

基于 Python 的超导量子干涉器件仿真优化方法

秦肖雅, 张樱子, 张一洲

(中北大学 省部共建动态测试技术国家重点实验室, 太原 030051)

摘要: 超导量子干涉器件的优化研究旨在提升其在微弱磁通变化探测中的性能; 研究中建立了基于 Python 的仿真框架, 使用 SuperScreen、Numpy 和 Matplotlib 库进行器件仿真及性能优化; 该框架支持多种 SQUID 形状的模拟, 包括设计了一个算法来模拟多边形; 仿真分析了在非均匀外部磁场下 SQUID 超导薄膜的磁响应, 计算了薄膜内外的矢量磁场; 此外, 通过网格化技术将连续空间转化为计算模型, 为解算物理方程提供了可能; 仿真结果表明, 优化的 SQUID 能满足高精度磁场探测的需求, 为超导器件的设计提供了理论和技术支持。

关键词: 超导量子干涉器件; Python; 仿真方法; 垫圈; 电感; 设计优化

Python-based Simulation Optimization Method for Superconducting Quantum Interference Devices

QIN Xiaoya, ZHANG Yingzi, ZHANG Yizhou

(State Key Laboratory of Dynamic Measurement Technology, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: The optimization study of superconducting quantum interference devices aims to enhance their performances in detecting minute magnetic flux changes. A Python-based simulation framework is built, the SuperScreen, Numpy, and Matplotlib libraries are used to simulate the devices and optimize their performance. This framework supports the simulation of various superconducting quantum interference devices (SQUID) shapes, including an algorithm to simulate polygon modeling. The magnetic response of SQUID superconducting films under non-uniform external magnetic fields is analyzed by the simulation, and the vector magnetic fields inside and outside the films are calculated. Additionally, the continuous physical space is transformed into the computational model through meshing techniques, it perhaps provides the solution of physical equations. Simulation results show that the optimized SQUID meets the requirements for high-precision magnetic field detection, providing a theoretical and technical support for the design of superconducting devices.

Keywords: SQUID; python; simulation method; washer; inductance; design optimization

0 引言

精密测量是人类探索自然的基本途径。提高测量精度一直是研究人员追求的目标。与传统测量技术相比, 基于磁场信号的测量在精度、灵敏度、稳定性等方面具有明显优势^[1], 超导量子干涉器件^[2] (SQUID, superconducting quantum interference devices) 是已知最灵敏的磁通量和场探测器之一, 其等效能量灵敏度接近量子极限^[3], 广泛应用于多个领域, 包括精密测量^[4]、生物磁学^[5] 和地球物理学^[6]。SQUID 的独特性在于其能够检测接近量子限的极小磁场变化, 这使得它成为许多科学和工程应用中不可或缺的工具^[7]。尽管 SQUID 具有显著的优越性, 它的性能和应用仍受到一些基本物理限制和技术挑战的影响^[8]。为了克服这些限制, 进行仿真研究成为一种必要的手段。仿真可

以帮助研究者在实际制造和测试之前, 预测和优化 SQUID 的性能。

目前常用的仿真方法主要基于经典的电路理论模型, 这些模型虽然在某些方面提供了便利, 但缺乏处理微观尺度上的超导量子效应的能力。此外, 许多现有的仿真工具要么操作复杂, 对用户的技术要求较高, 要么在功能上无法满足特定的研究需求。例如, 它们可能无法精确模拟 SQUID 在极低温环境下的行为, 或者处理复杂的几何结构和边界条件。因此, 开发一种基于 Python 的新型仿真框架显得尤为重要, Python 不仅具有良好的可扩展性和用户基础, 其丰富的科学计算库也为仿真提供了强大的支持。通过这种新方法, 可以更精确地模拟 SQUID 的物理行为, 从而优化设计参数, 提升其在实际应用中的性能和可靠性。本文旨在通过 Python 实现的优化仿真框架, 解决现有方法

收稿日期: 2024-04-23; 修回日期: 2024-04-28。

基金项目: 山西省省部共建动态测试技术国家重点实验室基金(2023-SYSJJ-05); 国家自然科学基金青年科学基金项目(62201523); 山西省基础研究计划资助项目(20210302124329)。

作者简介: 秦肖雅(1996-), 女, 硕士研究生。

通讯作者: 张樱子(1989-), 女, 博士, 讲师。

引用格式: 秦肖雅, 张樱子, 张一洲. 基于 Python 的超导量子干涉器件仿真优化方法[J]. 计算机测量与控制, 2024, 32(6): 235-241.

