和嵌入维数; 通过相空间重构, 将数据输入 Volterra 级数模型, 并采用递推最小二乘法对模型核函数进行辨识, 最终对 T-L 补偿结果进行二次补偿; 经实际飞行数据验证, 该方法显著提高了补偿精度, 改善比超过 30%, 同时表现出良好的鲁棒性和泛化性。

**关键词:** 地磁导航; 磁干扰补偿; 互信息法; Cao 氏法; Volterra 级数

## Volterra Series-Improved Tolles-Lawson Magnetic Interference Compensation Method

LIU Qiang, ZHANG Xiaoming, ZHANG Ge, WANG Yaguo, ZHAO Chenyang, PAN Kailin

(School of Instrumentation and Electronics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**Abstract:** To address the chaotic characteristics of time series in UAV aeromagnetic survey data, a compensation method considering nonlinear dynamic magnetic fields was proposed. Firstly, this method employs the Tolles-Lawson model for preliminary compensation of the aeromagnetic data. And then, mutual information method and Cao's method are used to determine the delay time and embedding dimension of the UAV's nonlinear dynamic magnetic field. Through phase space reconstruction, the data is input into a Volterra series model, and the recursive least squares method is applied to identify the model's kernel function. Finally, a secondary compensation for T-L compensation results is conducted. Through Actual flight data verification, this method significantly improves compensation accuracy, with an enhancement ratio exceeding 30%, while exhibiting good robustness and generalization capability.

**Keywords:** geomagnetic navigation; magnetic interference compensation; mutual information method; Cao's method; Volterra series

## 0 引言

地磁导航作为一种全天候、多时段、全自主的导航方式<sup>[1]</sup>, 是卫星拒绝条件下惯性导航的重要辅助手段, 受到了世界各国的广泛关注。在地磁导航中, 凭借优异的飞行灵活性、极低的使用成本和高效的数据采集能力, 无人机成为一种不可或缺的工具。然而, 在实际测量中测量数据中夹杂大量噪声与误差, 这都与无人机复杂的电磁干扰<sup>[2]</sup>、地磁梯度<sup>[3]</sup>、磁日变<sup>[4]</sup>等环境磁场干

扰有着很大的关系。因此, 干扰磁场的建模与补偿成为实现精确匹配与定位的关键环节。

干扰磁场的建模与补偿可分为静态补偿和动态补偿两大类。静态补偿旨在解决固定干扰, 动态补偿则关注飞行过程中不断变化的干扰<sup>[5]</sup>。文献 [6] 于 1950 年对飞机磁源及补偿模型进行了研究, 提出的经典 T-L 模型, 将载体磁场干扰归纳为固定磁场、感应磁场及涡流磁场三种类型。19 世纪 80 年代之前的研究都是通过改进线性回归算法来提高磁补偿的性能的未充分考虑非

收稿日期: 2025-03-05; 修回日期: 2025-03-26。

作者简介: 刘 强(2000-), 男, 硕士研究生。

通讯作者: 张晓明(1976-), 男, 博士, 教授。

引用格式: 刘 强, 张晓明, 张 鹤, 等. Volterra 级数改进的 Tolles-Lawson 磁干扰补偿方法[J]. 计算机测量与控制, 2026, 34(3): 121-129.

线性干扰的影响。近年来,对机载电气设备磁干扰干扰<sup>[7]</sup>、固定翼无人机机翼的摆动<sup>[8]</sup>、无人机方向舵和升降舵等活动部件的<sup>[9]</sup>,以及磁强计的系统误差<sup>[10]</sup>等。文献[11]提出利用神经网络的非线性特性对磁场干扰进行补偿,但该神经网络完全抛弃了 T-L 模型,作为数据驱动模型,依赖数据且鲁棒性不足。

虽然已有一些补偿技术在一定程度上缓解了这一问题,但现有方法并没有针对特定设备精确的补偿方法,尤其是电机这种在机动过程中能产生较为复杂且影响较大的磁场干扰的设备。且现有的神经网络等算法计算量较大,不适用于无人机地磁导航。为解决上述问题,本文针对无人机电机因姿态变化引发的非线性动态磁场进行深入分析,提出一种计算量较小的结合 Tolles-Lawson 模型与 Volterra 级数的磁补偿方法。该方法继承了 T-L 模型对线性磁场干扰的处理能力,同时利用 Volterra 级数构建无人机因姿态变化引发的动态磁场的非线性模型,无需复杂的神经网络替代 T-L 模型,充分发挥先验物理模型与非线性建模的结合优势。

## 1 Tolles-Lawson 模型

Tolles 和 Lawson 经过对无人机磁源分布以及干扰磁场产生的机理,将与无人机机动相关的干扰磁场分为 3 个部分:固定磁场  $B_{per}$ 、感应磁场  $B_{ind}$  和涡流磁场  $B_{edd}$ ,可表示为:

$$B_i = B_{per} + B_{ind} + B_{edd} \quad (1)$$

$$B_{per} = c_1 m_x + c_2 m_y + c_3 m_z \quad (2)$$

$$B_{ind} = B_m (c_4 m_x^2 + c_5 m_x m_y + c_6 m_x m_z + c_7 m_y^2 + c_8 m_y m_z + c_9 m_z^2) \quad (3)$$

$$B_{edd} = B_m (c_{10} m_x m_x' + c_{11} m_x m_y' + c_{12} m_x m_z' + c_{13} m_y m_x' + c_{14} m_y m_y' + c_{15} m_y m_z' + c_{16} m_z m_x' + c_{17} m_z m_y' + c_{18} m_z m_z') \quad (4)$$

其中:  $B_m$  为地磁场总量;  $c_i$  ( $i=1, 2, \dots, 18$ ) 为固定磁场、感应磁场、涡流磁场有关的变量参数;  $m_x, m_y, m_z$  为根据三轴磁场分量计算的方向余弦值;  $m_x', m_y', m_z'$  分别为  $m_x, m_y, m_z$  关于时间的导数。方向余弦的具体表示如下:

$$m_y = \frac{B_y}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \quad (5)$$

$$m_x = \frac{B_x}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \quad (6)$$

$$m_z = \frac{B_z}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \quad (7)$$

