

基于刚体模型的光电伺服系统 最优控制方法

卓佳文, 史守峡

(北京遥感设备研究所, 北京 100854)

摘要: 在现阶段的导弹武器系统中, 控制系统大都采用经典 PID 控制器, 但随着控制性能要求的不断提升, PID 控制器在追求响应快速的同时难以兼得跟踪过程平稳; 针对工程中遇到的以上问题, 提出设计最优控制器, 采用线性二次型调节器 (LQR) 求解最优控制律; 通过仿真可以看到, 最优控制器跟踪阶跃信号无静差, 调节时间为 0.034 s, 上升过程平稳无超调; 跟踪斜坡信号和正弦信号时, 跟踪误差远小于, 滞后时长仅为毫秒量级; 最优控制器系统能够实现快速跟踪阶跃、斜坡和正弦输入信号, 且具有较好的跟踪性能; 与经典 PID 控制器相比, 该方法具有更高的控制精度、更好的控制性能和稳定性, 能够解决 PID 控制器在工程中遇到的快速性和平稳性难以兼得的难题。

关键词: 光电导引头; 伺服系统; 最优控制; 线性二次型调节器; 刚体模型

Optimal Control Method of Photoelectric Servo System Based on Rigid Body Model

ZHUO Jiawen, SHI Shouxia

(Beijing Institute of Remote Sensing Equipment, Beijing 100854, China)

Abstract: In current missile weapon systems, most control systems rely on classical PID controllers. However, with the improvement of control performance, it is difficult for PID controllers to simultaneously achieve rapid response and stable tracking processes. To address these challenges in engineering, an optimal controller is designed, and linear quadratic regulator (LQR) is used to solve optimal control law. Simulation results show that the optimal controller exhibits no static difference in tracking step signals, with an adjustment time of 0.034 s and stable rising process without overshoot. When tracking slope and sinusoidal signals, the tracking error is less than 0.10, with a lag time of only a few milliseconds. This optimal controller system achieves rapid and accurate tracking performance for step, slope, and sinusoidal signals. Compared to classical PID controllers, this approach provides higher control precision, better control performance and stability, and effectively solves the issue of PID controllers being difficult to achieve both rapidity and stability in engineering applications.

Keywords: photoelectric seeker; servo system; optimal control; LQR; rigid model

0 引言

近年来, 精确制导武器在现代战场上发挥着越来越重要的作用, 经过实战检验, 精确制导武器已成为高技术战争的主要武器, 在现代作战的战略战术、兵力兵器对比乃至战争结局中都产生了至关重要的影响^[1-2]。导引头制导作为精确制导技术的重要分支, 其上的核心部件为导引头位标器, 又称伺服系统, 是实现导引头对目标探测、隔离弹体运动、保持光轴空间稳定、完成随动和跟踪的核心组件, 其控制精度直接影响着导弹打击目标的精度^[3]。想要导弹精确打击目标, 提高伺服系统的控制性能, 需要精密机构设计以及控制方法等多项关键技术的突破和发展作为保证。

从控制方法角度看, 现阶段的导弹武器系统中, 伺服

系统采用的控制方法大多为经典 PID 控制^[4], 这种控制器具有结构简单、工程中容易实现的特点, 并且能达到较好的控制效果。但随着伺服系统性能要求的不断提升, PID 控制器存在着难以解决的问题。例如, 在实际作战环境中, 需要伺服系统具有尽量快的响应速度, 并且跟踪过程需要尽量平稳。在经典 PID 控制器中, 若改变控制参数为了获得更高的系统响应速度时, 系统跟踪过程会因此发生较大波动且产生较大超调; 若想要系统跟踪过程较为平稳, 无振荡且无超调, 那么系统需要较长的时间才能跟踪上输入信号, 因此经典 PID 控制系统很难兼得系统响应的快速性和平稳性。为了解决这一难题, 现阶段的解决方案是采用分段 PID 控制或模糊 PID 控制等方法, 这些方法实现了整体控制过程的快速和平稳, 但这些改进方法在控制过程中存在分段点, 而分段点处往往不可导, 这为控制系统引入

收稿日期: 2024-04-11; 修回日期: 2024-04-28。

作者简介: 卓佳文(1999-), 女, 硕士研究生。

引用格式: 卓佳文, 史守峡. 基于刚体模型的光电伺服系统最优控制方法[J]. 计算机测量与控制, 2024, 32(6): 180-188.

