

基于飞行弹道仿真的中型液体运载火箭 核心战标评估方法研究

蔡文炳¹, 秦留洋², 韩惠婕²

(1. 北京跟踪与通信技术研究所, 北京 100094;

2. 北京航天测控技术有限公司, 北京 100041)

摘要: 中型液体运载火箭坚持“无毒、无污染、低成本、高可靠”原则, 逐渐成为中国未来高轨大中型有效载荷发射的主力火箭; 针对中型液体运载火箭核心性能指标和任务完成能力评估困难的问题, 采用基于飞行弹道仿真的方法进行打靶仿真验证; 通过对运载火箭飞行过程三自由度模型进行研究, 构建中型液体运载火箭多学科弹道模型, 创建火箭装备核心战标评估体系和数据体系, 采用基于蒙特卡洛的多偏差仿真的技术方法, 对中型液体运载火箭运载能力、入轨精度、残骸散布等核心战标进行评估计算和综合分析; 搭建中型液体运载火箭评估系统软件平台对仿真评估方法进行验证; 经实验测试实现了典型型号液体运载火箭仿真飞行过程建模和多偏差下的综合指标计算与结果生成。

关键词: 中型液体运载火箭; 三自由度弹道建模; 蒙特卡洛多偏差仿真; 运载能力; 入轨精度; 残骸散布

Research on Evaluation Method for MLLV Key Technical Indexes

CAI Wenbing¹, QIN Liuyang², HAN Huijie²

(1. Beijing Institute of Tracking and Communication Technology, Beijing 100094, China;

2. Beijing Aerospace Measurement and Control Technology Co., Ltd., Beijing 100041, China)

Abstract: Due to the principles of non-toxic, pollution-free, low-cost and high-reliability, medium liquid launch vehicles (MLLVs) are gradually becoming main rockets for Chinese high-orbit large and medium-sized payload launches in the future. Considering difficult evaluation on key indexes and task completion ability for the MLLV, this paper verifies target shooting based on trajectory simulation method, builds multi-subject model of the MLLV using 3 degrees of freedom (DOF) flight model during the flight process of launch vehicle, establishes a key technical index evaluation system and data system for rocket equipment, and applies Monte Carlo multi-deviation simulation to assess and analyze carrying capacity, orbit accuracy and wreckage distribution. The simulation assessment method is verified by building the evaluation system for the MLLV. After experimental testing, it achieves comprehensive index calculation and result generation for simulation flight process modeling of typical liquid launch vehicles under multiple deviations.

Keywords: MLLV; 3-DOF trajectory model; Monte Carlo multi-deviation simulation; carrying capacity; orbit accuracy; wreckage distribution

0 引言

液体运载火箭作为进入太空的主要工具, 其能力评估对于航天技术的发展至关重要。随着载人月球探测、深空探测等重大工程的实施, 各国进入空间的需求快速增长。预计到 2050 年, 全球进入空间的规模将达到 13

万吨, 超过当前运载能力两个数量级^[1]。在这样的背景下, 液体运载火箭的能力评估不仅是技术进步的体现, 也是国家安全和经济发展的重要保障。

在中大型高轨卫星高密度发射急需的背景下, 在三子级基础上通过组合化设计形成了新一代中型高轨三级液体捆绑式运载火箭。作为新一代无毒无污染航天运输

收稿日期:2024-07-14; 修回日期:2025-02-08。

作者简介:蔡文炳(1988-),男,硕士,助理研究员。

引用格式:蔡文炳,秦留洋,韩惠婕. 基于飞行弹道仿真的中型液体运载火箭核心战标评估方法研究[J]. 计算机测量与控制, 2025, 33(3):302-312.

主力装备, 地球同步转移轨道运载能力可达 7 t, 填补了中国地球同步转移轨道 5.5~7 t 之间运载能力的空白, 具备一箭一星和一箭双主星发射能力。

液体运载火箭的能力评估涉及到火箭的设计、制造、发射和运营等多个方面。随着航天技术的不断进步, 液体运载火箭的性能也在不断提升。评估这些火箭的能力, 可以帮助我们更好地理解其技术状态, 预测未来的发展趋势, 并为未来的航天任务提供技术支持。此外, 随着商业航天的兴起, 液体运载火箭的能力评估也成为了市场竞争的关键因素。

美国、欧洲和俄罗斯等国家和地区在液体运载火箭领域有着深厚的技术积累和丰富的实践经验。美国的 SpaceX 公司通过其 Falcon 9 火箭展示了可重复使用技术的巨大潜力, 而欧洲的 Ariane 系列火箭也在不断进行技术更新和升级^[2]。在中国, 液体运载火箭技术也取得了显著进展, CZ-3A 系列运载火箭的成功发射标志着中国在液体运载火箭领域的重要成就^[3]。

基于飞行弹道仿真的液体运载火箭核心战标评估就是通过构建运载火箭的空间飞行弹道基础动力学微分方程, 通过参数优化方法构建精细化学科方程, 从而计算得到运载火箭的核心运动学参数, 以火箭的整个飞行时序为引导, 计算在航天器入轨阶段的运载火箭综合能力。

为提高弹道模型计算的准确性和仿真结果的真实性, 突破基于有限试验数据的局限, 通过蒙特卡洛多偏差仿真方法, 设计大样本量仿真数据, 以多元统计分析为手段, 获取中型液体运载火箭的核心战标最终评估结果。

1 中型液体运载火箭三自由度弹道模型

1.1 运载火箭三自由度弹道模型

运载火箭是一类极为复杂的大规模系统^[4], 运载火箭的弹道计算从物理意义上来说是对火箭在空间中的复合运动进行模型构建, 求解相应的运动学参数。

根据是否考虑火箭箭体在空间中的旋转, 可以将运载火箭的弹道模型分为三自由度模型和六自由度模型, 对于火箭的运载能力和入轨精度等指标的评估, 其绕质心旋转的受力和运动模型影响可忽略不计, 为便于理解和弹道计算实施, 以理想化的空间内质点运动作为弹道模型的创建依据, 以三自由度运动作为运载火箭的运动模式, 实现运载火箭的弹道通用模型构建。在忽略执行机构的控制力对火箭的旋转的影响之后, 火箭的核心运动学参数如表 1 所示。

下面根据变质量质点系在惯性坐标系中的质心动力学矢量方程基础形式, 构建运载火箭在空间中的动力学方程:

$$m \frac{d^2 r_{c,m}}{dt^2} = F + F'_k + F'_{rel} \quad (1)$$

表 1 运载火箭三自由度模型参数表

参数	参数含义
v_x	发射系下火箭质心 x 轴方向速度矢量
v_y	发射系下火箭质心 y 轴方向速度矢量
v_z	发射系下火箭质心 z 轴方向速度矢量
x	发射系下火箭质心 x 轴方向位置矢量
y	发射系下火箭质心 y 轴方向位置矢量
z	发射系下火箭质心 z 轴方向位置矢量
φ	发射惯性系下火箭实时俯仰角
ψ	发射惯性系下火箭实时偏航角
λ	发射惯性系下火箭实时滚动角
φ_T	发射系下火箭实时俯仰角
ψ_T	发射系下火箭实时偏航角
λ_T	发射系下火箭实时滚动角
θ	火箭实时速度倾角
σ	火箭实时航迹偏航角
α	火箭实时攻角
β	火箭实时侧滑角
ν	火箭实时倾侧角
r	火箭质心实时距地心距离矢量
φ	箭下点地心纬度
R	箭下点实时距地心距离矢量
h	火箭质心实时距地表高度矢量
V	火箭质心实时合速度矢量
m	火箭实时质量