中的局限性，推动超导量子干涉器件技术的进步和应用扩展。

1 SQUID 器件基本理论

1.1 约瑟夫森效应

SQUID 的核心敏感电结构是约瑟夫森结^[9]，约瑟夫森结是由两个中间由非常薄的绝缘材料隔开的超导体组成。中间的绝缘层使得两个超导电极之间变为弱耦合，结中电流传输是通过库珀对和准粒子的隧道效应产生。一般来说，如果耦合足够弱，结点处的超电流 I_s 与两个超导电极的宏观波函数的规范不变相位差 δ 有关。如果介质层两侧的为相同的超导材料，并且处于相同的温度，图 1 为约瑟夫森效应示意图。

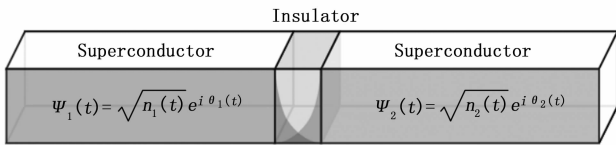


图 1 约瑟夫森效应示意图

两个超导体的波函数可以如下关联^[10]：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1 = U_1 \Psi_1 + K \Psi_2 \quad (1)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_2 = U_2 \Psi_2 + K \Psi_1 \quad (2)$$

K 是耦合常数，描述每个区域的波函数之间的耦合。这种耦合与非超导区域中两个波函数的重叠有关。波函数变为：

$$\Psi_1(t) = \sqrt{n_1(t)} e^{i\theta_1(t)} \quad (3)$$

$$\Psi_2(t) = \sqrt{n_2(t)} e^{i\theta_2(t)} \quad (4)$$

这里的 $n_s = \Psi \cdot \Psi^*$ 是库珀对密度，如果介质层两侧的为相同的超导材料，并且处于相同的温度，则可以合理地假设 $n_1(t) = n_2(t)$ 。由于电流为 $I = nAq \frac{dx}{dt}$ ，横截面为 A ，载流子密度为 n ，载流子电荷为 q ，因此前两个方程变为：

$$I_s = I_0 \cdot \sin(\phi_2 - \phi_1) \quad (5)$$

这就是约瑟夫森第一方程。约瑟夫森结的物理响应如图 2 所示。

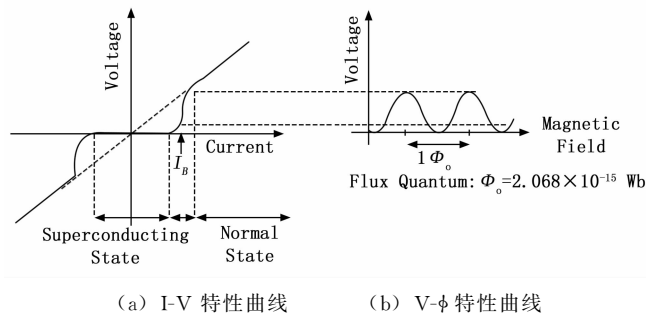


图 2 物理响应图

1.2 SQUID 器件原理

SQUID 使用约瑟夫森效应现象来测量磁通量的极小变化。通常，SQUID 是被两个约瑟夫森结中断的超导环，用电流 I 偏置，外部磁场 $H = B/\mu_0$ 施加到该环上^[11]，其结构如图 3 所示。

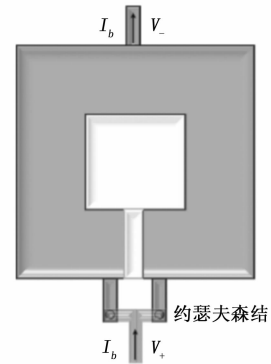


图 3 SQUID 示意图

约瑟夫森结自身特性使得流过超导环的最大超电流 I_c 限制在两个结的临界电流之和的最大值以内。根据量子力学的原理，两个 SQUID 臂中超导波函数的干涉引起在 SQUID 环内的磁通量周期性地调制，也就是说超导环内的总磁通量是量子的，只能取某些特定的值^[12]。

SQUID 本质上是一个磁通量检测器。一个典型的 SQUID 设备主要由以下 5 个部分组成：两个约瑟夫森结是连接在超导环路上的两个薄电势障碍，是 SQUID 的核心部件；超导环：这是 SQUID 的主体部分，在铌基的 SQUID 中通常由底层超导材料 Nb 制成，这个环路被称为“washer”；输入线圈：该线圈与 SQUID 感应耦合，用于将被测量的磁场转化为 SQUID 能够检测的磁通量；反馈线圈：该部分同样与 SQUID 感应耦合，用于在反馈操作中提供反馈磁场，从而线性化 SQUID 的响应。图 4 为典型的耦合 SQUID 的基本构型。

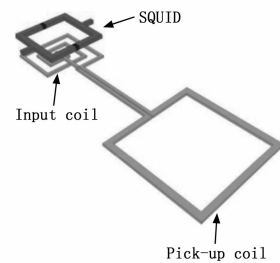


图 4 SQUID 磁力计配置方案

由于磁通噪声随着环电感的增加而增加，因此不可能通过无限制地增加 SQUID 环的面积来增加磁场灵敏度。此外，环路电感的增加也会导致磁通—电压转换系数降低。所以为了增加磁场灵敏度，可以采用超导磁通变压器的方法，也就是耦合 SQUID 改善器件性能。

2 Python 仿真环境搭建

有许多关于薄膜和二维超导器件中磁屏蔽和电感提取的数值研究^[14-15]。然而, 用于此任务的软件工具很少, 并且可用的软件工具都是闭源的, 需要使用专门的文件格式或单独的计算机辅助设计软件来完成。由于这些工具设计初衷是用于单通量量子 (SFQ) 逻辑的超导集成电路设计, 专注于电感提取, 针对 SQUID 器件本身的物理响应的仿真非常少, 针对相关技术难题, 本文研制了一种基于 Python 语言的超导量子干涉器件的仿真方法, 可以直观地帮助器件设计与优化。