了不稳定因素和隐患。因此, 需要寻求更优的方法来实现更好的控制性能。

近年来, 国内外专家学者对伺服系统的控制方法做了大量的研究, 如鲁棒控制, 智能控制等, 都取得了一定的效果。Huajie 等人^[5]设计了一种积分滑模变结构控制器。通过仿真结果可以得到, 文章设计的控制器无超调且闭环系统带宽更宽, 虽调节时间有 13 ms 延迟, 但可以认为总体控制性能优于经典控制器。Guo 等人^[6]提出了一种转台三闭环控制系统, 其速度环采用滑模变结构控制策略, 对比 PID 控制, 滑模控制的稳定误差峰值和标准差都降低了两个量级, 当加入扰动时, 滑模控制仍比 PID 控制好。Yang 等人^[7]将自抗扰步长回路作为经典 PID 控制方法的内回路, 利用扩张状态观测器进行主动抗扰。仅使用 PID 控制时, 在 5 Hz, 1° 扰动作用下, 系统抑制能力为 0.028; PID 和自抗扰构成的串级控制器, 在同样的扰动作用下, 系统抑制能力为 0.003 64。可以看出, 自抗扰控制方法能够在传统 PID 控制策略的基础上进一步提高稳定平台的抗扰效果, 达到了较好的视轴稳定精度。Sun 等人^[8]采用神经网络作为补偿器对滑模控制器进行改进, 提出了一种考虑执行器输入限制的神经网络滑模控制方法, 来提高机载光电稳定平台视轴稳定控制方案的可行性和可靠性, 改进的方法控制输出平滑, 无明显抖振现象, 并且能快速跳出执行器的饱和极限, 使系统具有良好的跟踪性能, 保持系统渐进稳定。

本文采用现代控制理论中的最优控制实现导引头伺服系统控制, 期望解决 PID 控制遇到的快速性与平稳性矛盾的问题。最优控制是现代控制理论体系中发展较为成熟的控制方法, 它从实现系统能量最小出发, 寻求最优控制策略。该方法通过选择状态变量来实现建立系统数学模型, 既能反映系统的输入输出特性, 又能描述系统内部的运动特性。经实验证明, 最优控制器控制性能优于经典 PID 控制器^[9]。最优控制在诸多领域都取得了较好的工程应用, 但目前在导引头伺服系统的工程应用中, 该控制方法的研究还比较少。本文以某武器系统光电导引头伺服系统为例, 将最优控制引入伺服控制系统, 期望实现导引头伺服系统更好的控制性能。

1 伺服系统状态空间模型

伺服系统是典型的机电一体化装置, 采用伺服电机驱动负载的方式, 带动其上的光学器件始终对准目标。在本文的研究中, 采用的伺服电机为有限转角力矩电机。力矩电机是一种以恒力矩输出动力的电机, 电机在低速甚至堵转时仍能持续运转而不会造成电机的损坏, 在这种工作模式下, 电机可以给负载持续提供稳定的力矩。有限转角力矩电机的特点是可以精确控制转子的位置和速度, 被广泛应用于需要精密控制和定位的领域。

在本文研究的有限转角力矩电机伺服机构中, 假设伺服系统电机驱动负载的机械传动是刚体运动, 电机带动的

惯性负载直接加在电机轴系上, 忽略电机和负载特性中的间隙和传动弹性^[10]。基于以上假设建立电机和负载的刚体模型, 如图 1 所示。

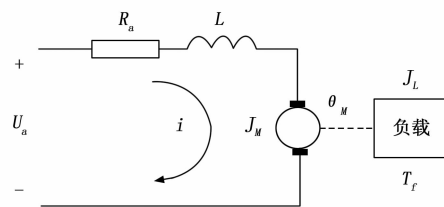


图 1 电机和负载的刚体模型

电机电枢在供电电压 U_a 的作用下, 产生电流 i 、转矩 T_f , 使电机轴以角速度 ω 带动负载转动。在刚体模型下, 电机轴输出角度即为负载转动的角度。建立描述电机模型的电压方程和运动方程为:

$$L \frac{di}{dt} + R_a i + K_e \omega = U_a \quad (1)$$

$$K_m i - f \omega = J \frac{d\omega}{dt} \quad (2)$$

其中: R_a 、 L 分别为电机电枢回路的电阻和电感, K_e 为反电动势系数, K_m 为力矩系数, J 为电机及负载折合到电机轴上的转动惯量, f 为电机及负载折合到电机轴上的粘性摩擦系数。

根据以上方程, 选取状态变量为转角 θ , 角速度 ω , 角加速度 ϵ ; 输出量为转角 θ , 建立伺服系统的状态空间模型。有:

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\omega} = x_3$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\epsilon} = \frac{1}{J} \left[\frac{1}{L} (K_m U_a - K_e K_m \omega - R_a J \frac{d\omega}{dt} - R_a M_f) - \frac{dM_f}{dt} \right] \quad (3)$$

其中: $M_f = f\omega$ 为摩擦力矩。

假设伺服机构中, 伺服系统受到的摩擦力矩为一个恒定常值, 由此有 $\frac{dM_f}{dt} = 0$ 。同时令 $U = U_a - \frac{R_a}{K_m} M_f$; $T_m = \frac{R_a J}{K_m K_e}$; $T_1 = \frac{L}{R_a}$ 。

由以上数学推导过程可以得到伺服系统的状态空间方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_m T_1} & -\frac{1}{T_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T_m T_1 K_e} \end{bmatrix} U$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中: U 为输入量, 是忽略摩擦力矩 M_f 时的电枢电压, T_m 为机电时间常数, T_1 为电磁时间常数。

建立得到系统的状态空间模型后, 判定系统的可控性

和可观测性。可控性、可观测性时先到控制理论中系统最重要的特征，根据可控可观测判据：

$$\text{rank}Q_c = \text{rank}[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = 3 \quad (5)$$

$$\text{rank}Q_o = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = 3 \quad (6)$$