式中,  $B_x, B_y, B_z$  是由地磁场的 3 个分量。

在实际测量中,无人机干扰磁场不能直接获得,因此通常使用测量值表示地磁场和无人机干扰磁场叠加:

$$B_{opt} = B_0 + B_i \quad (8)$$

其中:  $B_{opt}$  为测量的标量地磁场总值;  $B_0$  即为真实地磁场值。

Tolles-Lawson (T-L) 模型已经完成了对干扰磁场线性补偿,忽略了实际应用中非线性磁场的干扰,这些干扰最终都反映在补偿后的剩余磁场中。所以使用 T-L 模型补偿后的磁场(式的  $B_0$ )中还包含着经典航磁补偿模型补偿不掉的非线性磁场干扰,其中就有因姿态变化产生的非线性磁场,可以表示为:

$$B_0 = B_e + B_{nl} \quad (9)$$

其中:  $B_e$  代表真实地磁场,  $B_{nl}$  代表非线性干扰磁场。

在 T-L 模型中认为地球磁场是恒定的磁场,因此假设对 T-L 模型补偿后的地磁场进行高通滤波后得到的数据为 T-L 模型补偿不掉的动态非线性干扰磁场:

$$hpf(B_0) = hpf(B_e + B_{nl}) = 0 + B_{nl} = B_{nl} \quad (10)$$

## 2 Volterra 级数模型

Volterra 级数方法能够有效描述输入输出之间的非线性关系通过低阶非线性核函数的叠加,可以准确刻画非线性动态系统的行为,同时具备较好的物理解释性和建模稳定性。与神经网络等非线性建模方法相比,Volterra 级数无需复杂的超参数优化,仅需少量参数调节即可完成建模,并能够充分利用先验知识<sup>[12]</sup>。

动态非线性干扰磁场主要是由于电机、电流产生的,而电机电流的变化最终会反映在无人机姿态变化中,因此将无人机姿态(俯仰、横滚、偏航)、T-L 模型补偿后的地磁场作为 Volterra 级数模型的输入,剩余动态非线性干扰磁场的时间序列作为输出。

### 2.1 Volterra 级数理论

Volterra 级数是一种广泛用于描述非线性系统输入输出关系的数学工具。它是一种多项式扩展的输入输出关系模型,可以在不假设系统的具体结构下,捕捉复杂的非线性行为。Volterra 级数模型的优点在于它能够有效地建模高阶交互效应,而不需要显式的定义这些交互。

Volterra 级数可以看作是 Taylor 级数的一般化,能够描述任意阶的非线性系统响应。它可以表示为一个多项式的组合,每一项都与输入信号的不同阶次的乘积相关。对于一个多变量输入信号  $X(n)$ ,输出  $y(n)$  通过以下公式给出:

$$X(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_i(n)] \quad (11)$$

$$y(n) = \beta_0 + \sum_{a=1}^d \beta_a x_a(n) + \sum_{i=1}^d \sum_{j=i}^d \beta_{ij} x_i(n) x_j(n) + \sum_{i=1}^d \sum_{j=i}^d \sum_{k=j}^d \beta_{ijk} x_i(n) x_j(n) x_k(n) + \dots \quad (12)$$

其中:  $x(i)$  是输出信号,  $x(i)$  是输入信号的各个维度,  $d$  是输入信号的维数,  $\beta_0$  是常数项,  $\beta_i$  是一阶核函数

系数, 是二阶核函数系数,  $\beta_{ijk}$  是三阶核函数系数, 依此类推。高阶核函数则用于描述更高阶的非线性效应。

Volterra 级数的核函数具有明确的物理意义。一阶核函数描述了系统对单一输入信号的线性响应, 类似于线性系统中的脉冲响应函数。二阶核函数则描述了系统对两个不同时间点的输入信号的交互效应, 反映了系统的二阶非线性特性。类似地, 三阶及更高阶的核函数描述了更复杂的多输入信号之间的高阶交互效应<sup>[13]</sup>。

Volterra 级数的优点在于它能够在不假设系统具体结构的情况下, 有效地建模复杂的非线性行为。它通过多项式扩展的形式, 将系统的输入输出关系表示为一系列核函数的组合, 从而能够捕捉输入信号之间的高阶交互效应<sup>[14]</sup>。此外, Volterra 级数需要的样本数据较少, 拟合精度高, 且实现简单, 这也是本文采用 Volterra 级数改进 T-L 模型的原因。

由于核函数的数量和模型的阶数成指数函数关系, 当阶数较大时, 计算量急剧增加和函数系数辨识也非常困难。在实际工程中采取截断的 Volterra 级数, 就已经可以精确近似描述很多非线性系统<sup>[15]</sup>。本文采用二阶 Volterra 级数截断形式, 结合本文的输入输出数据, 表达形式如下:

$$X(n) = [x_1(n), x_2(n), x_3(n), x_4(n)] \quad (13)$$

$$B_{nl}(n) = \beta_0 + \sum_{i=1}^d \beta_i x_i(n) + \sum_{i=1}^d \sum_{j=i}^d \beta_{ijb} x_i(n) x_j(n) x + e \quad (14)$$

其中:  $B_{nl}$  为动态非线性干扰磁场,  $x_1(n)$  为横滚角,  $x_2(n)$  为俯仰角,  $x_3(n)$  为偏航角,  $x_4(n)$  为 T-L 模型补偿后的剩余磁场,  $e$  为高阶误差。

对于无人载体动态非线性磁场  $B_{nl}$ , 通过空间重构理论, 得到的嵌入维数  $m$  和延迟时间  $\tau$ 。使用延迟嵌入后的输入数据矩阵  $X_{\text{embedded}}$  代替式中的  $X(n)$  能够更好的捕捉系统的非线性动态行为:

$$X_{\text{embedded}}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) & x_1(n-\tau) & \cdots & x_1(n-(m-1)\tau) \\ x_2(n) & x_2(n-\tau) & \cdots & x_2(n-(m-1)\tau) \\ x_3(n) & x_3(n-\tau) & \cdots & x_3(n-(m-1)\tau) \\ x_4(n) & x_4(n-\tau) & \cdots & x_4(n-(m-1)\tau) \end{bmatrix} \quad (15)$$

为了建立 Volterra 级数模型, 需要将  $X_{\text{embedded}}$  构造成包含多阶项的输入矩阵  $\Phi$ , 如下:

$$\Phi(n) = [\Phi_{\text{const}}, \Phi_{\text{linear}}, \Phi_{\text{quadratic}}] \quad (16)$$