其中: F 为质点系所受综合外力, 按照三自由度运载火箭实际的运动模式, 综合外力包含重力 (即引力)、气动力和推力:

$$F = mg + R + P \quad (2)$$

F'_k 为质点系所受附加哥氏力; F'_{rel} 为质点系所受附加相对力。

1.2 发射系下火箭动力学方程一般形式

在进行弹道计算和实际工程应用中, 采用发射坐标系作为火箭动力学微分方程的适用坐标系, 可以简化复杂的转换和影响要素。

发射坐标系为一动参考系, 其相对于惯性坐标系以角速度 ω_e 转动。在该坐标系下, 定义局部导数的矢量求导法则:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial t} + \omega_e \times r \quad (3)$$

则式 (1) 可表示为:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + 2m\omega_e \times \frac{\partial r}{\partial t} + m\omega_e \times (\omega_e \times r)$$

$$m \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = P + R + mg + F'_k + F'_{rel}$$

$$F'_{rel} = - \left[m\omega_e \times (\omega_e \times r) + 2m\omega_e \times \frac{\partial r}{\partial t} \right] \quad (4)$$

式 (4) 按照等式的项进行划分, 包括等号左侧为求解的相对加速度、等号右侧为火箭在发射坐标系下的

综合受力, 依次为推力、气动力、引力、附加哥氏力、相对附加力 (包括离心惯性和哥氏惯性)。

1.3 弹道方程求解

下面针对方程中的各项进行逐项求解。根据不同的受力情况, 选取不同的坐标系进行表示和求解, 再根据坐标系的转换关系统一转换到发射坐标系, 完成弹道方程的求解。

1) 相对加速度计算:

在发射系下, 相对加速度在量值和方向上, 为发射系下分速度矢量的一阶全局微分, 是发射系下位置矢量的二阶全局微分:

$$\frac{\delta^2 r}{\delta t^2} = \begin{bmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

2) 推力计算:

推力作用于弹体方向, 采用弹体坐标系描述最为直观和简单, 再根据转换矩阵 G_D^T 定义的坐标转换关系进行转换, 得到发射系下的推力结果:

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = G_D^T P_D = G_D^T \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$P = -\bar{m}u_e + S_e(p_e - p)$$

其中: $\bar{m} = \left| \frac{dm}{dt} \right|$ 为当前阶段燃烧剂和氧化剂的秒消耗量, 火箭的实时质量为 $m = m_0 - \bar{m}t$; u_e 为当前工作发动机的海平面比冲; S_e 为发动机喷口截面面积; p_e 为喷口截面燃气静压平均值; p 为火箭所处高度的大气压。

由于液体发动机实际工程模型极为复杂, 在动力系统模型中对小偏差修正模型根据工程实践进行简化模拟和拟合, 采用“启动段+平均推力+关机段”来近似工程中的实际推力曲线。通过结合典型型号液体运载火箭实际情况, 构建分段推力插值表, 真实有效的模拟动力系统的推力情况。

其中: 平均推力段为发动机的稳定输出阶段, 采用式 (6) 进行计算。启动段和关机段构建如表 2~3 所示的分段推力插值表, 真实模拟动力系统的推力情况。

表 2 推力启动段插值表

序号	时间/s	推力/kN
1	1.0	0
2	1.5	50
3	2.0	1 000
4	2.5	1200
5	3.0	1 220
...

表 3 推力关机段插值表

序号	时间/s	推力/kN
1	1.0	40
2	1.5	20
3	2.0	10
4	2.5	7
5	3.0	0
...

3) 气动力计算:

当火箭与大气有相对运动时, 大气会对火箭表面形成作用力。气动力在弹体坐标系中描述最为直观和简单, 再根据转换矩阵 G_D^T 定义的坐标转换关系进行转换, 得到发射系下的气动力结果:

$$R = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} = G_D^T R_D = G_D^T \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中: X_B 、 Y_B 、 Z_B 为阻力、升力与侧力。

飞行器飞行过程中气动系数并不是一成不变的, 尤其对于多级火箭来说, 各级飞行过程中气动系数差别很大。因此, 气动模型采用树型数据结构封装气动数据, 飞行过程由于飞行器形状改变而引起的不同的气动模型, 每时刻仅有一个部段模型处于激活状态, 气动模型最终输出的气动力信息由激活的部段提供。气动特性模型使用气动特性数据构成可计算当前飞行状态下火箭所受到的外部气动力数值。

$$\begin{cases} X_B = -CA \cdot Q \cdot S \\ Y_B = CN \cdot Q \cdot S \\ Z_B = CZ \cdot Q \cdot S \end{cases} \quad (8)$$

其中: Q 为动压; S 为运载火箭的主横截面积。

下式给出了动压和马赫数的计算模型:

$$\begin{cases} Q = \frac{1}{2} \rho V_{rwd}^2 \\ V_{rwd} = V - V_{wind} \\ Ma = \frac{V}{V_a} \end{cases} \quad (9)$$

轴向力系数 CA 、法向力系数 CN 、侧向力系数 CZ 采用插值方法进行计算。在实际应用计算中, 由于正常工况下, 侧向力对弹道影响微小, 因此只需要对轴向力系数 CA 和法向力系数 CN 进行计算。气动力系数的插值变量包括马赫数 Ma 和火箭实时高度 H , 如表 4~5 所示。

4) 引力计算:

由于地球为形状复杂的非均质物体, 需要引入带谐系数进行修正。考虑到地球的自转, 火箭质点的引力求解方法为:

表 4 轴向力系数插值表

$Ma \backslash H$	0 km	20 km	40 km	60 km
1.00	2.5	2.5	2.7	3.0
2.00	2.5	2.6	2.7	2.9
3.00	1.8	1.8	2.0	2.1
4.00	1.5	1.5	1.6	1.8
5.00	1.3	1.3	1.5	1.5
6.00	1.1	1.1	1.2	1.3
7.00	0.9	1.0	1.1	1.1
8.00	0.9	0.9	1.0	1.0

表 5 法向力系数插值表

Ma	CN/α	备注
1.00	0.33	法向力系数与当前火箭攻角有关, CN 关于攻角 α 的导数在 Ma 一定时是定值, 本表给出导数对 Ma 插值结果
2.00	0.31	
3.00	0.26	
4.00	0.23	
5.00	0.22	
6.00	0.20	
7.00	0.18	
8.00	0.16	

$$mg = mg'_{,r_0} + mg_{\omega_e \omega_e^0}$$

$$\begin{cases} g'_r = -\frac{fM}{r^2} \left[1 + J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (1 - 5 \sin^2 \varphi) \right] \\ g_{\omega_e} = -2 \frac{fM}{r^2} J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \sin \varphi \end{cases} \quad (10)$$

其中: fM 为地球引力系数; a_e 为地球赤道平均半径; φ 为地球地心纬度; J 为调和带谐系数; r 为火箭质心距离地心的距离。

将 r_0 和 ω_e^0 分别投影到发射坐标系上, 可以得到引力在发射坐标系上的 3 个分量为:

$$m \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = m \frac{g'_r}{r} \begin{bmatrix} x + R_{ax} \\ y + R_{ay} \\ z + R_{az} \end{bmatrix} + m \frac{g_{\omega_e}}{\omega_e} \begin{bmatrix} \omega_{ex} \\ \omega_{ey} \\ \omega_{ez} \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中:

$$\begin{bmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{az} \end{bmatrix} = R_0 \begin{bmatrix} \sin \mu_0 \cos A_0 \\ \cos \mu_0 \\ \sin \mu_0 \sin A_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{ex} \\ \omega_{ey} \\ \omega_{ez} \end{bmatrix} = \omega_{ex} \begin{bmatrix} \cos B_0 \cos A_0 \\ \sin B_0 \\ -\cos B_0 \sin A_0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中: A_0 为发射方位角; μ_0 为发射点地理纬度 B_0 与地心纬度之差。 R_0 为发射点地心矢径, 假设地球为两轴旋转椭球体, 由于子午椭圆方程求得:

$$R_0 = \frac{a_e b_e}{\sqrt{a_e^2 \sin^2 \varphi + b_e^2 \cos^2 \varphi}} \quad (13)$$