可知系统为可控可观测系统。

2 最优控制器

2.1 线性二次型最优控制问题

最优控制是现代控制理论中的一个重要组成部分，其研究的问题是，对于一个目标控制系统，在给定的性能指标要求下，寻求一个最优控制律 $U(t)$ ，使得性能指标达到极值（极大或极小值）。

求解最优控制问题的方法有边分发、极小值原理、动态规划法等。在实际工程问题中，二次型性能指标的线性系统最优控制问题具有特别重要的意义，它具有鲜明的物理意义，能够代表大量工程实际问题中提出的性能指标要求。这种方法本质上是用较小的控制能量来获得较小误差的最优控制，在线性系统中，以线性二次型为性能指标的最优控制问题，已在国内外的工程实践中得到应用。线性系统中以二次型作为性能指标的最优控制问题有两大类基本问题，本文所研究的问题属于二者中的跟踪器问题，即控制系统跟踪某个特定函数^[11]。

最优控制本质上是一种特殊的状态反馈，根据公式(5)可知系统为可控系统，因此可实现设计最优控制器。以下进行线性二次型最优控制求解推导^[12]。

设二次型性能泛函：

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty}$$

$$[(Y_r(t) - Y(t))^T Q (Y_r(t) - Y(t)) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (7)$$

引入拉格朗日乘子 $\lambda(t)$ ：

$$\lambda(t) = [\lambda_1(t) \quad \lambda_2(t) \quad \cdots \quad \lambda_n(t)]^T \quad (8)$$

并定义哈密顿函数：

$$H(X, U, \lambda, t) = \frac{1}{2} (Y_r(t) - Y(t))^T Q (Y_r(t) - Y(t)) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) + \lambda^T A X(t) + \lambda^T B U(t) \quad (9)$$

则性能泛函可改写为：

$$J = \int_0^{+\infty} [H(X, U, \lambda, t) - \lambda^T \dot{X}(t)] dt \quad (10)$$

对改写后的性能泛函求变分，要想性能泛函取得极小值，可令 $\delta J = 0$ ，求得：

$$\begin{cases} U^*(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t) \\ \dot{\lambda}(t) = -A^T \lambda(t) - C^T Q (C X(t) - Y_r(t)) \\ \lambda^T(t_f) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

设 $X(t)$ 与 $\lambda(t)$ 的关系为：

$$\lambda(t) = P(t) X(t) - g(t) \quad (12)$$

其中： $P(t)$ 为 $n \times n$ 维的待定矩阵， $g(t)$ 为与 $Y_r(t)$ 有关且与 $\lambda(t)$ 同维的向量。

对 $\lambda(t)$ 求导并联立公式 (11)，可求得 Riccati 方程：

$$\dot{P}(t) = -P(t) A - A^T P(t) + P(t) B R^{-1} B^T P(t) - C^T Q C \quad (13)$$

和

$$\dot{g}(t) = (P(t) B R^{-1} B^T - A^T) g(t) - C^T Q Y_r(t) \quad (14)$$

求解以上两微分方程，最终可得最优控制律 $U^*(t)$ 为：

$$U^*(t) = -R^{-1} B^T P(t) X(t) + R^{-1} B^T g(t) \quad (15)$$

选取合适的 Q 、 R 使得系统输出满足性能指标，即可得到最优控制 $U^*(t)$ 。由于本文研究的系统为单输入单输出系统，因此加权系数矩阵 Q 、 R 均为退化为一维常数，记为 q 、 r 。

2.2 求解最优控制律

由最优控制律 $U^*(t)$ 的表达式(15)可以看到，若求得 $P(t)$ 矩阵和 $g(t)$ 矩阵，就可得到最优控制律 $U^*(t)$ ，下面分别讨论求解公式(13)获得矩阵 $P(t)$ 和求解公式(14)获得矩阵 $g(t)$ 。

2.2.1 讨论 Riccati 微分方程解的性质

经理论验证^[11]，Riccati 微分方程求解出的 $P(t)$ 曲线满足以下特点：终端时刻 $P(t_f) = 0$ ，在接近终端时 $P(t)$ 变化剧烈；在远离终端的区域， $P(t)$ 近似趋于一个常值 P 。由于最优控制的有限控制区总是远离终端的，因此可将控制过程中的 $P(t)$ 看作一个稳态常值，即 $P(t) = P$ ，从而 P 满足 $\dot{P}(t) = 0$ 时的 Riccati 微分方程：

$$P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P + C^T Q C = 0 \quad (16)$$

显然，在此条件下微分方程退化为代数方程，通过求解 Riccati 代数方程 (16)，即可得到稳态值 P 。由此，求解 Riccati 微分方程获得矩阵 $P(t)$ 就简化为了求解 Riccati 代数方程获得矩阵 P ，用代数方程的解 P 代替微分方程的解 $P(t)$ 。以下为求解代数方程的计算过程。