其中:  $\Phi_{\text{const}}$  为常数项, 用于模型中的偏置;  $\Phi_{\text{linear}}$  为一阶项, 直接取  $X_{\text{embedded}}$ , 可以描述无人机姿态变化(如俯仰、横滚、偏航)对磁场的线性影响;  $\Phi_{\text{quadratic}}$  为二阶项表示数据之间的耦合关系, 包括  $X_{\text{embedded}}$  中所有输入变量两两相乘的交叉项, 可以描述无人机姿态变化

之间的耦合效应, 例如, 俯仰和横滚同时变化时, 磁场干扰的非线性叠加效应。

将截断 Volterra 级数模型系统输出向量以及核函数表示为:

$$H(n) = [\beta_0, \beta_i, \beta_{ij}]^T \quad (17)$$

$B_{nl}(n)$  为输出向量;  $H(n)$  为 Volterra 级数的核函数。将输入矩阵和输出向量结合, 构造回归模型:

$$B_{nl}(n) = \Phi(n)H(n) + E(n) \quad (18)$$

由式可知, 最后需要做的就是确定的系统输入和输出的基础上确定 Volterra 级数的核函数向量  $H(n)$ 。

### 2.2 递推最小二乘法

为了解决最小二乘法计算时存在的病态问题和计算量较大的问题, 本文采用递推最小二乘法来求解核函数向量。递推最小二乘法的核心是利用先前的估计结果, 逐步更新回归系数  $H(n)$ <sup>[16]</sup>。

目标是通过递推方法最小化以下误差平方和:

$$J = \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} [B_{nl}(i) - \Phi(i)H(i)]^2 \quad (19)$$

其中:  $\lambda$  是遗忘因子, 用来控制历史数据的重要性, 可以降低旧数据的影响, 更好适应动态系统<sup>[17]</sup>。

由最小二乘法可得系统 Volterra 级数时域核向量为:

$$H(n) = [\Phi(n)^T \Phi(n)]^{-1} \Phi(n)^T B_{nl}(n) \quad (20)$$

将  $J$  对  $H$  求导并令导数为零, 得到参数估计值的公式:

$$H(n) = \left[ \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \Phi(i)^T \Phi(i) \right]^{-1} \left[ \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \Phi(i)^T Y(i) \right]^{-1} \quad (21)$$

引入协方差矩阵  $P(n)$ :

$$P(n) = \left[ \sum_{i=1}^n \lambda^{n-i} \Phi(i)^T \Phi(i) \right]^{-1} \quad (22)$$

将  $P(n)$  的定义改写为:

$$P(n) = \frac{1}{\lambda} \left[ \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{n-1-i} \Phi(i)^T \Phi(i) + \Phi(n)^T \Phi(n) \right]^{-1} \quad (23)$$

根据矩阵求逆公式, 因此:

$$P(n) = \frac{1}{\lambda} [P(n-1)^{-1} + \lambda \Phi(n)^T \Phi(n)]^{-1} \quad (24)$$

定义增益矩阵  $K(n)$ :

$$K(n) = P(n-1) \Phi(n)^T [\lambda + \Phi(n) P(n-1) \Phi(n)^T]^{-1} \quad (25)$$

利用  $K(n)$  更新参数  $H(n)$ :

$$H(n) = H(n-1) + K(n)[Y(n) - \Phi(n)H(n-1)] \quad (26)$$

预测误差  $Y(n) - \Phi(n)H(n-1)$  被用作反馈信号, 动态调整  $H(n)$ 。

通过上述推导, 可以看出计算核系数时无需矩阵求

逆，解决了最小二乘法计算时的矩阵病态问题，以递推的方式提高了整体的计算效率。

本算法流程图如图 1。

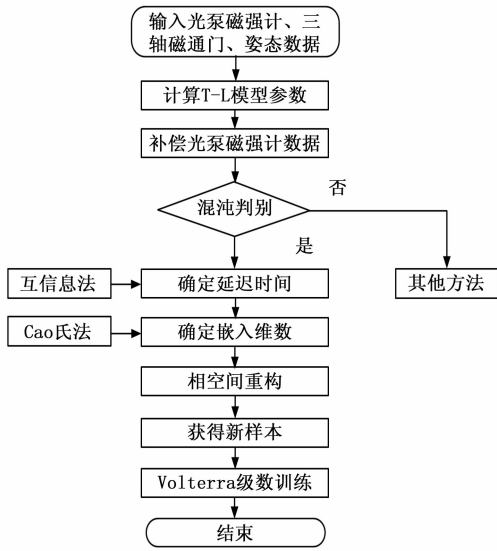


图 1 算法流程图

### 3 相空间重构理论

非线性动态系统普遍具有混沌特性，在实际的测量过程中，采用固定的飞行路线，使得采集到的磁场信号在整个路线中有一定的规律性；而无人机电机和电流为干扰磁场的主要成分，并且反映在机动过程中，在一个较小的时间尺度内，由于无人机飞行受环境等因素的影响又表现出随机性和波动性。这些复杂的因素导致采集到的磁场表现出混沌特性。为了深入分析这种混沌特性，需要在相空间中进行研究。相空间重构不仅是分析、判定和预测混沌时间序列的前提，更是精确的非线性建模过程中不可或缺的一环。通过合理选择嵌入维数和延迟时间，时间序列被嵌入到高维相空间中，从而揭示了隐藏在时间序列背后的系统非线性动态行为和混沌特性<sup>[18]</sup>。

根据 Takens 提出的嵌入定理，可以从一维混沌时间序列中重构一个与原动力系统在拓扑意义下一样的相空间，从而在某一分量的时间序列数据中提取和恢复出系统原来的规律。

对于剩余非线性干扰磁场的离散时间序列  $B_m(i), i = 1, 2, \dots, N$ ，通过延迟坐标重构的相空间结果为：

$$Y(i) = [B_m(i), B_m(i + \tau), \dots, B_m(i + (m - 1)\tau)] \quad (27)$$

式中， $Y(i)$  为相空间重构后第  $i$  个相点； $\tau$ 、 $m$  分别为延迟时间和嵌入维数； $i = 1, 2, \dots, M$ ；相点个数  $M = N - (m - 1)\tau$ 。

对于基于坐标延迟法的两个参数（延迟时间  $\tau$  以及

嵌入维数  $m$ ），一般使用自相关法、复自相关法和互信息法等方法求解，使用伪最邻近点法、Cao 方法和几何不变量法等方法计算最小嵌入维数。

#### 3.1 互信息法求延迟时间

本文采用互信息法求延迟时间，剩余非线性干扰磁场的时间序列  $B_m(i)$  和  $B_m(i + \tau)$  之间的互信息函数表示如式：

$$I(\tau) = \sum_{i=1}^N P[B_m(i), B_m(i + \tau)] \log_2 \frac{P[B_m(i), B_m(i + \tau)]}{P[B_m(i)]P[B_m(i + \tau)]} \quad (28)$$