2.1 厚度积分电流密度

模拟超导薄膜或由多个超导薄膜组成的结构在施加非均匀面外磁场 $H_{z, \text{applied}}(x, y, z)$ 下的磁响应, 需要利用给定的 $H_{z, \text{applied}}(x, y, z)$ 以及超导结构中所有薄膜的几何形状和穿透深度等信息, 计算薄膜内部所有位置的厚度积分电流密度 $\vec{J}(x, y)$, 从而得出薄膜内部和外部的所有点的矢量磁场 $\vec{H}(x, y, z)$ 。在超导伦敦模型中, 具有伦敦穿透深度 λ 的超导体中的磁场由下式给出, 其中 λ 为超导薄膜穿透深度, 该方程是考虑到了超导体性质的对 Maxwell 方程组中的安培定律的修正:

$$\vec{H}(\vec{r})/\lambda^2 = -\vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{r}) \quad (6)$$

使用厚度积分电流密度:

$$\vec{J}(x, y) = \vec{j}_{z_s}(x, y) \cdot d \quad (7)$$

其中: d 是薄膜的厚度, 第二伦敦方程简化为:

$$\vec{H}(x, y) = -\Lambda \vec{\nabla} \times \vec{J}(x, y) \quad (8)$$

其中: $\Lambda = \lambda^2/d$ 是超导薄膜的有效穿透深度, $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ 是二维梯度算子。超导薄膜内部的电流密度为零发散, 因此可以用标量势来表示:

$$\vec{J}(x, y) = -\hat{z} \times \vec{\nabla} g = \vec{\nabla} \times (g\hat{z}) = \left(\frac{\partial g}{\partial y}, -\frac{\partial g}{\partial x} \right) \quad (9)$$

流函数 g 可以被认为薄膜的局部磁化强度, 或磁偶极子源的面积密度。

2.2 Python 环境中器件建模

超导结构的几何形状和穿透深度的信息由 `super-screen.Device`^[16] 这一实例描述。设备由一个或多个超导层组成, 每个超导层由 `superscreen.Layer` 的一个实例表示。每层位于平行于 $x-y$ 平面的指定平面中, 并具有其自己的有效穿透深度 Λ 。其中, 有效穿透深度 Λ 可以根据层的伦敦穿透深度 λ 及其厚度 d 来定义: $\Lambda = \lambda^2/d$ 。

每层可包含一个或多个超导膜, 其中可具有一个或多个孔。薄膜和孔由 `superscreen.Polygon` 类的实例定义。设备中的所有多边形必须是单连接的, 这是器件建模的基础, 薄膜中的孔被建模为一个 `Polygon` 实例, 其坐标全部位于代表薄膜的 `Polygon` 内。可以使用集合论运算来构造和组合多边形, 具体运算法则见表 1。

2.3 建模算法设计

简单的方形垫圈、圆形垫圈由 `SuperScreen` 提供的多边

表 1 组合对象的方法及其相应的集合论和布尔逻辑运算

SuperScreen	集合论	布尔运算
<code>polygonA.union(polygonB)</code>	$A \cup B$	OR
<code>polygonA.intersection(polygonB)</code>	$A \cap B$	AND
<code>polygonA.difference(polygonB)</code>	$A \setminus B$	AND NOT
<code>polygonA.difference(polygonB, symmetric=True)</code>	$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	XOR

形生成代码实现, 但是绘制正八边形代码并未直接提供, 为了完成多种 SQUID 器件的仿真建模, 本文设计了正多边形的器件建模算法。为了保证不同垫圈形状的可调参数一样, 把输入参数定为多边形的对边之间的距离, 下面以正八边形为例介绍该算法。首先, 设定正八边形的对角线长度: $\text{diameter} = w$, 然后, 利用几何关系导出其边长公式, 即 $\text{octagon_side_length} = \text{diameter} / (1 + \text{np.sqrt}(2))$, 继而计算出正八边形外接圆的半径, 即将边长 ($\text{octagon_side_length}$) 乘以 $(1 + \sqrt{2}) / 2$, 计算从中心到顶点的距离 (即正多边形外接圆半径), 代码写为 $\text{octagon_radius} = \text{octagon_side_length} * (1 + \text{np.sqrt}(2)) / 2$ 。

将圆一周的度数 2π 等分成 8 份, 然后利用代码 `octagon_angles = np.linspace(0, 2 * np.pi, 8, endpoint=False)` 生成正八边形的顶点坐标, 得到每个顶点对应的角度。最后应用三角函数计算出相对于中心点的 x 和 y 坐标, 并使用 `np.column_stack` 将计算得到的每个顶点的 x 和 y 坐标组合形成一个二维数组, 这个数组即为 `SuperScreen` 库中的 `Polygon` 示例定义格式。利用该算法生成的正八边形图案如图 5 所示。这个方法不仅可以准确生成正八边形, 也可以完成扩展到正 N 边形的建模中。这大大简化了计算机模拟中重现复杂的 SQUID 几何形状的过程, 为研究提供了重要的仿真工具。