已知 P 矩阵为正定对称阵，设 P 矩阵为：

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix}$$

将 P 、 A 、 B 、 C 矩阵代入 Riccati 代数方程，展开后得到包含 P 矩阵各元素的代数方程，通过求解代数方程可得到 P 矩阵各元素的值。其中，求解元素 P_{33} 的方程是一个高次代数方程：

$$P_{33}^4 - \frac{4k_2 r}{h^2} P_{33}^3 + \frac{4r^2(k_2^2 - k_1)}{h^4} P_{33}^2 + \frac{8r^3}{h^6} \left[k_1 k_2 - \frac{h^2}{r} P_{13} \right] P_{33} + \frac{8k_2 r^3}{h^6} P_{13} = 0 \quad (17)$$

利用 Matlab 中的 roots 函数，可以快速得到高次代数方程的解进而得到 P_{33} 。但通过 roots 函数求解 P_{33} 有诸多弊端，例如 roots 函数会同时求出方程的所有可能解，需要进

一步人工筛选出其中的非负实根, 才能得到 P_{33} 的值; 其次, 在后续的工程应用中, 控制器模型需要用 C 语言编写进 DSP 系统, 但 C 语言程序只能进行基础的运算而无法使用现成的计算函数。基于以上原因, 考虑利用牛顿迭代法求解 P_{33} , 牛顿迭代法可直接求得 P_{33} 的值, 同时能够方便后续工程应用。利用牛顿迭代法得到计算结果后, 对比 Matlab 中 roots 函数的解, 验证牛顿迭代法计算结果的准确性。以下为牛顿迭代法的计算过程。

设, 要求解的高次代数方程为 $f(x) = 0$, 根据牛顿迭代方程有:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (18)$$

将含有 P_{33} 的高次代数方程代入, 得到求解 P_{33} 的迭代方程为:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_k - \frac{\left\{ \begin{array}{l} x_k^4 + \frac{800r}{k^2}x_k^3 + \frac{8 \times (200 \times 100 + 400)r^2}{K^4}x_k^2 + \\ \frac{8r^3}{K^6} \left[800 \times 200 - \frac{K^2}{r}P_{13} \right] x_k - \frac{8 \times 200r^3}{K^6}P_{13} \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} 4x_k^3 + \frac{3 \times 800r}{K^2}x_k^2 + \frac{2 \times 8 \times (200 \times 100 + 400)r^2}{K^4}x_k + \\ \frac{8r^3}{K^6} \left[800 \times 200 - \frac{K^2}{r}P_{13} \right] \end{array} \right\}} \quad (19)$$

选取迭代初值为 0, 迭代精度为 10^{-6} , 选取加权系数为 $q=1, r=1$ 。牛顿迭代法的得到解为 $P_{33} = 8.4545 \times 10^{-10}$, Matlab 中 roots 函数求得的非负实根为 8.4545×10^{-10} , 两种方法得到的解一致, 因此牛顿迭代法计算结果准确。

2.2.2 讨论 $g(t)$ 微分方程解的性质

已知微分方程边界条件为 $g(t_r) = 0$, 通过逆时间方向求解微分方程数值解, 得到 $g(t)$ 各元素的变化曲线。从微分方程表达式可以看到, $g(t)$ 的值与系统输入信号 $Y_r(t)$ 有关, 因此以 $g_3(t)$ 为例, 仿真时长为 10 s, 讨论不同输入信号形式下 $g(t)$ 的性质。

当输入为阶跃信号时, 选取加权系数为 $q=1, r=0.1$, 经微分方程求得的 $g_3(t)$ 如图 2 中虚线所示。从曲线变化趋势可以看到, $g(t)$ 在接近终端时变化剧烈, 但在远离终端时, $g(t)$ 趋近于一个常值。由于最优控制的有限控制区间总是远离终端的, 因此在控制过程中, 可以将 $g(t)$ 看作一个稳态常值, 即 $g(t) = g$, 从而 $g(t)$ 满足 $\dot{g}(t) = 0$ 时的微分方程:

$$(PBR^{-1}B^T - A^T)g(t) = C^T Q Y_r(t)$$

(20)

显然, 在此条件下微分方程退化为代数方程, 代数方程的解为图 2 中实线所示。因此可通过求解代数方程, 得到稳态值 g , 作为 $g(t)$ 的值。

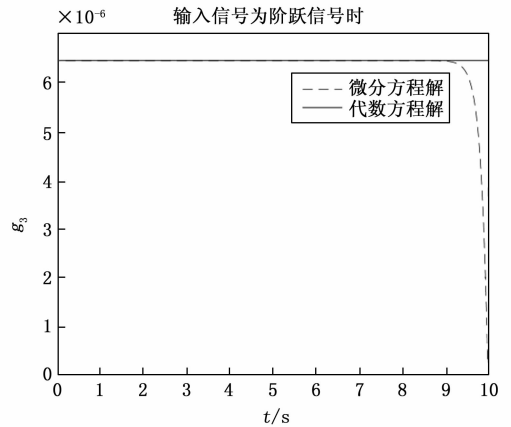


图 2 阶跃输入下 $g_3(t)$ 曲线

当输入为斜坡信号和正弦信号时, 参考输入为阶跃信号时的求解思路, 尝试求得代数方程的解, 与微分方程的解作对比, 观察两者的关系。以 $g_3(t)$ 为例, 微分方程和代数方程解的关系如图 3 所示, 微分方程的解为图中虚线所示, 代数方程的解为图中实线所示。从图中曲线变化趋势可以看到, 微分方程的解在接近终端时 $g(t)$ 变化剧烈, 但在远离终端时, 代数方程解与微分方程解的变化趋势一致, 且数值非常接近。经进一步仿真发现, 改变加权系数可以