其中： $P[B_m(i)]$  为点  $B_m(i)$  的概率密度， $P[B_m(i), B_m(i + \tau)]$  为点  $B_m(i)$  和  $B_m(i + \tau)$  的联合概率。互信息函数通常在某个延迟时间后出现局部极小值，并趋于平稳，因此本文延迟时间选取互信息函数的第一个局部极小值，避免了过短或过长的延迟时间导致的信息冗余或信息丢失<sup>[19]</sup>。

#### 3.2 Cao 氏法求嵌入维数

本文采用 Cao 氏法求最佳嵌入维数，Cao 氏法是一种基于“相空间重构”的方法，用于确定时间序列数据的最优嵌入维数。该方法通过计算每个时间点及其相邻点的距离比率，进而计算该比率的平均值，当嵌入维数增加到某个临界值后，距离比率不再显著变化，达到一个稳定值<sup>[20]</sup>。

对于式中的延迟坐标重构的相空间  $Y(i)$ ，计算每个时间点及其相邻点的距离比率通常采用欧几里得距离如式：

$$d(Y_i, Y_j) = \sqrt{\sum_{k=0}^{m-1} [B_m(i + k\tau) - B_m(j + k\tau)]^2} \quad (29)$$

然后计算  $E(m)$ ，即嵌入维数  $m$  下的距离比率，计算方法如式：

$$E(m) = \frac{1}{N - m\tau} a(i, m) \quad (30)$$

$$a(i, m) = \frac{d[Y_i^N(m + 1), Y_i(m + 1)]}{d[Y_i^N(m), Y_i(m)]} \quad (31)$$

其中： $Y_i(m)$  和  $Y_i^N(m)$  是  $m$  维重构相空间中的第  $i$  个矢量和  $Y_i(m)$  的最邻近点， $d[Y_i^N(m), Y_i(m)]$  是  $Y_i(m)$  与  $Y_i^N(m)$  之间的欧几里得距离。

在 Cao 氏法中，为了更好地理解嵌入维数的变化趋势，我们通常会计算，即  $E(m + 1)$  与  $E(m)$  的比值，如式：

$$E_1(m) = \frac{E(m + 1)}{E(m)} \quad (32)$$

刚开始  $E(m)$  较小，表示嵌入空间中的点较为密集，点之间的距离较小；随着嵌入维数的增大，点之间的距离逐渐增大， $E(m)$  开始增大；到了一定的嵌入维数时，点之间的相对距离开始趋于平稳，不再随着嵌入

维数的增加而有明显变化。

### 3.3 混沌特性识别

本文通过计算最大 Lyapunov 指数验证序列混沌特性, 传统的 Lyapunov 指数计算方法通常需要大量的计算, 特别是当数据量较大时, 计算的复杂度和计算资源要求也会显著增加。为了减小计算负担, 采用小数据量法计算最大 Lyapunov 指数, 其核心思想是通过局部的相空间点对距离变化来估算 Lyapunov 指数, 而不是计算所有点对的指数增长速率<sup>[21]</sup>。

假设对于每一对时间步  $i$  和  $j$ , 距离  $d(Y_i, Y_j)$  随着时间的增长变化, Lyapunov 指数可以通过如下公式计算:

$$\lambda = \frac{1}{\Delta t \log} \left[ \frac{d_i(Y_i, Y_j)}{d_i(Y_i, Y_j)} \right] \quad (33)$$

其中:  $d_i(Y_i, Y_j)$  是初始时刻的距离,  $d_i(Y_i, Y_j)$  是后续时刻的距离,  $\Delta t$  是时间步长。

若相邻点之间的距离随着时间的推移而增加, 则表示该时间序列具有混沌性, 即 Lyapunov 指数大于零。

### 4 试验验证

如图 2, 在标准的 FOM 飞行中, 飞行器需要按照特定的机动方式, 完成四个航向(北、东、南、西)的机动, 每个航向的机动动作包括  $\pm 5^\circ$  的侧滑(Yaw)、 $\pm 5^\circ$  的俯仰(Pitch)以及  $\pm 10^\circ$  的侧滚(Roll)。每个姿态动作持续时间为 5 至 10 s, 并且每组姿态之间有 5 s 的平飞(Flat), 以确保系统稳定并恢复到初始状态。FOM 飞行方案通过这些机动动作产生的数据可以有效反映飞行器在不同姿态下的磁场干扰, 从而为补偿算法提供必要的数据支持。

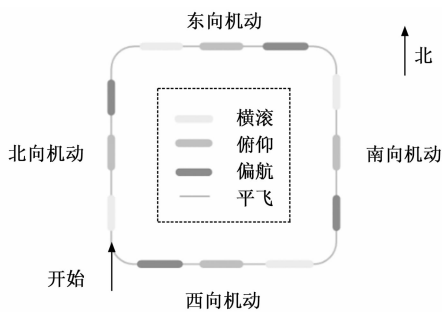


图 2 标准的 FOM 飞行示意图

由于多旋翼无人机在操控方式和飞控算法方面存在较大差异, 传统的 FOM 飞行方案在多旋翼无人机上的应用受到一定限制。多旋翼无人机的飞控系统使其具备自主调整姿态的功能, 然而这也导致了其姿态变化的幅度相对较小, 无法像固定翼无人机那样在四个航向上完成大幅度的姿态动作。这使得多旋翼无人机难以严格执行标准的 FOM 飞行要求, 进而影响了磁场补偿精度。

因此本文针对大疆的 RTK350 型号四旋翼无人机本文设计了一种改进的原地机动飞行方案, 如图 3。该方案通过让四旋翼无人机在一定高度上悬停, 并在原地分别完成 4 个航向上的一系列机动动作来模拟飞行中的磁场变化。在本研究中, 航向的设置并不要求严格按照预定的特定方向进行调整, 而是通过随机选择航向来增加实验的多样性和复杂性。这种做法有助于模拟真实应用中的不确定性和变化条件, 从而更全面地评估算法在不同场景下的适应性和稳定性, 进一步验证算法在实际应用中的泛化能力。每个航向之间的切换速度约为  $30^\circ/s$ , 以保证平稳过渡。在每个航向上, 旋翼无人机会进行 2 至 5 次  $\pm 10^\circ$  至  $\pm 30^\circ$  的横滚、俯仰和偏航动作, 每个姿态之间的间隔为 1 秒左右, 机动动作的持续时间为 2 至 6 s。该飞行方案能有效模拟飞行过程中的磁场扰动, 并为补偿算法提供更为有效的磁场数据。