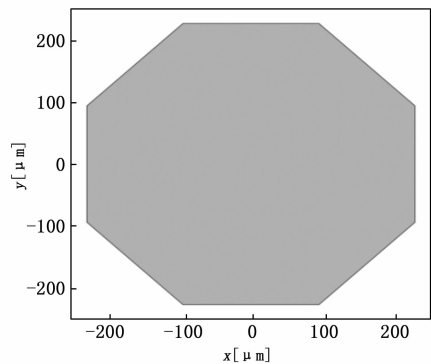


图 5 设计的算法生成的正八边形图案

2.4 仿真模型网格划分

在数值仿真与有限元方法的应用中, 网格化是器件仿真的基础。将连续的物理几何空间转化为离散的计算模型, 为后续仿真过程提供了在点阵格局上解算物理方程的能力, 进而能够近似地刻画连续空间中的物理行为。

网格优化步骤的目标是提高网格中每个三角元素的

“质量”，其中质量衡量一个三角形接近等边三角形的程度。实际上，执行的 optimesh 步骤越多，网格中的三角形就越大在大小和空间密度上均匀，得到的仿真结果也就越精确。网格中三角形的局部密度由设备多边形中的顶点密度和三角形总数确定。多边形顶点较多的区域将比顶点较少的区域网格化得更密集。网格生成后，程序会计算依赖于几何形状的矩阵和向量，然后可以开始求解模型。

细密的网格分布可以提高仿真的分辨率，促使结果更为精确；同时也使得计算任务变得繁重，对计算时间与内存资源的需求增大。另一方面，过于稀疏的网格则有可能模糊模型中的重要边界场信息，导致仿真的准确性降低。因此，在确定合适的网格数量时，应仔细考量仿真目标与数据特性，使得网格化既能精准捕捉关键结构，又能在有限的计算资源下高效运行。

在器件建模中定义完成的层、薄膜、孔以及外围的抽象区域，调用 Device.make_mesh() 生成计算网格。该函数主要需要定义两个参数：max_edge_length 和 smooth。其中 max_edge_length 参数是定义网格中最大边的长度，该值设定越小，生成的网格更密集。smooth 参数则用于控制网格边缘的平滑程度，该参数定义越高，网格边缘越平滑。

图 6 为未添加边界条件的器件网格划分，在建模阶段为了减少计算过程时间及资源占用，只提供了边界顶点作为器件建模的必要条件，所以复杂器件的仿真过程中需要在网格划分部分添加边界条件，以完成细密的网格分布，为物理现象计算提供前提。引入边界定义函数 film.resample(n)，在每个多边形边界上的点数增加到设定好的 n 的数量，进而使得在这些点上生成的计算网格能够更精细地逼近薄膜的实际几何形状。

对定义薄膜调用该函数可以对多边形的边界进行插值，以使其具有大约均匀分布的 n 个点，结果如图 7 所示。对复杂几何形状的高效处理和网格密度的局部控制，生成的更密集的网格划分可以在后续计算中提供更加精细的仿真结果，而且可以在不牺牲仿真精度的前提下，优化计算资源的使用。

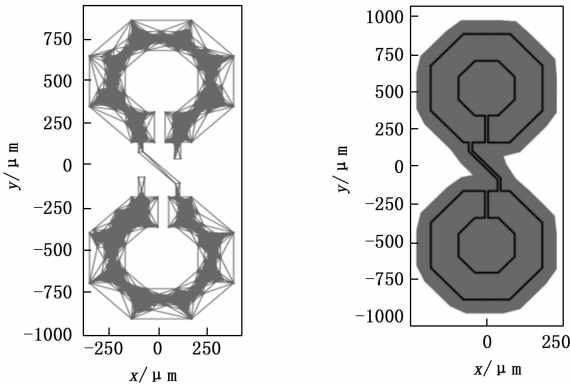


图 6 未添加边界条件的网格划分 图 7 添加边界点的网格划分

3 仿真结果及分析

计算磁环的磁通量和自感应强度是了解非零磁通量状态下超导行为的基础。这些参数对于量化传感器对外部磁场的响应及其自谐振特性至关重要。在传统的 SQUID 电路模型^[16]，电感是根据 SQUID 环的形状计算^[17]。一般采用经验公式：

$$L_s = 1.25\mu_0 d \quad (10)$$

μ_0 为空气磁导率， d 为超导环内径直径^[18]。本论文的仿真结果在电感计算中假设 SQUID 超导垫圈环是上层耦合多匝螺旋超导线圈的一匝矩形线圈^[19]。基于这一假设：

$$\Phi = \Phi_{ext} = LI_s \quad (11)$$

其中： Φ 、 Φ_{ext} 分别为穿过 SQUID 的磁通量以及外部总磁通量，磁通量根据磁通量子的原理量化为磁通量子 Φ_0 的整数倍， I_s 为超导垫圈环在外部磁场作用下由于迈斯纳效应产生的屏蔽电流。