空间任一点矢径与赤道平面的夹角为该点在地球上星下点的地心纬度:

$$\sin \varphi = \frac{(\rho_x + R_{ax}) \omega_{ex} + (\rho_y + R_{ay}) \omega_{ey} + (\rho_z + R_{az}) \omega_{ez}}{r \omega_e}$$

$$r = \sqrt{(\rho_x + R_{ax})^2 + (\rho_y + R_{ay})^2 + (\rho_z + R_{az})^2} \quad (14)$$

ρ 为发射点到当前点弹道上点的矢径 (发射坐标系中的 3 个位置分量为 ρ_x, ρ_y, ρ_z)。

5) 附加哥氏力:

由于作为变质量活动质量体的火箭在旋转系统 (即地球参考系) 下进行圆周、径向和周向的复合运动, 产生了与角速度方向垂直的惯性力, 可以对火箭质心产生力矩, 这个特殊的力称为附加哥氏力^[5], 可以表示为:

$$F'_k = -2 \bar{m} \omega_T \times \rho_e \quad (15)$$

其中: ω_T 为弹体坐标系中的角速度; $\rho_e = -x_{1e} x_1^0$ 为飞行器质心到发动机喷管出口中心的距离矢量, 由于火箭飞行过程中燃料的持续减少, 质心并不是保持不变的, x_{1e} 采用经验法, 通过数据拟合和插值求解。由于多级运载火箭飞行过程中会有各级分离的过程, 因此不同飞行段的质心曲线会有较大差异。

表 6 为典型三级火箭在飞行过程中的质心变化情况, 其中时间为各阶段飞行后的相对时 (单位: s), 质心为当前火箭质心到发动机喷管出口中心的距离 (单位: m)。

表 6 一级质心变化情况

序号	时间/s	质心/m
1	0	17.0
2	50	17.3
3	100	18.3
4	150	21.3
5	200	25.4
...

表 7 二级质心变化情况

序号	时间/s	质心/m
1	0	10.8
2	50	11.1
3	100	11.3
4	150	11.8
5	200	13.1
6	250	13.8
7	300	15.5
...

表 8 二级质心变化情况

序号	时间/s	质心/m
1	0	3.42
2	150	3.77
3	200	4.22
4	250	4.22
5	350	5.31
6	450	7.27
...

6) 附加相对力:

当物体以固定角速度运行时,会产生作用于纵轴的离心力,影响轴向力测量。由于攻角系统启动及停止时的加速和减速运动,以及运动过程中的不平稳,还会存在角加速度,由此引起的惯性力会影响法向力和俯仰力矩的测量结果^[6]。

附加相对力主要包括离心惯性力 F_c 和哥氏惯性力 F_k 。其中地球外质点受到随同地球旋转而引起的力为离心惯性力,由哥氏加速度引起的力为哥氏惯性力。

发射坐标系下的 F_c 和 F_k 分别为:

$$\begin{bmatrix} F_{cx} \\ F_{cy} \\ F_{cz} \end{bmatrix} = -m \begin{bmatrix} \omega_{ex}^2 - \omega_e^2 & \omega_{ex}\omega_{ey} & \omega_{ex}\omega_{ez} \\ \omega_{ey}\omega_{ex} & \omega_{ey}^2 - \omega_e^2 & \omega_{ey}\omega_{ez} \\ \omega_{ez}\omega_{ex} & \omega_{ez}\omega_{ey} & \omega_{ez}^2 - \omega_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + R_{ax} \\ y + R_{ay} \\ z + R_{az} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{kx} \\ F_{ky} \\ F_{kz} \end{bmatrix} = -m \begin{bmatrix} 0 & -2\omega_{ez} & 2\omega_{ey} \\ 2\omega_{ez} & 0 & -2\omega_{ex} \\ -2\omega_{ey} & 2\omega_{ex} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (16)$$

1.4 欧拉角求解方程

在综合受力计算过程中,需要根据不同的力的分析情况在不同的坐标系中进行求解,再根据转换矩阵转换为统一坐标系进行矢量的标量化计算。不同坐标系之间的转换矩阵由旋转欧拉角的三角函数构成。本节针对运载火箭飞行弹道的常见坐标系定义的特殊欧拉角进行求解,从而获取火箭的姿态转换关系。

1) 火箭姿态角:

根据弹道的几何关系,定义火箭的姿态角,以发射坐标系为例:

φ 为俯仰角。为火箭纵轴在射击平面的投影与发射坐标系 x 轴夹角,上方为正;

ψ 为偏航角。为火箭纵轴与射击平面的夹角,规定左方为正;

γ 为横滚角。为火箭绕火箭纵轴旋转的角度,规定旋转角速度矢量与纵轴一致为正。

根据坐标转换关系,获得惯性坐标系下 φ, ψ, γ 与发射坐标系 $\varphi_T, \psi_T, \gamma_T$ 下的三个姿态角之间的关系,由欧拉角联系方程 $G_{DT}^T = G_A G_D^T$ 给出,如下式所示:

$$G_D^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi\sin\gamma - \sin\varphi\cos\gamma & \cos\varphi\sin\psi\cos\gamma + \sin\varphi\sin\gamma \\ \sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\psi\sin\gamma - \cos\varphi\cos\gamma & \sin\varphi\sin\psi\cos\gamma + \cos\varphi\sin\gamma \\ -\sin\psi & \cos\psi\sin\gamma & \cos\psi\cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$G_{DT}^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi_T\cos\psi_T & \cos\varphi_T\sin\psi_T\sin\gamma_T - \sin\varphi_T\cos\gamma_T \\ \sin\varphi_T\cos\psi_T & \sin\varphi_T\sin\psi_T\sin\gamma_T - \cos\varphi_T\cos\gamma_T \\ -\sin\psi_T & \cos\psi_T\sin\gamma_T \\ \cos\varphi_T\sin\psi_T\cos\gamma_T + \sin\varphi_T\sin\gamma_T \\ \sin\varphi_T\sin\psi_T\cos\gamma_T + \cos\varphi_T\sin\gamma_T \\ \cos\psi_T\cos\gamma_T \end{bmatrix}$$

$$G_A = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} g_{11} = \cos^2\alpha_0 \cos^2\varphi_0 (1 - \cos\omega_e t) + \cos\omega_e t \\ g_{12} = \cos\alpha_0 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 (1 - \cos\omega_e t) - \sin\alpha_0 \cos\varphi_0 \sin\omega_e t \\ g_{13} = -\sin\alpha_0 \cos\alpha_0 \cos^2\varphi_0 (1 - \cos\omega_e t) - \sin\varphi_0 \sin\omega_e t \\ g_{21} = \cos\alpha_0 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 (1 - \cos\omega_e t) + \sin\alpha_0 \cos\varphi_0 \sin\omega_e t \\ g_{22} = \sin^2\varphi_0 (1 - \cos\omega_e t) + \cos\omega_e t \\ g_{23} = -\sin\alpha_0 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 (1 - \cos\omega_e t) + \cos\alpha_0 \cos\varphi_0 \sin\omega_e t \\ g_{31} = -\sin\alpha_0 \cos\alpha_0 \cos^2\varphi_0 (1 - \cos\omega_e t) + \sin\varphi_0 \sin\omega_e t \\ g_{32} = -\sin\alpha_0 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 (1 - \cos\omega_e t) - \cos\alpha_0 \cos\varphi_0 \sin\omega_e t \\ g_{33} = \sin^2\alpha_0 \cos^2\varphi_0 (1 - \cos\omega_e t) + \cos\omega_e t \end{cases} \quad (17)$$

2) 速度倾角、航迹偏航角和倾侧角:

根据火箭弹道的几何关系,通过发射坐标系与速度坐标系的转换欧拉公式定义:

速度倾角 θ 为发射系 oz 轴转动角度;

航迹偏航角 σ 为发射系 oy 轴转动角度;

倾侧角 ν 为速度系 ox 轴转动角度。

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x}$$

$$\sigma = \arcsin \left(-\frac{v_z}{V} \right) \quad (18)$$

$$\sin\nu = \frac{\cos\alpha\cos\psi\sin\gamma - \sin\psi\sin\alpha}{\cos\sigma}$$

3) 攻角、侧滑角:

根据火箭弹道的几何关系,通过箭体坐标系与速度坐标系的转换欧拉公式定义:

攻角 α 为速度系 oz 轴转动角度;

侧滑角 β 为速度系 oy 轴转动角度。

$$\sin\beta = \cos(\theta - \varphi)\cos\sigma\sin\psi\cos\gamma + \sin(\varphi - \theta)\cos\sigma\sin\gamma - \sin\sigma\cos\psi\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta = \cos(\theta - \varphi)\cos\sigma\sin\psi\sin\gamma + \sin(\theta - \varphi)\cos\sigma\cos\gamma - \sin\sigma\cos\psi\sin\gamma \quad (19)$$

2 中型液体运载火箭评估模型

基于运载火箭的弹道模拟生成和蒙特卡洛多偏差仿

真计算方法实现对火箭核心战标的综合评估。根据中型液体运载火箭的实际应用情况, 主要对其运载能力、入轨精度和残骸散布等指标进行评估。

本节结合装备实际和弹道模型对其评估模型进行设计。

2.1 运载能力评估模型设计

航天器发射任务最重要的目标就是利用运载火箭将航天器送入预定轨道, 因此, 运载火箭的飞行控制精度、可靠性和运载能力是航天器成功执行任务的重要前提^[7], 其中, 火箭的运载能力是火箭能够送入预定轨道的有效载荷的最大重量, 包括卫星、探测器等航天器本身的重量以及它们所需要的燃料、设备等附加重量。运载能力与发射可靠性有一定矛盾, 多级火箭组在提高运载能力的同时会降低发射可靠性, 因此运载能力指标的设计需要兼顾可靠性。

运载能力需求根据航天器轨道不同而有较大差异, 因此针对典型型号液体运载火箭的运载能力评估需要在考虑轨道、飞行安全等情况下, 综合评估分析燃料燃烧与加注情况, 构建质量模型, 获取相应指标。

1) 质量模型:

为评估火箭的运载能力, 需要对火箭质量变化进行实时建模, 构建质量特性仿真模型。根据有效载荷、火箭的质量特性参数计算输出各级飞行段的质量特性参数。

质量特性主要由箭体结构、燃料质量和载荷质量决定。箭体结构是运载火箭的主体, 它将有效载荷、动力系统、电气系统等分系统连接成一个完整的整体, 为它们提供可靠的工作环境, 提供操作空间, 并承受地面操作和飞行中的各种载荷, 为全箭提供停放、起吊、运输、起竖支点, 满足总体的相关要求。箭体结构的质量变化主要是各级分离后的突变。

表9 运载火箭箭体结构

子级	子级箭体结构
三级	整流罩、飞船支架、转接框、仪器舱、三级氢箱、三级氧箱、连接分离装置
二级	二级氧箱、二级箱间段、二级燃料箱、级间段、二级防热装置、连接分离装置
一级	一级氧箱、一级箱间段、一级燃料箱、一级后过渡段、一级尾段、助推器头锥、助推器氧箱、助推器箱间段、助推器燃料箱、助推器后过渡段和助推器尾段(含尾翼)、连接分离装置

针对典型型号液体运载火箭, 燃料主要包括氧化剂和燃烧剂的质量, 变化主要是由燃料的消耗引起的渐变。

载荷质量为运载火箭的运载能力指标值, 由弹道仿真和飞行过程模拟进行求解。下图为运载火箭飞行过程中的

质量变化情况。其中横坐标为发射 T0 后的相对时 (单位: s), 纵坐标为当前火箭实时质量 (单位 10 000 kg)。

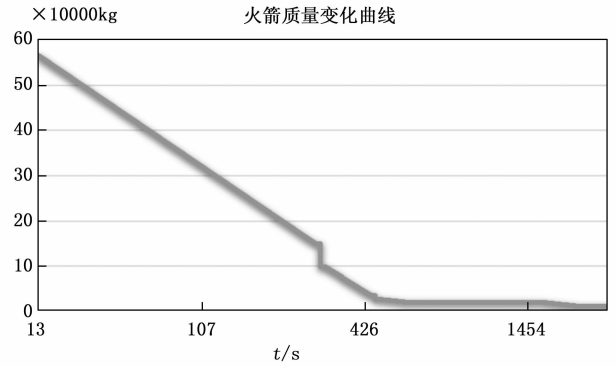


图1 火箭质量模型曲线

2) 运载能力评估模型:

采用综合弹道模型能够根据设计数据, 基于物理或设计条件约束进行模拟打靶飞行试验。通过仿真试验, 实现对典型轨道的运载能力评估。

本文综合考虑了典型型号液体运载火箭的实际约束, 设计了如下的运载能力评估模型:

$$G_{yc} = (G_p + \Delta G_m) + \frac{(G_{Ry} + G_{Yy} - G_{RB} - G_{YB})}{a} + (\Delta G_{y_h} + \Delta G_{j_h} + \Delta G_i) \quad (20)$$

其中: G_{yc} (kg) 为火箭评估运载能力; G_p (kg) 为有效载荷实测质量; G_{Ry} (kg) 为分离时刻燃烧剂剩余质量, 为弹道仿真的质量模型运算结果; G_{Yy} (kg) 为分离时刻氧化剂剩余质量, 为弹道仿真的质量模型运算结果; G_{RB} (kg) 为燃烧剂不可用推进剂质量; G_{YB} (kg) 为氧化剂不可用推进剂质量; ΔG_m (kg) 为本发任务可转化为标准轨道运载能力的末级结构质量, 为弹道仿真的质量模型运算结果; a 为运载能力折算系数倒数, 即有效载荷每增加 1 kg 火箭末级多消耗的推进剂质量; ΔG_{j_h} (kg) 为轨道近地点高度变化带来的运载能力变化。

$\Delta G_{j_h} = k_{j_h} H_{j_h}$ 。其中, k_{j_h} 为运载能力对火箭近地点高度的偏导数, 根据弹道设计, 通常取 2 kg/km。 H_{j_h} 为火箭近地点高度, 取值范围为 150~250 km。

ΔG_{y_h} (kg) 为轨道远地点高度变化带来的运载能力变化。

$\Delta G_{y_h} = k_{y_h} H_{y_h}$ 。其中, k_{y_h} 为运载能力对火箭远地点高度的偏导数, 根据弹道设计, 通常取 0.03 kg/km。 H_{y_h} 为火箭远地点高度, 取值范围为 32 000~40 000 km。

ΔG_i (kg) 为轨道倾角变化带来的运载能力变化。

$\Delta G_i = k_i i$ 。其中, k_i 为运载能力对轨道倾角的偏导数, 根据弹道设计, 通常取 120 kg/度。 i 为轨道倾角, 取值范围为 14~20 度。

2.2 入轨精度评估模型设计

在火箭实际飞行过程中, 各因素与设计值之间存在

随机偏差,会对标准弹道造成摄动影响,造成入轨轨道的偏离。

通过分析航天器载荷入轨各种误差源对轨道的影响,根据弹道仿真模型,进行火箭运动学仿真实现入轨精度评估。

入轨精度评估计算航天器载荷在分离入轨点的轨道六根数与设计轨道的偏差值(即半长轴偏差、轨道倾角偏差、近地点幅角偏差、升交点经度偏差),实现阈值范围内的精度计算。

1) 入轨点轨道参数计算:

由星箭分离点时刻位置信息和速度信息计算卫星轨道六根数如下式所示,实现后续根据弹道仿真结果计算轨道参数:

$$\begin{cases}
 a = \frac{\mu r^2}{2\mu - rv^2} \\
 e \sin E = \sqrt{\frac{1}{\mu a} (x_0 v_{x0} + y_0 v_{y0} + z_0 v_{z0})} \\
 e \cos E = 1 - \frac{r}{a} \\
 \tau = t_0 - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (E - e \sin E) \\
 M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t_0 - \tau) \\
 \cos i = \frac{x_0 v_{y0} - y_0 v_{x0}}{\sqrt{\mu a (1 - e^2)}} \\
 \sin \Omega = \frac{y_0 v_{z0} - z_0 v_{y0}}{\sqrt{\mu a (1 - e^2)} \sin i} \\
 \cos \Omega = \frac{x_0 v_{z0} - z_0 v_{x0}}{\sqrt{\mu a (1 - e^2)} \sin i} \\
 \tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \\
 \sin u = \frac{z}{r \sin i} \\
 \cos u = \frac{y}{r} \sin \Omega + \frac{x}{r} \cos \Omega \\
 \omega = u - f
 \end{cases} \quad (21)$$

其中: a 为半长轴 (m); i 为轨道倾角 ($^\circ$); e 为偏心率; ω 为近地点幅角 ($^\circ$); f 为真近点角 ($^\circ$); Ω 为升交点赤经 ($^\circ$); E 为偏近点角; τ 为近地点时刻; M 为平近点角; u 为纬度幅角; v_{x0}, v_{y0}, v_{z0} 为分离点速度及三轴分量; r_{x0}, y_0, z_0 为分离点地心距及三轴分量; μ 为地心引力常数。

2) 入轨精度计算:

通过仿真终态的飞行器的入轨时间、入轨速度、速度方位、地心距等运动学参数计算轨道六根数,并与理论值进行对比,根据预设的入轨误差阈值,评估入轨精度:

$$A = \frac{|\hat{\sigma} - \sigma|}{\hat{\sigma}} \times 100\% \quad (22)$$

2.3 残骸散布评估模型设计

火箭发射前需要组织众多企业停产和大量人员撤离;落区没有布设残骸跟踪测量设备,无法获取准确的落点预报,只能根据有限的观察信息和任务前研制部门依据经验数据计算的预报落点,采取拉网式方法搜索,人力物力投入非常大^[8-11]。残骸散布计算和评估是提高搜寻效率和实施安控的重要方法和依据,文献 [12] 用弹道方程解算法,存在方程计算过于理论简化,与实际模型存在较大差距。文献 [13] 采用正交多项式拟合弹道和误差补偿预报弹道落点的方法,方法适用范围小,计算能力有限。文献 [14] 采用时序 TVR 方法,存在计算量较大,对数据依赖性强,不适合小子样计算。本文针对典型型号液体运载火箭的特性,提出基于弹道推演模型和蒙特卡洛偏差仿真方法,有效解决了上述问题。

火箭残骸弹道仿真模型同火箭弹道计算模型相同。根据级间分离、星箭分离时的弹道数据,通过积分算法估算得到火箭子级、整流罩等残骸的落区范围。

1) 大气模型构建:

残骸分离后,在下落过程中会依次经过真空空间和大气空间,地球大气阻力是残骸运动过程中的重要影响因素,因此,本文首先对大气模型进行构建,从而实现更加精细的残骸弹道计算^[15]。

大气环境模拟主要是建立 2~20 km 的全球大气模型,能够生成指定的经纬度区域内不同高度下大气的温度、密度和压力信息。

大气模型计算公式是以几何高度 Z 进行分段的,每段引入一个中间参数 W ,该参数在不同段代表不同的简单函数。各段统一选用海平面的值作为参考值,以下标 SL 表示。几何高度 Z 与地势高度 H 之间的转换关系为:

$$Z = \frac{R_0 \cdot H}{R_0 - H} \quad (23)$$

其中: R_0 为地球平均半径。

图 2~4 为随几何高度变化的大气模型关键参数变化情况,根据大气模型,计算残骸在空间中的综合受力和运动学参数。

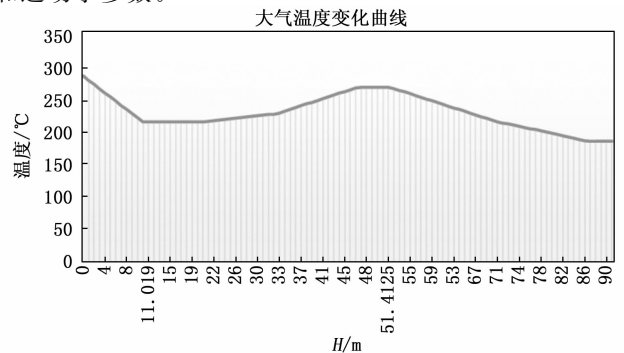


图 2 大气温度变化曲线图

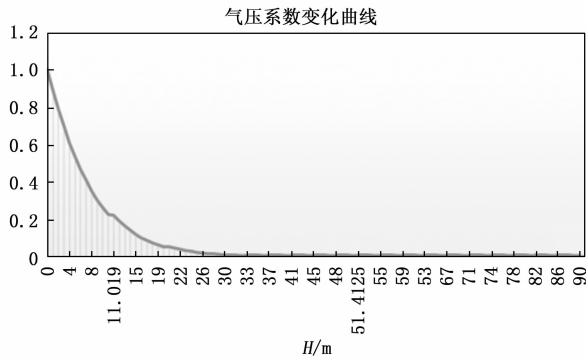


图3 大气压强系数变化曲线图

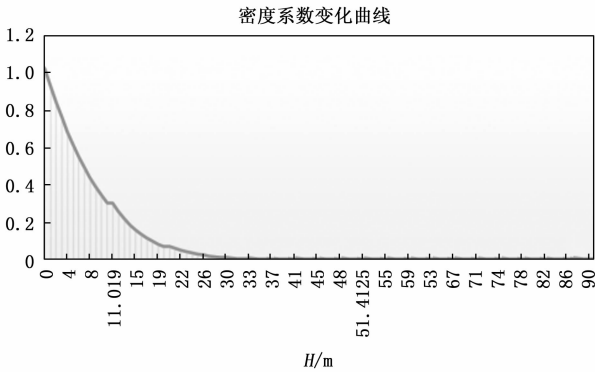


图4 大气密度系数变化曲线图

2) 残骸散布落区计算:

残骸分离后为无动力的抛体运动, 采用空间中的抛体运动模型进行落点位置估算。为获取完整的残骸落区评估结果, 使用残骸最大/最小阻力系数, 计算纵向最近/最远距离, 侧向位移范围可根据分离时刻侧向速度评估:

$$\begin{cases} H_0 = V_{yt}^0 + \frac{1}{2}gt_s^2 \\ \bar{V}_x = \frac{d(-C_xSQ)}{dm} \\ V_x = V_x^0 + \int_0^{t_s} \bar{V}_x dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta S_x = \int_0^{t_s} V_x dt \\ \Delta S_z = \int_0^{t_s} V_z dt \end{cases} \quad (24)$$

其中: H_0 为分离时刻高度 (m); V_x^0 为分离时刻残骸纵向速度 (m/s); V_y^0 为分离时刻残骸垂向速度 (m/s); V_z^0 为分离时刻残骸侧向速度 (m/s); g 为重力加速度常量 (m/s²); t_s 为残骸落地时间 (s); C_x 为残骸阻力系数; m 为分离时刻残骸质量 (kg); S 为残骸外形参考面积 (m²); Q 为当前时刻动压 (Pa); ΔS_x 为残骸纵向位移 (m); ΔS_z 为残骸侧向位移 (m)。