通过这一改进的飞行方案, 四旋翼无人机能够在原地完成多次机动动作, 模拟不同航向和姿态下的磁场干扰, 还恰好满足了 T-L 模型中对地磁场恒定不变的假设, 能够进一步实现精确的磁场补偿。

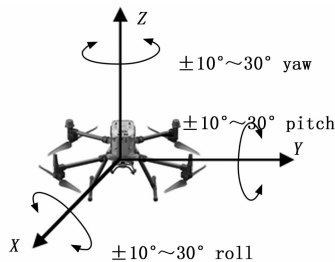


图 3 原地四向机动示意图

无人机搭载了航磁采集系统、IMU、磁通门以及光泵磁强计, 系统的采样率为 20 Hz, 布局如图 4。本系统采用横杆结构将航磁采集补偿系统安装在无人机底部。横杆采用无磁材料制成, 以避免对航磁传感器产生干扰。为了减少无人机机身及电机等因素对磁传感器的影响, 本系统将光泵磁力仪安装在了横杆上的最远端。三轴磁通门传感器和光泵磁强计被布置在无人机的同一侧, 另一侧则安装了配重模块, IMU 则被封装在了无人机底部的采集模块中。这种设计不仅确保了航磁采集设备的稳定安装, 还能有效平衡无人机的重心, 防止其

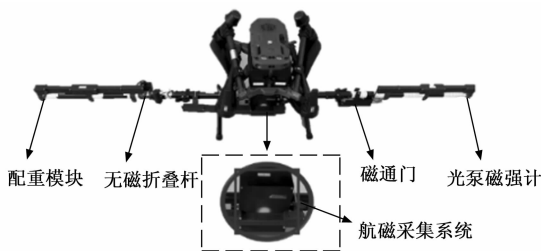


图 4 无人机航磁测量系统

在执行飞行任务时因负载不均而影响飞行姿态和稳定性。通过这种对称布局，系统能够在复杂飞行环境中保持高精度的数据采集能力，同时提升无人机的操控性和安全性。

航磁数据的采集需要选取一片磁场相对稳定的区域，减少环境因素对采集到数据的影响，本文选定测试区域为 100 m×100 m，使用网格化插值的方法来生成磁图，具体方法为：在经纬度范围内生成 500×500 的网格点，再使用二维二次多项式拟合模型计算每个网格点的磁场强度值，生成的磁图及磁场梯度如图 5。在图中可以看出测试区域的磁场强度分布呈现出较为均匀的特点，尤其是在西南角区域，磁场强度的变化范围较小，介于 54 454 至 54 458 nT 之间。这种小幅度的磁场波动表明该区域的磁场环境相对稳定，能够有效降低外界干扰对数据采集的影响。此外，该区域的磁场梯度变化范围也较为平缓，约为 50 至 100 nT/km，进一步证明了其磁场环境的稳定性。磁场梯度是衡量磁场变化率的重要指标，较低的梯度值意味着磁场在空间上的变化较为缓慢，这片区域的磁场也较为稳定。

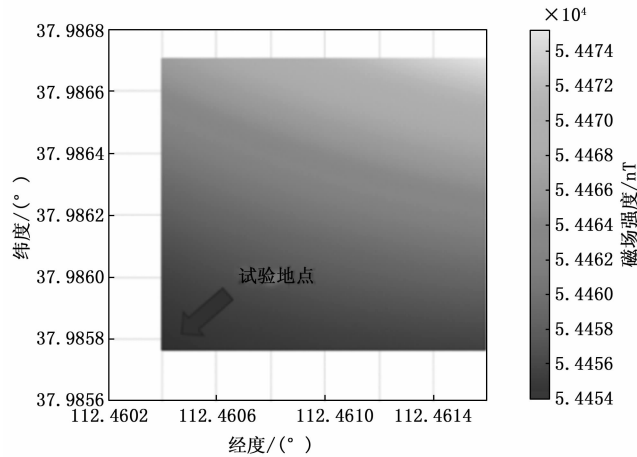


图 5 磁场强度分布图

本文通过改善比的变化来确定遗忘因子，经过多次试验，本文选取  $\lambda=0.96$  作为遗忘因子，在这个遗忘因子下，改善比最大，补偿效果最好。然后采用互相标定补偿的方法，通过交叉验证的方式来验证算法的泛化能力和补偿效果，因此试验设计采集了两组数据：L1 和 L2。两组数据光泵磁强计的原始数据如图 6、图 7。互相标定补偿的过程包括两个步骤：首先使用 L1 数据集进行模型参数的标定，利用这些参数对 L1、L2 的数据进行补偿处理；接下来，重复上述过程，但这次是使用 L2 数据集进行模型参数的标定，标定后的模型参数被用于对 L1、L2 的数据进行补偿处理。通过计算，L1、L2 的光泵数据剩余非线性干扰磁场的时间序列的最大 Lyapunov 指数为 0.210 2 和 0.796 8，说明该时间序具