对方形垫圈进行合理的器件建模以及网格化，其结果如图 8 所示。

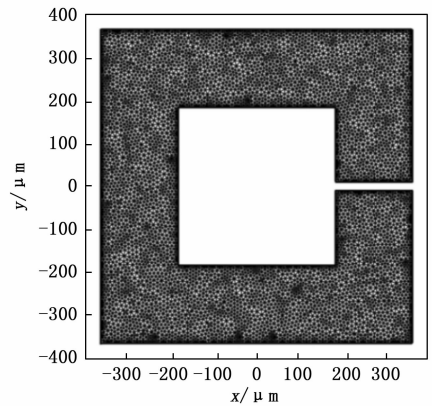


图 8 垫圈模型网格化

偏置电流和屏蔽电流穿过超导垫圈环流入约瑟夫森结，端点电压随着电流的比率非线性变化^[20]。电路方程由式 (7) 给出：

$$I_b = I_c \sin\varphi + V/R_c \quad (12)$$

I_b 为偏置电流， I_c 为临界电流， $\sin\varphi$ 为相位差， V 为电压， R_c 为约瑟夫森结的室温电阻，仅受到结区面积以及结工艺影响。传统的器件仿真^[21]是通过使用龙格-库塔法求解式 (12) 得到。由于没有引入量化效应无法精确阐明直流 SQUID 的电磁行为。本文的仿真方法可在微观物理响应下完成器件仿真建模，并可以根据仿真结果优化器件设计，充分考虑到微观量子效应对器件现实响应的影响。

3.1 匀强磁场下磁响应

在外加磁场仿真 DC SQUID 器件之前对网格划分好的器件进行网格化分析，在这里以磁偶极子为磁场源分析。默认情况下调用 Device.mesh() 方法，不仅会网格化薄膜本身，还会包括薄膜周围一定范围的“缓冲区”真空区域，这样做的目的是确保模拟的边界条件能够正确处理。

1) 首先计算每个网格顶点的位置和面积，vertex_po-

sitions 函数用来存储每个网格顶点的 (x, y, z) 坐标, 因为形状在 xy 平面上所以定义 z 坐标为 0; vertex_areas 函数用来计算每个顶点的有效面积, 用于后续计算磁矩。

2) 然后定义每个顶点的磁矩, 定义 z 方向的单位向量 z_hat 和每个顶点的磁化强度 magnetization; 计算 vertex_moments, 即每个顶点的磁矩向量, 将磁化强度乘以顶点面积并转换为玻尔磁子单位。

3) 最后, 使用 DipoleField 函数来计算磁场, 最后运行可视化代码。

对该磁场的磁场环境下完成对之前垫圈模型的磁场结果仿真, 图 9 为设置缓冲区的方形垫圈在磁偶极子磁场下的磁场响应。

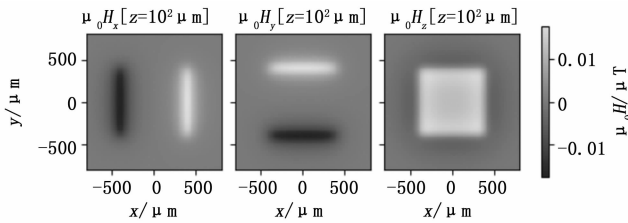


图 9 设置缓冲区的方形垫圈在磁偶极子磁场下的磁场响应

3.2 迈斯纳效应

超导环的模拟模型定义穿过环中心孔的环流来模拟外磁场的影响。在本研究中, 设置了 1 mA 的循环电流。相当于施加外部磁场, 从而使等效磁通被困在超导环的孔中。在孔中超导体的边界存在边界效应, 施加的磁场在孔中形成稳定的磁通。根据仿真结果评估各种垫圈设计排斥磁场的的能力, 找出最大限度屏蔽迈斯纳效应的设计。从而预测超导体在外加磁场中的行为, 分析垫圈形状对器件的影响。X 轴和 Y 轴的数据精确到微米级, 允许精确描述垫圈的平面及其磁场分布, 每个图中的 X 轴和 Y 轴代表垫圈环的空间尺寸 (μm)。这些轴定义垫圈所在的平面和观察磁场分布的平面。图 10 为匀强磁场下超导垫圈迈斯纳效应仿真结果。

可视化中仿真结果图中普遍存在深色, 证明器件中存在一致均匀的低磁场区域。表明在预定的薄膜厚度和穿透深度条件下, 钌基垫圈内部的磁场具有有效的磁通排斥。下方的磁通量曲线图中三角形曲线为 $Y = -150 \mu\text{m}$ 处的器件表面磁通量, 该曲线与基线对齐, 表明在超导垫圈内部并无磁通泄露, 仿真结果证明该设计可以完成器件功能。垫圈边界处的磁场进行定量模拟显示, 方形垫圈的边界磁通量最大值为 0.23 mT, 这个值远小于器件敏感磁通量, 这种设计边界磁通的轻微泄露不会影响器件功能。

3.3 超导屏蔽电流

在 DC-SQUID 设备运行中, 屏蔽电流 (也称为超电流) 为关键参数, 屏蔽电流会在 SQUID 的超导回路内循环以维持回路内磁通量的量子化。这与超导体在其表面排斥磁场的迈斯纳效应密切相关。当施加的外部磁场发生变化时, 自动产生电流来抵消超导体内的外部通量, 从而有效屏蔽外部磁场变化, 使超导回路内部通量保持稳定。分析整个