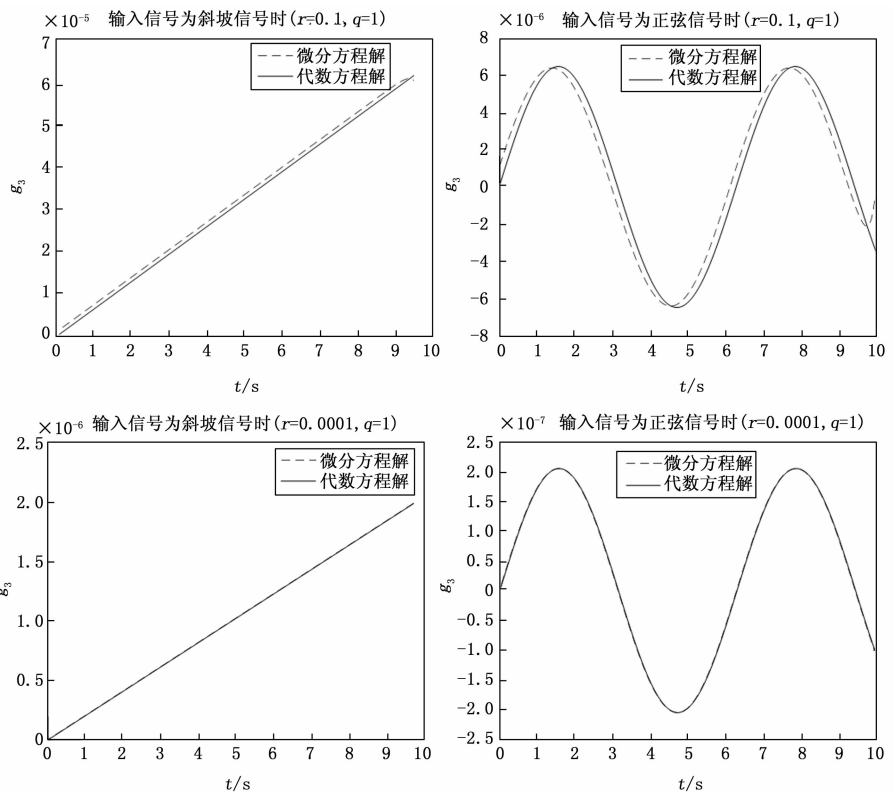


图 3 输入为斜坡信号和正弦信号时 $g_3(t)$ 曲线对比图

改变代数方程的近似程度。如图 3 所示，上侧两幅图的加权系数为 $q=1, r=0.1$ ；下侧两幅图的加权系数为 $q=1, r=0.0001$ ，可以看到 r 越小，代数方程的解与微分方程的解越接近，当 r 减小至 0.0001 时，代数方程解与微分方程解近乎重合。因此当输入为斜坡信号和正弦信号时，可以通过求解代数方程 (20) 来简化求解微分方程。

综合以上分析，在求解 $g(t)$ 时，不论输入信号为何种形式，均可将微分方程退化为代数方程，直接求解代数方程得到 $g(t)$ 。

2.3 降维状态观测器设计

最优控制本质上是一种特殊的状态反馈，引入状态反馈可以得到较好的系统性能，而实现状态反馈的前提是状态变量必须能够用传感器测量得到。但由于种种原因，状态变量并不是都可测量得到的。针对这种问题，我们可以根据系统的输入量、输出量和系统的结构参数来实现系统的状态重构，实现状态重构的系统称为状态观测器，全维状态观测器的表达式为：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - \hat{y}) \quad (21)$$

在本文研究的系统中，状态变量 $x_1 = \theta, x_2 = \omega$ 均可通过传感器测量得到，但状态变量 $x_3 = \dot{\omega}$ 为角加速度，不可直接测量得到。因此可以构造一个低阶的观测器估计 x_3 ，只对这一个状态变量进行状态重构，这样的观测器为降维观测器。构造降维观测器的步骤如下。

将系统的状态变量按照是否可测量得到，作如下分割：

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix}$$

其中： $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 为可测量量， $X_2 = [x_3]$ 为需构建状态观测器的量。于是状态重构时，只需对 X_2 进行重构即可。

与状态变量的分割方式一致，状态空间方程为可写为对应的分割形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} U \quad (22)$$

$$Y = [I \ 0] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_1$$

得到需要状态重构的子系统为：

$$\begin{cases} \dot{X}_2 = A_{22}X_2 + A_{21}Y + B_2U \\ Z = A_{12}X_2 \end{cases} \quad (23)$$