有混沌性。

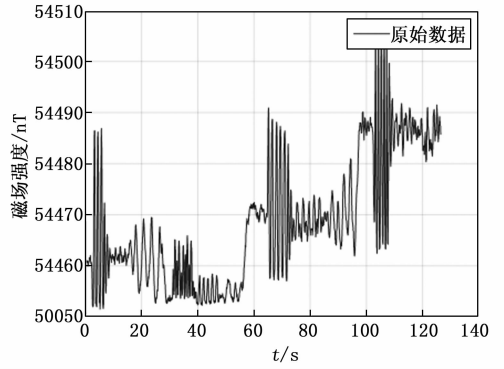


图 6 L1 光泵原始数据

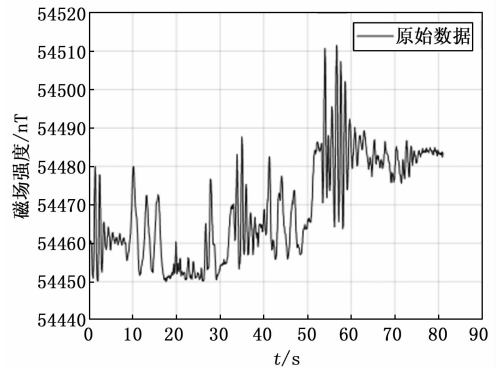


图 7 L2 光泵原始数据

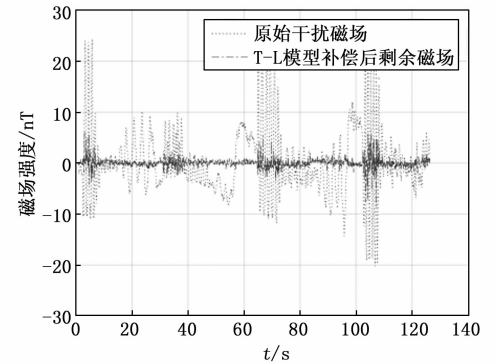


图 8 L1 数据补偿后剩余磁场

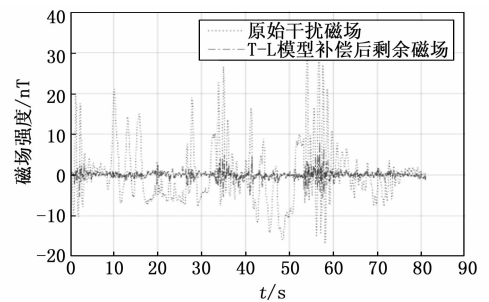


图 9 L2 数据补偿后剩余磁场

使用 T-L 模型补偿后的结果如图 8、图 9，可以看出绝大部分磁场已经被补偿掉。但是从磁场数据看，

T-L 模型补偿后的剩余磁场仍与因机动产生的磁场有一定关系; 从姿态数据看, T-L 模型补偿后的剩余磁场与无人机姿态有很大关系如图 10、图 11。

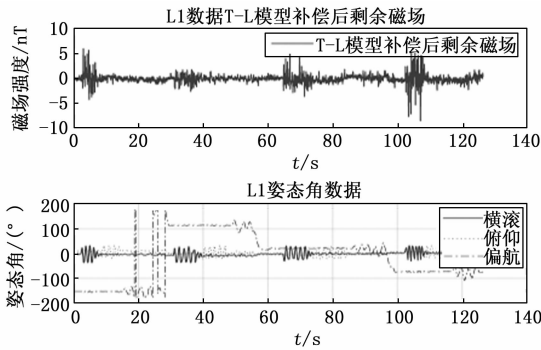


图 10 L1 姿态角与 T-L 模型补偿后剩余磁场关系

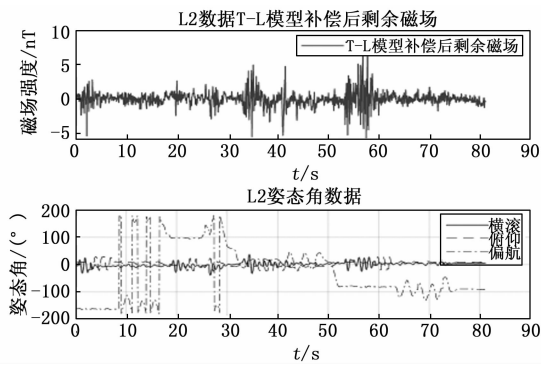


图 11 L2 姿态角与 T-L 模型补偿后剩余磁场关系

使用互信息法对 L1 光泵磁场数据计算延迟时间, 计算结果如表 1。可以看出,  $\tau$  在 21 处取得第一个极小值, 因此选择延迟时间为 21。

表 1 平均互信息和延迟时间对应关系表

延迟时间	平均互信息	延迟时间	平均互信息	延迟时间	平均互信息
1	0.330 5	11	0.133 1	21	0.086 8
2	0.156 7	12	0.134 2	22	0.102 1
3	0.142 9	13	0.117 0	23	0.098 3
4	0.159 8	14	0.122 5	24	0.092 2
5	0.151 6	15	0.120 9	25	0.091 9
6	0.140 7	16	0.134 3	26	0.093 9
7	0.134 8	17	0.111 2	27	0.103 6
8	0.136 2	18	0.134 9	28	0.110 3
9	0.133 5	19	0.140 6	29	0.098 1
10	0.143 5	20	0.105 8	30	0.095 4

使用 Cao 氏法对 L1 光泵磁场数据计算嵌入维度, 计算结果如表 2。可以看出, E1 在嵌入维度为 8 的时候趋于饱和, 因此选择嵌入维数为 8。

对 L1 数据 T-L 模型补偿后的剩余磁场, 使用计算出来的延迟时间和嵌入维度对 Volterra 级数模型的输入变量进行相空间重构, 更好的激发出输入参数的非线性

特性, 再输入 Volterra 级数模型进行非线性建模, 再使用得到的模型对 L2 数据 T-L 模型补偿后的剩余磁场进行二次补偿, T-L 模型和 Volterra-T-L 模型补偿的剩余磁场对比图如图 14。

表 2 E1 和嵌入维数关系表

嵌入维数	E1	嵌入维数	E1
1	0.515 9	11	0.999 5
2	0.740 7	12	0.999 9
3	0.924 0	13	0.999 7
4	0.975 8	14	0.100 2
5	0.990 0	15	0.100 6
6	0.995 9	16	0.101 1
7	0.997 9	17	0.101 3
8	0.998 6	18	0.101 9
9	0.998 5	19	0.102 1
10	0.999 2	20	0.102 5