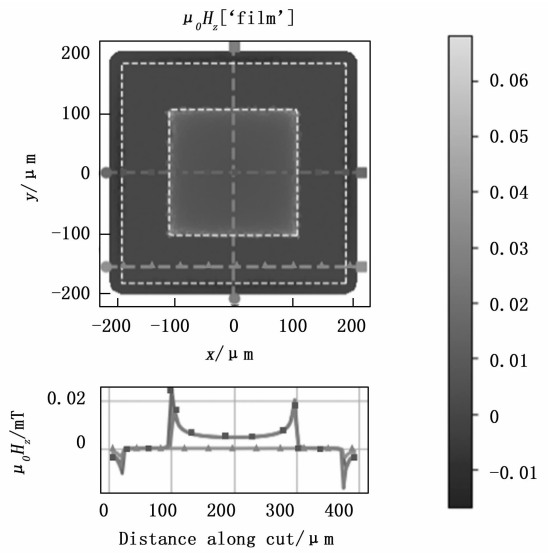


图 10 超导垫圈迈斯纳效应仿真结果

垫圈结构的电流分布和综合电流密度旨在验证是否存在环流。仿真绘制超电流的空间分布图, 计算垫圈内的总循环电流, 以深入了解设计修改如何影响电流限制效率和传感器的整体性能。片状电流是厚度积分电流密度, 是计算外加磁场和电流的静态和动态响应以及薄膜中移动的涡流的重要物理量。流函数是薄膜的局部磁化, 或磁偶极子源的面积密度。图 11 为超导垫圈屏蔽电流仿真结果。

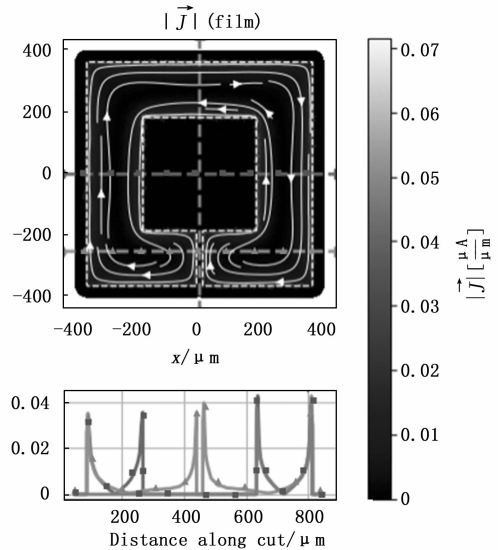


图 11 超导垫圈屏蔽电流仿真结果

仿真结果显示在垫圈的边缘区域电流密度呈现出显著的集中趋势, 而内部区域的电流密度则接近于零。曲线图进一步验证了该结果, 其中电流密度 ($|J|$) 以 $[\text{mA}/\mu\text{m}]$ 为单位, 针对沿切割路径 (μm) 的距离进行了绘制, 曲线清晰地显示了电流密度在垫圈边缘的急剧增加, 而在中心接近平坦, 这与超导体的典型电流分布模式一致。这种分布模式的存在说明, 在设计 SQUID 器件时, 必须考虑

到电流的这种非均匀性，特别是在处理和优化超导垫圈的几何形状时。这种分布模式仅限于超导体表面的伦敦穿透深度范围内，是超导材料特有的物理行为的直接结果，特别是由于迈斯纳效应的作用，这一效应导致超导体在其表面层（伦敦穿透深度范围内）抵抗外部磁场的渗透。由于迈斯纳效应的作用，在靠近边界的区域形成了高密度电流。

3.4 超导垫圈电感

传统的器件设计过程通常使用经验电感公式来进行电感设计，对于复杂一些的环路形状却无法直接确定环路电感的精确解。即使已经在公式中加入了非理想因素，但不精确的电感估算依然为 SQUID 的整体设计带来困难，目前的普遍的设计方案只能通过工艺迭代来优化器件设计，同样带来了过高的设计成本以及工艺不稳定等负面影响。

超导结构中孔 i 和 j 之间的互感 M_{ij} 为^[22]：

$$M_{ij} = \Phi_{S_i}^f / I_j \quad (13)$$

其中： $\Phi_{S_i}^f$ 是包含孔 i 区域 S_i 磁通量， I_j 是在孔 j 周围循环的电流。一组孔的互感值可以生成互感矩阵，互感矩阵的正对角线是孔自感，负对角线为两孔之间互感。磁通量和超电流部分分别对应于几何电感和动力学电感。如果含有孔的超导薄膜的穿透深度为 $\Delta=0$ ，则磁通量 $\Phi_{S_i}^f$ 等于穿过孔 i 的磁通量，总电感等于几何电感。对于具有 N_h 个孔的超导薄膜器件，该器件的 $N_h \times N_h$ 互感矩阵 M 可以使用 `device.mutal_inductance_matrix()` 函数计算。