3 蒙特卡洛多偏差仿真设计

蒙特卡洛仿真 (Monte Carlo Simulation) 是一种基于随机变量分布的偏差仿真方法^[16-18], 适用于高成本、高风险、小样本的领域, 为小子样仿真、模拟计算与型号装备性能评估和综合性任务执行评估提供了有效的

方法^[19-22]。

通过大量随机试验来模拟运载火箭系统的行为, 在进行每次模拟时从随机变量集合 $\{X, Y, \dots\}$ (在火箭弹道打靶模拟计算中通常是各类型初始参数的偏差值) 的概率分布 $f(x, y, \dots)$ 中随机抽取样本值 $\{X_i, Y_i, \dots\}$ 构成初始参数的样本空间, 根据统计量与随机变量的函数关系得到 $h\{X_i, Y_i, \dots\}$ 。在进行 n 次模拟之后, 可得到统计量的估计值为:

$$\hat{h} = \int_{t_0}^{t_1} f(x, y, \dots) dt = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h\{X_i, Y_i, \dots\} \xrightarrow{\text{变量独立}} \int_{t_0}^{t_1} f(x) f(y) \dots dt = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h\{X_i\} h\{Y_i\} \quad (25)$$

本文主要采用蒙特卡洛仿真方法, 基于弹道模型计算规划的弹道结果, 结合模型中的偏差量的设计和偏差分布实现打靶仿真和指标结果的仿真计算。

以运载能力的打靶仿真评估为例, 说明根据蒙特卡洛仿真方法实现多级液体运载火箭的核心战标的评估方法。

运载能力评估能够根据飞行试验数据或设计数据, 基于物理或设计条件约束进行模拟打靶飞行试验, 根据弹道的三自由度模型计算弹道。通过使用飞行试验遥测数据或仿真试验数据, 实现对典型轨道的运载能力评估。图5~6为战标打靶仿真评估的流程图和弹道模型构建的组成图。

根据典型试验任务进行参数配置, 包括任务目标轨道、火箭核心参数的初始值, 以及随机分布的多偏差随机变量, 构建模型在打靶仿真过程中的偏差分布, 如表10所示。

表10 偏差项

序号	参数名称	助推器	芯一级	二级	三级
1	结构质量	±1%	±1%	±1%	±1.5%
2	总加注量	±0.5%	±0.5%	±0.5%	±0.5%
3	发动机推力	-4%, +2%	-4%, +2%	-3%, +3%	2.354kN
4	发动机比冲(3σ)	-15m/s, 上偏差无限			+0, -19.61m/s
5	发动机秒流量(3σ)	±3%	±3%	±2.5%	3%
6	气动系数	±10%			-
7	速度头	±13%			-
8	大气密度	±10%			-
9	大气压力	±10%			-

依次按照偏差分布, 生成偏差项的偏差值, 并作为弹道模型的运行输入, 多次运行蒙特卡洛仿真程序, 并对输出结果进行统计分析和验证。

4 液体运载火箭仿真评估系统设计与验证

在战标评定方法研究、作战试验策略设计研究、综

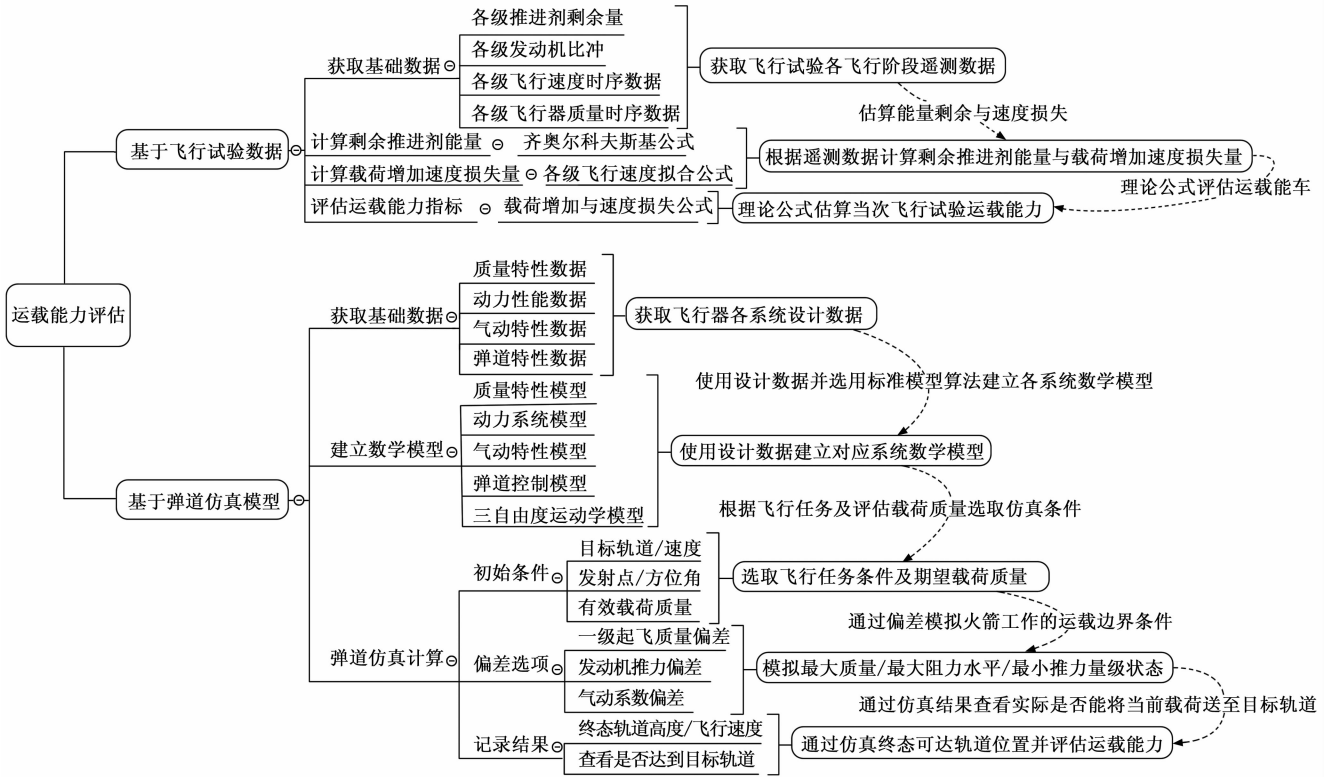


图 5 战标打靶仿真评估的流程图

	<input type="checkbox"/> 开始	<input type="checkbox"/> 起飞	<input type="checkbox"/> 开始转弯	<input type="checkbox"/> 一级关机	<input type="checkbox"/> 助推关机	<input type="checkbox"/> 二级点火	<input type="checkbox"/> 抛整流罩	<input type="checkbox"/> 二级下压	<input type="checkbox"/> 三级开机	<input type="checkbox"/> 一次关机	<input type="checkbox"/> 二次开机	<input type="checkbox"/> 三级关机
时间	步长0.1	步长1							步长5	步长5	步长1	步长5
弹道积分	三自由度	三自由度										
质量	m_d1默认模型					m_d1默认模型	m_d1默认模型		m_d1默认模型	m_d1默认模型	m_d1默认模型	m_d1默认模型
气动	自定义处理F_aero					F_aero默认模型			F_aero默认模型			
芯级推力	P默认模型, I_s默认模型			P默认模型, I_s默认模型		P默认模型, I_s默认模型			P默认模型, I_s默认模型	P默认模型, I_s默认模型	P默认模型, I_s默认模型	P默认模型, I_s默认模型
控制	phiT默认模型, psiT默认		alpha默认模型, beta默认			alpha默认模型, beta默认		alpha默认模型, beta默认	alpha默认模型, beta默认	alpha默认模型, beta默认	alpha默认模型, beta默认	alpha默认模型, beta默认
解方程	迭代求解											
坐标变换	输出: psi1, gamma_1											
助推器推力	P_zhutu1默认模型, I_s_z1			P_zhutu1默认模型, I_s_z1								
关机方程	Flag_1g1默认模型, Flag					Flag_2g1默认模型, Flag			Flag_2g1默认模型, Flag			
导引	alpha默认模型, gamma默认模型		alpha默认模型, gamma默认模型			alpha默认模型, gamma默认模型			alpha默认模型, gamma默认模型			