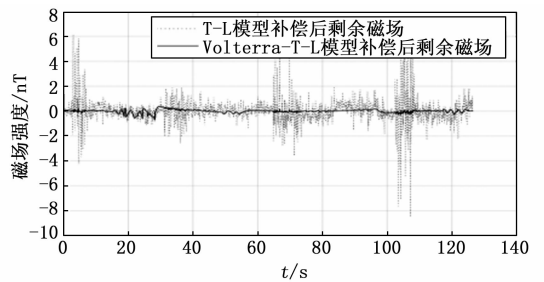


图 12 L1 训练模型补偿 L1 数据

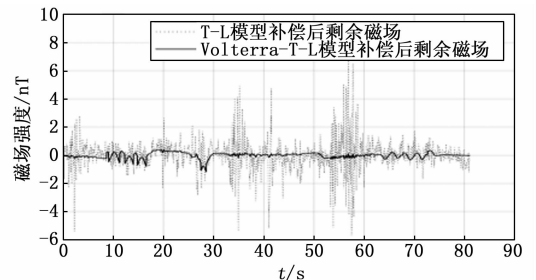


图 13 L1 训练模型补偿 L2 数据

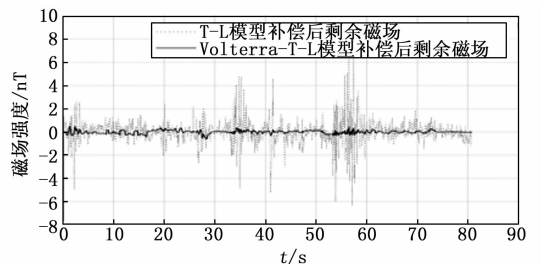


图 14 L2 训练模型补偿 L2 数据

为了验证模型的泛化性, 对 L2 数据 T-L 模型补偿后的剩余磁场使用 Volterra 级数模型进行非线性建模, 再使用得到的模型对 L1 数据 T-L 模型补偿后的剩余磁场进行二次补偿, T-L 模型和 Volterra-T-L 模型补偿的剩余磁场对比图如图 15。

表 3 补偿效果对比表

	L1 T-L 模型补偿 L2 数据	L2 T-L 模型补偿 L1 数据	L1 改进模型补偿 L1 数据	L1 改进模型补偿 L2 数据	L2 改进模型补偿 L1 数据	L2 改进模型补偿 L2 数据
补偿前标准差/nT	13.145 1	12.214 9	12.214 9	13.145 1	12.214 9	13.145 1
补偿后标准差/nT	1.096 3	1.062 1	0.236 8	0.247 5	0.400 5	0.407 9
改善比	11.990 4	11.500 7	53.829 5	53.111 5	30.499 1	29.941 3

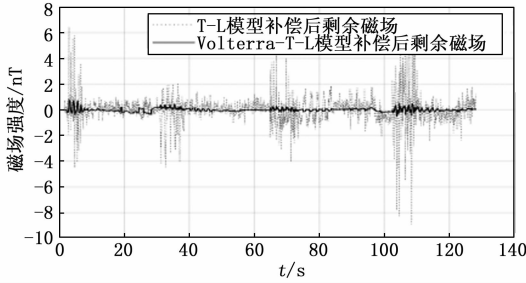


图 15 L2 训练模型补偿 L1 数据

在航磁补偿领域，标准差和改善比是两个常用的衡量数据噪声和补偿算法效果的重要指标。标准差通常用于衡量补偿前后航磁数据中的噪声水平，反映了数据的离散性和不确定性；改善比用于评估补偿算法的效果，帮助判断算法是否有效减少了数据中的噪声和偏差，从而提高数据的精度。具体而言，标准差越小，表明补偿后剩余的干扰磁场越少，补偿效果越好，改善比越大，说明补偿后磁场干扰的降低程度越高，即补偿效果越显著。

表 3 展示了不同补偿模型对两组数据 (L1 和 L2) 的处理效果对比。从表中可以看出，无论是使用传统的 Tolles-Lawson (T-L) 模型还是改进后的模型，补偿后的标准差均显著降低，表明补偿算法在减小磁场干扰方面具有显著效果。L1 数据经过 T-L 模型补偿后，标准差从 13.145 1 nT 降低到 1.096 3 nT，改善比为 11.990 4；而 L2 数据经过 T-L 模型补偿后，标准差从 12.214 9 nT 降低到 1.062 1 nT，改善比为 11.500 7。这表明 T-L 模型在补偿磁场干扰方面具有一定的效果，但改善比相对较低。相比之下，改进模型的表现更为优异。经过 L1 改进模型补偿后，标准差均大幅降低到 0.24 nT 左右，改善比高达 53；经过 L1 改进模型补偿后，标准差均降低到 0.4 nT 左右，改善比约为 30。这表明改进模型在补偿精度和稳定性方面显著优于传统的 T-L 模型，尤其是在 L1 数据上，改善比提升了近 4 倍。由于无人机的飞行任务由人工控制，飞行过程中每条测线数据会存在一定的随机性，这导致不同测线训练得到的补偿网络效果有所差异。

总的来说，这些结果表明，结合 T-L 模型和 Volterra 级数的磁场补偿方法在减少噪声和改善数据质量方面是有效的，并且具有一定的稳定性和泛化能力。

### 5 结束语

本文通过分析无人机电体动态非线性磁场的混沌性，针对无人机姿态、T-L 模型补偿后磁场的时序进行了相空间重构。引入基于递推最小二乘法识别的 Volterra 级数模型，剔除了 Volterra-T-L 模型的磁补偿方法，并采用实际飞行数据对算法进行了验证。实验结果表明，该方法显著减少磁场数据中的干扰磁场，提高数据的精度，且具有较好的鲁棒性，能够在不同的测线数据上保持良好的补偿效果。

### 参考文献：

- [1] CHEN K, LIANG C W, LIU X M, et al. Comparison of geomagnetic aided navigation algorithms for hypersonic vehicles [J]. Journal of Zhejiang University-SCIENCE A, 2020, 21 (8): 1-11.
- [2] 毕凤仪. 基于旋翼无人机的航磁测量系统磁干扰补偿技术研究 [D]. 吉林: 吉林大学, 2024.
- [3] YONGQIANG F, QIMAO Z, YAOXIN Z, et al. An improved aeromagnetic compensation method robust to geomagnetic gradient [J]. Applied Sciences, 2022, 12 (3): 1490-1490.
- [4] 高全明. 固定翼无人机航磁三分量系统误差校正与干扰补偿技术研究 [D]. 吉林: 吉林大学, 2020.
- [5] ZHANG C, DU C, PENG X, et al. A modified aeromagnetic compensation method robust to the motion state of aviation platform part [J]. Sensors Journal, 2023, 23 (12): 12702-12710.
- [6] TOLLES W E, LAWSON J D. Magnetic compensation of MAD equipped aircraft [R]. New York: Airborne Instruments Lab. Inc., 1950.
- [7] 刘宇欣, 李雯, 魏东岩, 等. 一种顾及舱内 OBE 干扰的改进航磁补偿方法 [J]. 导航定位与授时, 2024, 11 (4): 38-46.
- [8] ZHANG D, LIU X, QU X, et al. Analysis of aeromagnetic swing noise and corresponding compensation method [J]. Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2022 (60): 1-10.
- [9] YUAN Z F, et al. Enhanced aeromagnetic compensation models for magnetic anomaly target detection [J]. Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2024 (62): 1-13.