利用之前建模完成的器件模型以及 SuperScreen 库的 `solution.polygon_fluxoid` 函数计算出薄膜通量和围绕孔洞路径的磁通量，利用代码 `L = (sum(fluxoid) ^ I_circ).to ("Phi_0 A")` 计算出垫圈电感。对仿真与传统电感经验公式在同一几何敏感参数 D 的情况下利用 Python 环境进行绘图分析，两种方法电感结果对比如图 12 所示。

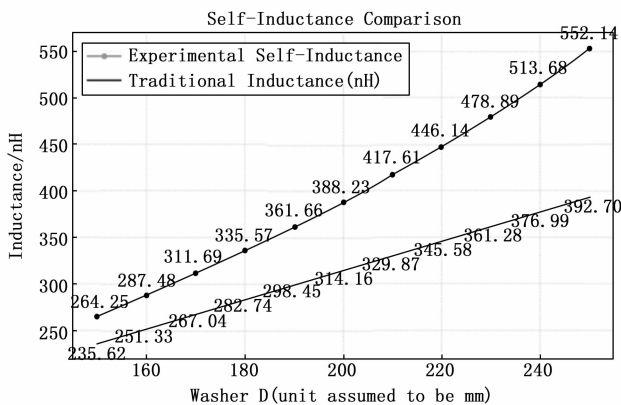


图 12 两种方法电感对比图

对结果进行定量分析，垫圈曲线斜率明显高于传统经验公式，斜率为 2.839 1，这种对尺寸变化的高度敏感性可能会对 DC-SQUID 的灵敏度和噪声水平产生不利影响，这种结果提示器件设计过程中垫圈应该有较小的内径，但过小的内径也会影响器件与后续电路耦合，要在这两个设计考虑之间寻求一个平衡。

3.5 双垫圈仿真结果

标准的 SQUID 配置中两个约瑟夫森结将单个超导环隔断形成基本的 SQUID 环路^[23]。在双垫圈设计中，SQUID 设备包含两个垫圈。这两个垫圈是相同的或不同形状和大小，它们的配置旨在优化磁场的感应和分布减少噪声源的影响。双垫圈设计有助于提高 SQUID 的测量灵敏度和信号对噪声比。图 13 为双垫圈器件建模以及外加偏置电流后的流函数仿真结果。

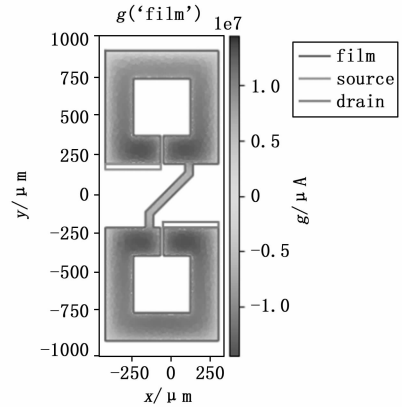


图 13 双垫圈器件建模

图 13 中上方方框为外加正向偏置电流，图中下方方框为外加偏置电流流出方向。流函数 g 是薄膜的局部磁化强度，颜色深度表示流函数大小，器件中心颜色加深证明偏置电流集中在器件边缘，提示偏置电流与屏蔽电流在同一位置叠加，增强器件对外界磁场响应。

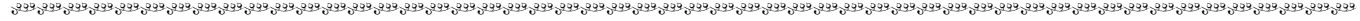
4 结束语

本研究开发了一种基于 Python 的仿真框架，通过结合 SuperScreen 库、NumPy 库和 Matplotlib 库来精确模拟和优化 SQUID 器件的性能。首先，本框架详细模拟了迈斯纳效应，其中仿真结果显示垫圈边界处的磁场仅为 0.23 mT，表明边界效应较小。其次，仿真揭示了由迈斯纳效应引起的超导垫圈边缘区域电流密度显著增加，而内部区域的电流密度几乎为零。此外，电感仿真验证了器件电感对几何参数的高度敏感性，强调了设计中需要权衡多个变量。与传统方法相比，本研究的仿真框架不仅分析了二维超导薄膜的量子尺度的物理响应效应，还细致考察了设计参数如电感和垫圈内径对器件性能的影响，从而为设计阶段的参数优化提供了理论依据和实用指导，有效减少了不良设计参数在量子尺度对器件的影响。

参考文献：

[1] LIN J, WANG M C, ZHAO J, et al. Review: progress in SQUID-based geophysical precision measurement technology [J]. Journal of Harbin Institute of Technology (New Series), 2020, 27 (3): 101-115.

[2] KLEINER R, KOELLE D, LUDWIG F, et al. Superconducting quantum interference devices: state of the art and applications