图 6 火箭的三自由度弹道模型

合数值仿真计算方法研究的基础上，开发具有完全自主知识产权、多类型数据归类存储访问、综合集成多种仿真计算方法、能够解决液体运载火箭装备综合评估的软件系统，应用于运载火箭战标评定、边界条件考核、作战试验推演仿真等相关领域问题。

通过加载上述参数并运行系统，开展蒙特卡洛多偏差仿真计算，获取液体运载火箭多次 (N=1500) 打靶仿真结果，主要包括：

1) 模拟轨道：

通过运行多偏差仿真模型，获取发射坐标系下的综合弹道的仿真运行结果，通过可视化三维界面展示弹道飞行的时序和姿态，如图 7 所示。根据典型型号液体运载火箭的型号特点，仿真弹道包括主火箭飞行弹道、各

级残骸（芯一级、芯二级和整流罩等）的飞行弹道，通过 T~H（高度时序）和 T~V（速度时序）曲线进行描述，如图 8 所示。

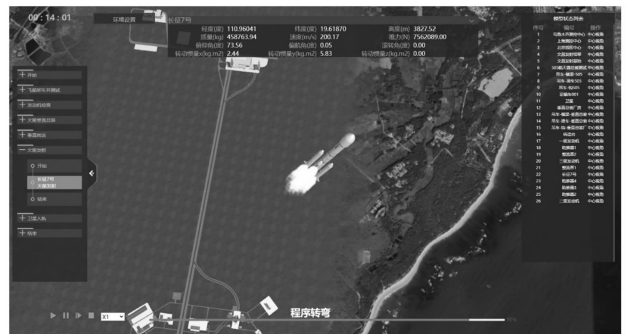


图 7 运载火箭多偏差仿真飞行过程演示软件界面图

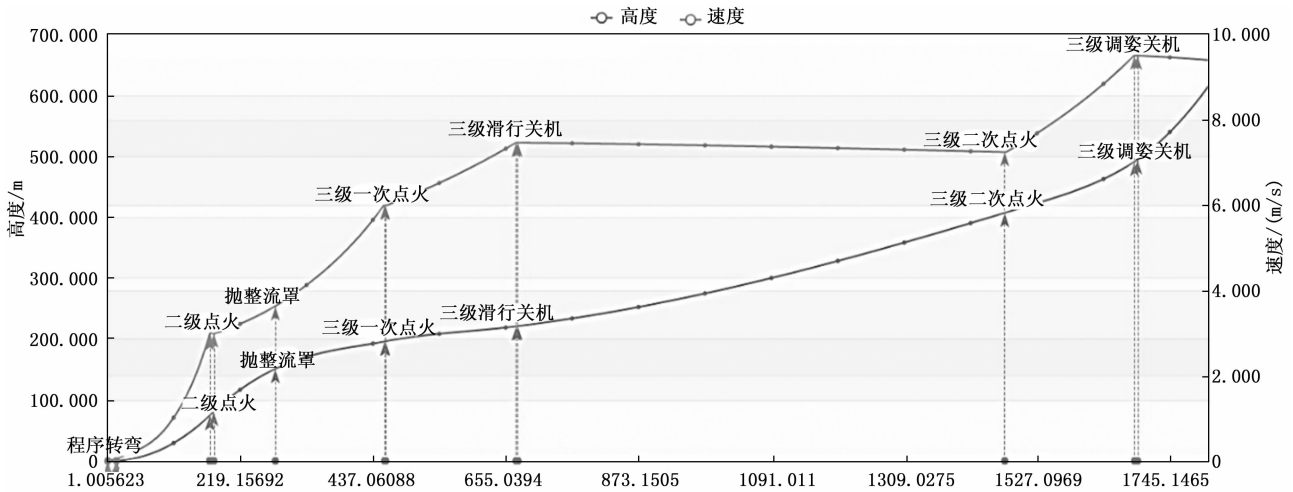


图 8 T-H/T-V 弹道仿真结果软件界面图

2) 运载能力:

运载能力的多偏差蒙特卡洛仿真结果如图 9 所示, 采用散点图 (N=1 500) 展示运载能力的数值与理论数值的偏差。运载能力的蒙特卡洛仿真结果的偏差均在 5% 以内, 说明本文基于飞行弹道仿真的液体运载火箭核心战标评估方法在运载能力指标评估上的有效性。

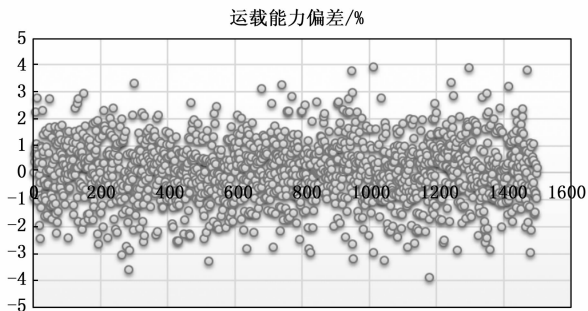


图 9 运载能力仿真评估结果图

3) 入轨精度:

入轨精度的多偏差蒙特卡洛仿真结果如图 10 所示,

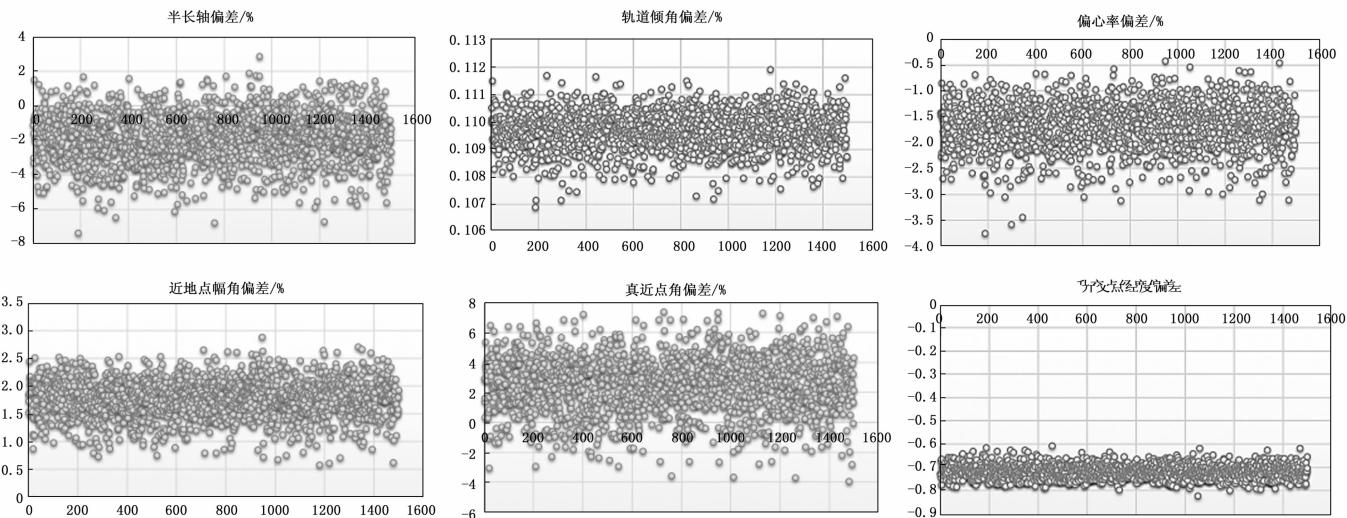


图 10 入轨精度仿真评估结果图

采用散点图 (N=1 500) 展示轨道六根数的数值与理论数值的偏差。入轨精度的蒙特卡洛仿真结果的偏差均在 5% 以内 (部分参数出现少量野值, 可忽略), 说明本文基于飞行弹道仿真的液体运载火箭核心战标评估方法在入轨精度指标评估上的有效性。