- [10] JIAN G, WENJIE W, HAOBIN D, et al. Suppression of the negative effect of abnormal data based on the Hough transform and application to the magnetic compensation of airborne optically-pumped magnetometer data [J]. *The Review of Scientific Instruments*, 2019, 90 (11): 115103.
- [11] WILLIAMS P M. Aeromagnetic compensation using neural networks [J]. *Neural Computing & Applications*, 1993, 1 (3): 207-214.
- [12] 王旻忆, 李治军. 基于小波的 Volterra 模型对黄河源区径流混沌预测的研究 [J]. *吉林水利*, 2023 (8): 12-16.
- [13] BIE Z, LIU J, CHEN L. Nonlinear behavioral analysis of diode model using Volterra series [J]. *Microwave and Optical Technology Letters*, 2024, 66 (7): 1-8.
- [14] 吴立勋. Volterra 级数模型辨识算法的改进研究 [J]. *电子测试*, 2022 (3): 101-103.
- [15] 舒 涛, 路昊天, 曹景轩, 等. 基于混沌理论的降水量预测方法研究 [J]. *灌溉排水学报*, 2022, 41 (3): 83-91.
- [16] 赵可沧, 江境宏, 邓 进, 等. 基于遗忘因子递推最小二乘法的锂电池等效电路模型参数辨识方法 [J]. *电子测量技术*, 2022, 45 (23): 53-58.
- [17] 李雪艳, 赖煜山, 刘 恩, 等. 基于 Volterra 级数和递推最小二乘法的结构振动响应非线性特征和损伤识别 [J/OL]. *计算力学学报*, 1-10 [2025-03-24]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/21.1373.o3.20240422.1732.005.html>.
- [18] 朱莉娜. 基于混沌理论和 RBF 神经网络算法的风电功率预测研究 [J]. *互联网周刊*, 2024 (22): 22-25.
- [19] 徐海龙, 乔书波, 林家乐. 利用混沌特性和 Volterra 自适应算法的极移短期预报 [J/OL]. *武汉大学学报 (信息科学版)*, 1-12 [2025-03-24]. <https://doi.org/10.13203/j.whugis20200505>.
- [20] 李桂毅, 郭铭宇, 张洪海, 等. 基于混沌理论的区域航路网络交通状态预测 [J]. *航空计算技术*, 2020, 50 (1): 61-66.
- [21] 张翌娜, 程梦然, 王立彬, 等. 泵站管道混沌振动短期预测分析 [J]. *水电能源科学*, 2019, 37 (10): 80-84.
- (上接第 120 页)
- [8] 陈 伟, 涂 钊, 刘建宏, 等. 基于油电混动六旋翼无人机的模糊 PID 飞行控制策略研究 [J]. *重庆交通大学学报 (自然科学版)*, 2024, 43 (8): 124-132.
- [9] 樊轶伦, 陈 蕾, 张本科, 等. 基于多传感器的无人机配电网架空线路自主巡检和姿态控制 [J]. *电测与仪表*, 2024, 61 (8): 186-194.
- [10] 李胜铭, 邱世豪, 吕宗阳, 等. 基于扰动观测器的四旋翼无人机自适应姿态控制方法 [J]. *实验室研究与探索*, 2024, 43 (3): 1-5.
- [11] 刘传荣, 潘亦鹏, 丘仲锋. 跨介质固定翼无人机水面滑跃起飞及姿态控制系统 [J]. *科学技术与工程*, 2024, 24 (29): 12773-12780.
- [12] 陈晓雷, 仇思超, 张开碧, 等. 迭代学习的四旋翼无人机重复航迹跟踪控制实验研究 [J]. *现代电子技术*, 2024, 47 (4): 97-102.
- [13] 祝文星, 王立辉, 田栢苓. 基于有限时间观测器的四旋翼无人机积分滑模控制方法 [J]. *中国惯性技术学报*, 2023, 31 (12): 1244-1253.
- [14] 梁 吉, 王立松, 黄昱洲, 等. 基于深度强化学习的四旋翼无人机自主控制方法 [J]. *计算机科学*, 2023, 50 (S2): 13-19.
- [15] 陈改改, 刘小雄, 聂铭涛, 等. 基于增量动态逆的协同轨迹控制方法研究 [J]. *飞行力学*, 2024, 42 (1): 70-76.
- [16] 桂 洋, 郑柏超, 高 鹏. 基于 NESO-LFDC 的四旋翼无人机滑模姿态控制 [J]. *系统工程与电子技术*, 2024, 46 (3): 1075-1083.
- [17] 於怿丰, 任思维, 张鑫帅, 等. 基于数据驱动模型预测控制的无人机轨迹跟踪方法 [J]. *兵器装备工程学报*, 2024, 45 (11): 272-282.
- [18] 禹志龙, 李颖晖, 裴彬彬, 等. 具有飞行包线限制的飞翼无人机鲁棒自适应容错姿态控制 [J]. *兵工学报*, 2024, 45 (1): 231-240.
- [19] 刘泽群, 周 军, 郭宗易, 等. 基于领航状态估计的多无人机耦合协同编队控制 [J]. *北京理工大学学报*, 2023, 43 (6): 623-632.
- [20] 曹 凯, 朱 勇, 高 强, 等. 深度强化学习在自动控制领域研究现状与展望 [J]. *排灌机械工程学报*, 2023, 41 (6): 638-648.
- [21] 杨小强, 郭玉英. 基于 BPNN 参数整定的四旋翼吊挂自抗扰飞行控制 [J]. *飞行力学*, 2023, 41 (3): 47-53, 60.
- [22] 季海宁, 陈 谋, 雍可南. 无人机非确定性等价自适应容错飞行控制 [J]. *控制理论与应用*, 2024, 41 (4): 587-596.
- [23] 左 玲, 张翔伦, 李志宇, 等. 基于自抗扰方法的无人机控制律设计 [J]. *北京航空航天大学学报*, 2024, 50 (5): 1512-1522.
- [24] 刘 勇, 杨 浩, 盘宏斌, 等. 基于改进线性自抗扰的四旋翼无人机姿态控制 [J]. *电光与控制*, 2023, 30 (7): 8-14.
- [25] 徐小平, 刘宣廷, 安 凯, 等. 多高超声速滑翔飞行器协同避障轨迹规划研究 [J]. *中南大学学报 (自然科学版)*, 2024, 55 (10): 3742-3755.