根据公式 (6) 可知原系统为可观测系统，因此其子系统也为可观测系统，则可任意配置子系统的状态观测器的特征值。

根据全维状态观测器的形式可得到降维状态观测器为：

$$\begin{aligned} \dot{W} &= (A_{22} - GA_{12})W + (B_2 - GB_1)U + \\ &\quad [(A_{22} - GA_{12})G + A_{21} - GA_{11}]Y \quad (24) \\ \hat{X}_2 &= W + GY \end{aligned}$$

其中： $G = [g_1 \ g_2]$ 。

根据降维状态观测器的形式可以看到，应当合理选择 G 的取值，使得 $(A_{22} - GA_{12})$ 的特征值都具有负实部，这时公式 (24) 就是子系统 (23) 的降维状态观测器。

3 仿真分析

本文采用的伺服电机为某型有限转角力矩电机，伺服机构各项参数如表 1 所示。

表 1 伺服机构参数

电阻 R/ω	5.15
电感 L/mH	/
转动惯量 $J/(\text{Nm}/\text{rad}/\text{s}^2)$	0.00013~0.00015
力矩系数 $Km/(\text{Nm}/\text{A})$	0.12~0.13
反电动势系数 $Ke/(\text{V}/\text{rad}/\text{s})$	0.49
机电时间常数 Tm/s	0.0113
电磁时间常数 Tl/s	0.00368

将参数具体数据代入系统状态空间模型 (4)，可得本文研究的伺服系统的状态空间方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24048 & -271 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 49076 \end{bmatrix} U \quad (25)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

为计算和书写方便，记状态空间方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} U \quad (26)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

其中： $k_1 = -24\ 048, k_2 = -271, h = 49\ 076$ 。

本文使用的仿真工具是 Matlab，通过编写 m 文件进行最优控制器仿真。求解最优控制律的步骤为，输入系统状态空间模型后，不断试取加权系数 q, r ，计算线性二次型性能指标下的控制律，根据得到的系统响应曲线重复此过程，直到获得满意的系统响应。

3.1 讨论 q, r 对系统响应的影响

由于仿真过程为试取加权系数获得最优控制律，因此首先需要研究清楚 q, r 取值分别会对系统响应造成怎样的影响，以下内容将对 q, r 分别进行讨论。

1) 固定 $r=1$ 不变，改变 q 的值，分析 q 对系统响应的影响。如图 4 所示，令 q 取 0.1、1、10、100，可以看到，

随着 q 取值的增大, 系统阶跃响应越快, 但 q 过大会使响应产生超调。因此试取 q 时可以在不产生超调的情况下, 尽量增大 q 的取值来加快系统响应速度。

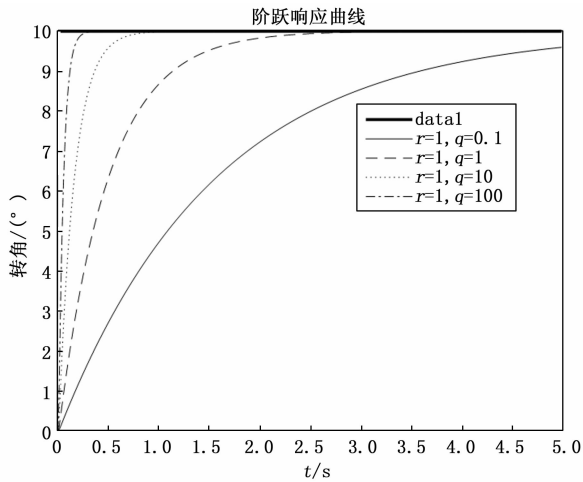


图 4 $r=1$, q 取不同值时的比较曲线

2) 固定 $q=1$ 不变, 改变 r 的值, 分析 r 对系统响应的影 响。如图 5 所示, 令 r 取 10、1、0.1、0.01, 可以看到, 随着 r 取值的减小, 系统阶跃响应越快, 但 r 过小会使响应产生超调。因此试取 r 时可以在不产生超调的情况下, 尽量减小 r 的取值来加快系统响应的速度。

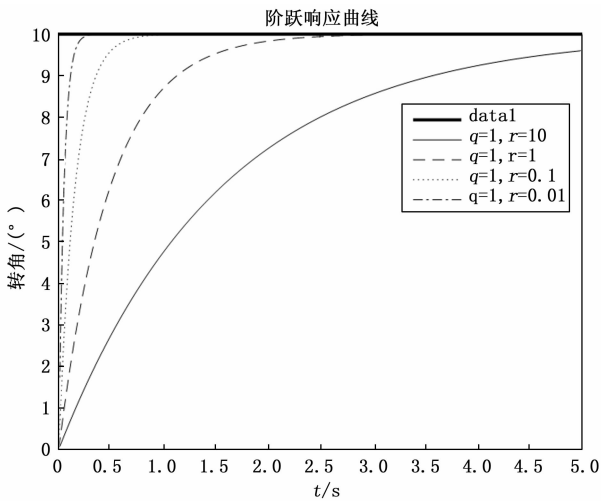


图 5 $q=1$, r 取不同值时的比较曲线

经仿真实验发现, 当 q 与 r 的比值保持不变时, 不论 q 和 r 分别取何值, 响应曲线均相同。保持 $q/r=100$ 不变, 令 q 和 r 取几组不同的取值, 分别为 $r=1, q=100$; $r=0.1, q=10$; $r=0.01, q=1$ 。如图 6 所示, 不同取值得到的曲线完全重合在一起, 可以认为 q 和 r 对系统响应的影 响是等价的。由此, 求取最优控制律时可选择 q 和 r 其中一 个系数保持不变, 仅试取另一个系数来得到满意的系统响应 结果, 这样可大大减少试取加权系数的工作量。本文选择 固定 $q=1$ 不变, 通过改变系数 r 分析响应曲线变化, 进而