- [J]. Proceedings of the IEEE, 2004, 92 (10): 1534 - 1548.
- [3] MITCHELL M W, PALACIOS ALVAREZ S, et al. Colloquium: quantum limits to the energy resolution of magnetic field sensors [J]. Reviews of Modern Physics, 2020, 92 (2): 1 - 17.
- [4] ARIYARATNE A, BLUVSTEIN D, MYERS B A, et al. Nanoscale electrical conductivity imaging using a nitrogen-vacancy center in diamond [J]. Nature Communications, 2018, 9 (1): 2406 - 2413.
- [5] BOTO E, MEYER S V, SHAH V, et al. A new generation of magnetoencephalography: room temperature measurements using optically-pumped magnetometers [J]. NeuroImage, 2017, 149: 404 - 414.
- [6] ARRIDGE C S, EASTWOOD J P, JACKMAN C M, et al. Cassini in situ observations of long-duration magnetic reconnection in saturn's magnetotail [J]. Nature Physics, 2015: 268 - 271.
- [7] CHEN L, WANG H, LIU X, et al. A high-performance Nb nano-superconducting quantum interference device with a three-dimensional structure [J]. Nano Letters, 2016, 16 (12): 7726 - 7730.
- [8] GRANATA C, VETTOLIERE A, et al. Nano superconducting quantum interference device: a powerful tool for nanoscale investigations [J]. Physics Reports, 2016, 614: 1 - 69.
- [9] 商志刚, 严晓芳, 左涛. 超导量子干涉技术与测磁应用 [M]. 北京: 化学工业出版社, 2018.
- [10] CLARKE J, BRAGINSKI A. The SQUID handbook [M]. USA: Wiley, 2006.
- [11] DRUNG D. Introduction to Nb-Based SQUID sensors [M]. Pan Stanford Publishing Pte. Ltd, 2016: 247 - 249.
- [12] FORSTNER S, KNITTEL J, SHERIDAN E, et al. Sensitivity and performance of cavity optomechanical field sensors [J]. 光子传感器: 英文版, 2012, 2 (3): 12: 259 - 270.
- [13] CLARKE J. SQUID fundamentals, SQUID sensors: fundamentals, fabrication and applications [M]. 6 Springer Science, 1996, 335 - 340.
- [14] JACKMAN K, FOURIE C. Tetrahedral modeling method for  (上接第 234 页)
- [14] GEVA Y, SHAPIRO A. A combined potential function and graph search approach for free gait generation of quadruped robots [C] //2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2012: 5371 - 5376.
- [15] SUN J, TANG J, LAO S. Collision avoidance for cooperative UAVs with optimized artificial potential field algorithm [J]. IEEE Access, 2017, 5: 18382 - 18390.
- [16] 李克玉, 陆永耕, 鲍世通, 等. 基于改进人工势场法的无人机三维动态环境避障航迹规划 [J]. 上海电机学院学报, 2020, 23 (5): 279 - 285.
- [17] ZHANG Y W, LI H, HAN X Z. A heuristic path planning method based on the potential field using probability theory [J]. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience, 2016, 13 (11): 8088 - 8100.
- inductance extraction of complex 3-D superconducting structures [J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2016: 1 - 5.
- [15] KHAPAEV M, KUPRIYANOV MY, GOLDOBIN E, et al. Current distribution simulation for superconducting multi-layered structures [J]. Superconductor Science and Technology, 2002, 16 (1): 24 - 27.
- [16] HORN B V, MOLER K A. SuperScreen: an open-source package for simulating the magnetic response of two-dimensional superconducting devices [J]. Computer Physics Communications, 2022, 280: 108464.
- [17] LIU Q, WANG H, ZHANG Q, et al. All-NbN dc-SQUID magnetometer based on NbN/AlN/NbN Josephson Junctions [J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2016 (99): 1.
- [18] OTT H W. Electromagnetic compatibility engineering [J]. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2009: 776 - 779.
- [19] BARONE A, GIANFRANCOPATTERN. SQUIDS: theory and applications [M]. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2005.
- [20] TERAUCHI N, NOGUCHI S, IGARASHI H. Numerical simulation of SQUID magnetometer considering equivalent electrical circuit of Josephson junction [J]. Physics Procedia, 2014, 58: 200 - 203.
- [21] TERAUCHI N, NOGUCHI S, IGARASHI H. Numerical simulation of DC SQUID taking into account quantum characteristic of Josephson junction [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2015, 51 (3): 1 - 4.
- [22] BRANDT, HELMUT E. Thin superconductors and SQUIDS in perpendicular magnetic field [J]. Physical Review. B, Condensed Matter and Materials Physics, 2005, 72 (2): 1 - 12.
- [23] 陈钊, 何根芳, 张青雅, 等. 具有 Washer 型输入线圈的超导量子干涉放大器的制备与表征 [J]. 物理学报, 2015, 64 (12): 416 - 422.
- [18] 郭一聪, 刘小雄, 章卫国, 等. 基于改进势场法的无人机三维路径规划方法 [J]. 西北工业大学学报, 2020, 38 (5): 977 - 986.
- [19] 陈龚. 无人机协同路径规划三维实时可视化仿真平台 [D]. 南京: 南京理工大学, 2017.
- [20] ZHOU Z, HE X, XU L, et al. Simulation platform for USV path planning based on unity 3D and a algorithm [C] //2019 IEEE International Conference on Signal, Information and Data Processing (ICSIDP). IEEE, 2019: 1 - 6.
- [21] 赵俊峰. 无人机航迹规划虚拟视景仿真系统设计 [D]. 南昌: 南昌航空大学, 2019.
- [22] 田喆童. 低空无人机三维航迹规划与可视化仿真 [D]. 北京: 北京理工大学, 2018.
- [23] 王向雨. 基于 ArcGIS Engine 的无人机三维航迹规划研究 [D]. 重庆: 重庆理工大学, 2021.