4) 残骸散布:

残骸散布的多偏差蒙特卡洛仿真结果如图 11 所示, 采用散点图 (N=1 500) 展示多级残骸散布与理论数值的偏差。残骸散布的蒙特卡洛仿真结果的偏差均在 5% 以内, 说明本文基于飞行弹道仿真的液体运载火箭核心战标评估方法在残骸散布指标评估上的有效性。

5 结束语

运载火箭发射任务成本高, 容错性低, 且可供分析的子样较少, 常规数据分析方法难以满足火箭的多维分析和核心战标的综合性评估, 单次单一任务数据的评估代表性不强。

本文以典型型号液体运载火箭为研究对象, 基于蒙

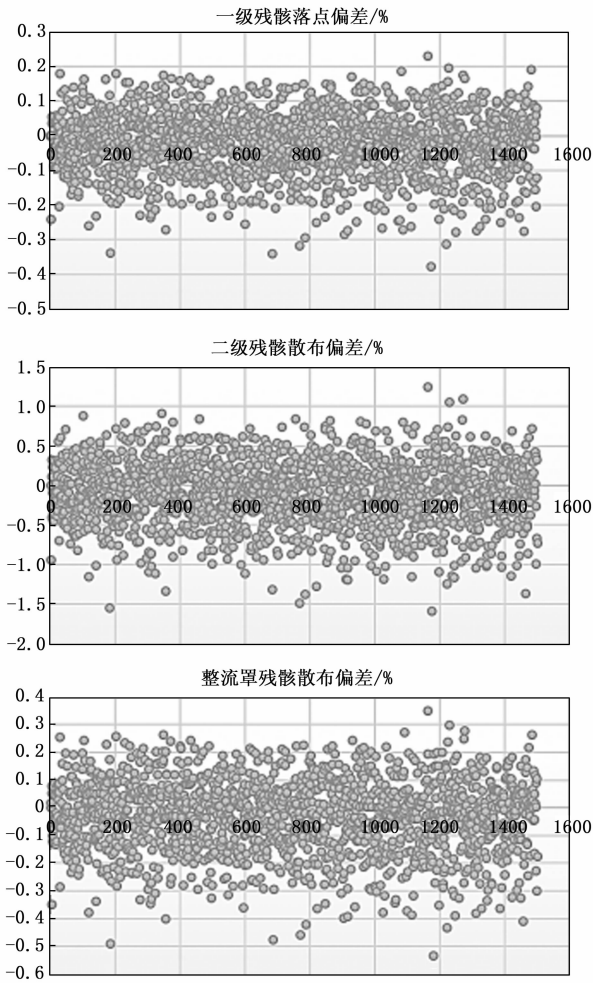


图 11 多级残骸落点仿真评估结果图

特卡洛多偏差仿真方法, 构建涵盖质量、气动、地球等多学科的运载火箭动力学和运动学模型, 实现弹道模拟计算和核心战标评估, 有效提高了小子样下的火箭评估效率和精度, 为后续火箭任务执行、型号装备研制和试验鉴定提供了理论支撑和平台工具服务。

参考文献:

[1] 金平, 吕俊杰, 戚亚群, 等. 可重复使用液体火箭发动机寿命问题探讨 [J]. 宇航总体技术, 2023, 7 (4): 51-59.

[2] 宋征宇, 黄兵, 汪小卫, 等. 重复使用航天运载器的发展及其关键技术 [J]. 前瞻科技, 2022, 1 (1): 62-74.

[3] 龙乐豪. CZ-3A 系列运载火箭 [J]. 导弹与航天运载技术, 1999, 239 (3): 1-69.

[4] 陈卓, 汪灏, 平佳伟, 等. 面向火箭数据分析和故障诊断的数据仓库设计 [J]. 计算机测量与控制, 2024, 32 (1): 51-56.

[5] 钱磊, 赵鹤鸣, 张晓峰, 等. 基于参数激励的 MEMS 环式陀螺驱动方法与实现 [J]. 计算机测量与控制, 2018, 26 (11): 293-296.

[6] 黄辉, 黄昊宇, 凌忠伟, 等. $\Phi 0.5$ 米高超声速风洞连

续变攻角测力试验数据处理方法研究 [J]. 计算机测量与控制, 2019, 27 (8): 281-285.

[7] 王聪, 王劲博, 宋征宇. 登月火箭剩余运载能力估计与停泊轨道重规划 [J]. 宇航学报, 2023, 44 (9): 1317-1328.

[8] 王景国, 卞韩城, 陈学林, 等. CZ-2F 火箭整流罩残骸落点预报方法研究 [J]. 载人航天, 2014, 20 (5): 457-460.

[9] 唐学海, 王军, 肖志明. 弹道式再入航天器落点预报技术 [J]. 南京航空航天大学学报, 2019, 51 (s1): 145-148.

[10] 祝学军, 卜奎晨, 王浩, 等. 采用优化加点 Kriging 模型的助推火箭残骸安全区预示方法 [J]. 国防科技大学学报, 2020, 42 (2): 121-126.

[11] 李瑞敏, 陈建平, 张红英, 等. 基于蒙特卡洛方法的翼伞系统落点仿真研究 [J]. 计算机仿真, 2019, 36 (5): 48-52.

[12] 黄鑫, 赵捍东, 李志鹏. 基于高维插值的末修弹落点预报方法研究 [J]. 弹箭与制导学报, 2015, 35 (6): 135-138.

[13] 史金光, 徐明友, 王中原, 等. 卡尔曼滤波在弹道修正弹落点推算中的应用 [J]. 弹道学报, 2008, 20 (3): 41-43.

[14] 朱紫阳, 陈龙, 魏昌全, 等. 基于时变 TVAR 模型和 CKF 滤波的助推器落点预测 [J]. 海军航空工程学院学报, 2020, 35 (2): 217-222.

[15] 李鑫, 郭晶, 贾长伟, 等. 多谱段合成环境数据生成系统 [J]. 计算机测量与控制, 2014, 22 (11): 3783-3786.

[16] 郑科, 耿卫国, 朱子环. 蒙特卡洛法在发动机推力测量不确定度评估中的应用 [J]. 计算机测量与控制, 2021, 29 (6): 249-254.

[17] NICOLA L, CARLO M, SARA S. Modeling ADC non-linearity in monte carlo procedures for uncertainty estimation [A]. IEEE IMTC [C] //Como, Italy: 2004: 522-527.

[18] HERADOR M, ASUERO A G, GONZALEZ A G. Estimation of the uncertainty of indirect measurements from the propagation of distributions by using the Monte-Carlo method: an overview [J]. Chemometrics & Intelligent Laboratory Systems, 2005, 79 (1/2): 115-122.

[19] 张骁, 刘丙杰. 基于蒙特卡洛方法的火箭残骸落点范围预测 [J]. 计算机测量与控制, 2023, 31 (3): 102-109.

[20] 王强, 李伟, 龚建泽, 等. 基于火箭残骸实时定位信息的落点计算模型 [J]. 计算机测量与控制, 2021, 29 (5): 154-158.

[21] 吴雯雯, 陈振林. 基于蒙特卡洛 k-means 聚类算法的舰船器材分类研究 [J]. 计算机测量与控制, 2020, 28 (4): 222-226.

[22] 付元钢. 气动热辐射的直接蒙特卡洛法模拟 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007.