寻求最优控制律。

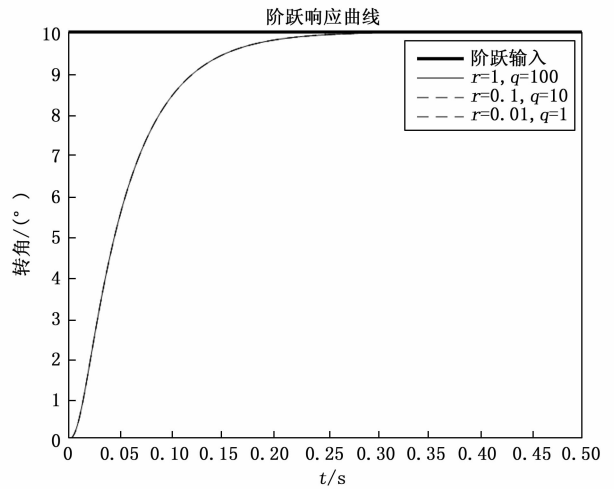


图 6 $q/r=100$, r 和 q 取不同值时的比较曲线

3.2 降维状态观测器

将系统状态空间模型 (26) 代入降维观测器 (24), 可 以得到本文研究系统的降维观测器的表达式为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}} &= (k_2 - g_2)\mathbf{W} + h\mathbf{U} + (k_2 - g_2)g_1x_1 + \\ & \quad [(k_2 - g_2)g_2 + k_1 - g_1]x_2 \quad (27) \\ \hat{x}_3 &= \mathbf{W} + g_1x_1 + g_2x_2 \end{aligned}$$

根据降维状态观测器表达式, 需要合理选择 $\mathbf{G} = [g_1 \ g_2]$, 使得 $(k_2 - g_2)$ 的所有特征值具有负实部, 即 $(k_2 - g_2) < 0$ 。同时, 为保证观测器输出量 \hat{x}_3 收敛的快速性, 通常选取特征根位于负实部 10 个单位处, 由此可令 $(k_2 - g_2) = -10$, 解得:

$$\begin{cases} g_1 = \text{const} \\ g_2 = k_2 + 10 \end{cases} \quad (28)$$

由于 g_1 不影响特征根取值, 可取任意值, 因此为计算 方便令其为 0。由此, 本系统的降维观测器的最终表达式 为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}} &= -10\mathbf{W} + h\mathbf{U} + (-10g_2 + k_1)x_2 \\ \hat{x}_3 &= \mathbf{W} + (k_2 + 10)x_2 \end{aligned} \quad (29)$$

3.3 仿真结果

仿真时以典型信号 (单位阶跃信号、单位斜坡信号、 正弦信号) 作为输入, 不断试取加权系数 r (q 始终等于 1) 直到获得满意的响应曲线, 讨论最优控制器的控制性能。 根据前文分析得到的结论, r 取值越小系统跟踪效果越好, 因此仿真时不断减小 r 取值, 观察响应曲线的变化, 得到控 制性能较好时加权系数的取值。下文对不同的输入信号分 别进行讨论。

1) 单位阶跃输入: 当输入为单位阶跃信号时, 令 r 分 别取 0.001、0.000 5、0.000 1, 如图 7 所示, 系统响应始 终无静差, 且随着 r 取值减小, 响应速度变快, 但 r 过小会 导致响应曲线产生超调。经试取发现, 当 $r=0.000 5$ 时, 系 统对阶跃信号的跟踪性能较好, 系统响应较快且没有超调,

此时响应无静差，调节时间（稳态值 90%）为 0.034 s。

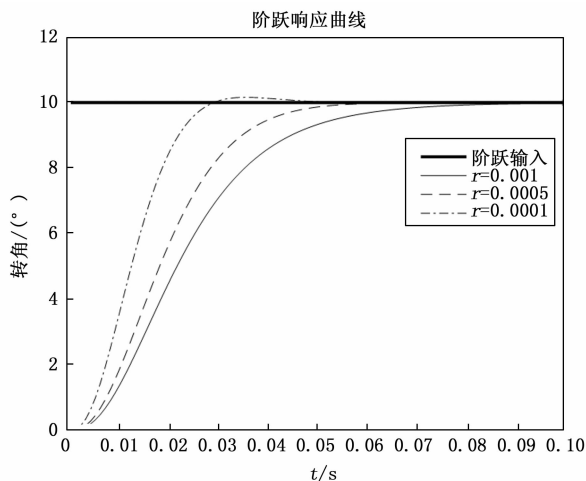


图 7 阶跃响应曲线

2) 单位斜坡输入：当输入为单位斜坡信号时，令 r 分别取 1、0.001、0.000 1，观察响应曲线变化。如图 8 所示，随 r 取值不断减小，响应曲线不断靠近输入信号，即跟踪误差减小，且响应曲线跟踪输入信号的速度也变快。但不论 r 取值多小，系统响应始终存在跟踪误差且无法消除。当 $r=0.000 1$ 时系统对斜坡信号的跟踪性能较好，系统在 0.035 s 后跟踪上输入信号，跟踪误差保持在 0.0127° 左右，可看作系统跟踪输入信号滞后 0.013 s。

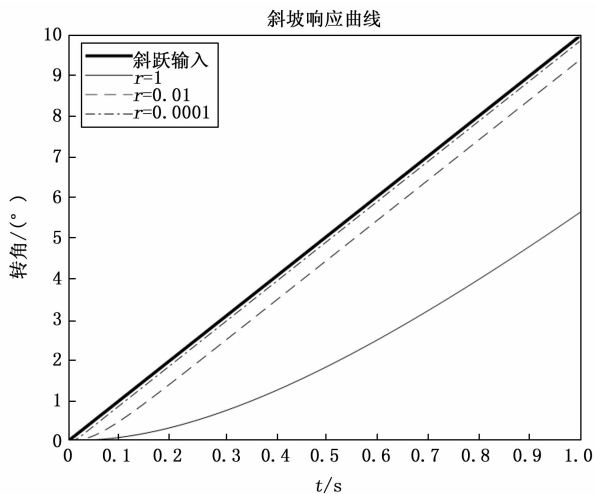


图 8 斜坡响应曲线

3) 幅值为 1° ，频率为 $\frac{1}{2\pi}$ Hz 的正弦输入：当输入为正弦信号时，令 r 分别取 1、0.001、0.000 1。如图 9 所示，随 r 取值的减小，系统响应峰值误差减小，响应曲线不断靠近输入信号，即跟踪误差减小。与斜坡响应类似，不论 r 取值多小系统始终存在跟踪误差无法消除。当 $r=0.000 1$ 时系统对阶跃信号的跟踪性能较好，系统在 0.023 s 后跟踪上输入信号，峰值处跟踪误差为 0，峰值以外的区域跟踪误差约为 $0.012 9^\circ$ ，响应的过零滞后时长为 0.012 s。

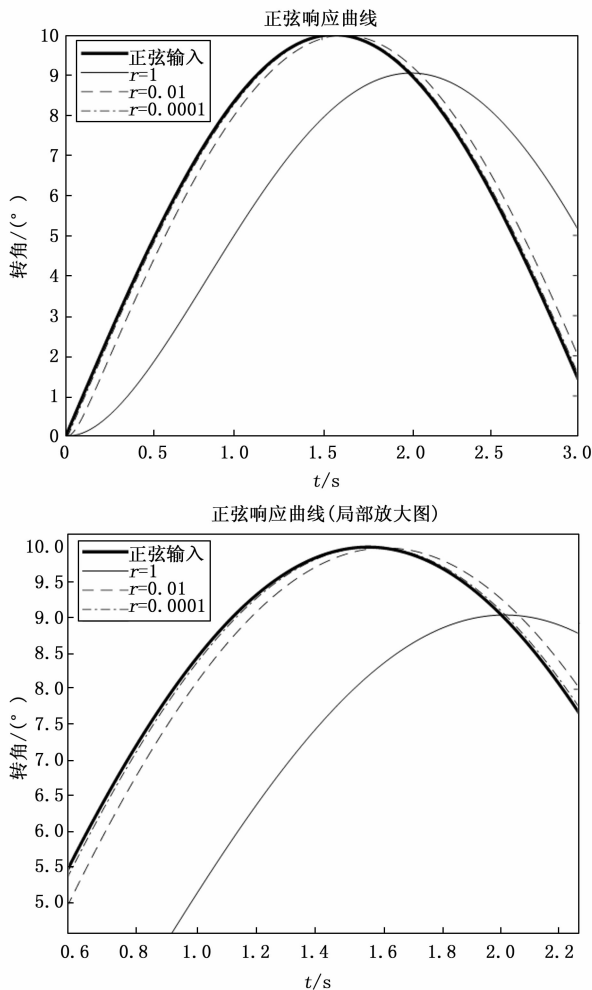


图 9 正弦响应曲线及局部放大图

综合以上仿真结果，最优控制器能够良好跟踪阶跃、斜坡和正弦信号。其中，从阶跃响应曲线可以看到，最优控制器可以做到调节时间短的同时没有超调量，很好地实现了控制过程既快速又平稳的目标。同时，最优控制器能够快速跟踪斜坡和正弦信号，虽然存在小量跟踪误差，但跟踪误差远小于 0.1° ，满足工程精度要求。

4 模型参数拉偏

在实际的伺服机构以及伺服系统工作环境中，电机参数往往不与仿真模型中的数据完全相符，或由于工作环境复杂，系统所受过载或外力会发生变化，导致系统负载特性会随之改变。由此，对设计好的控制模型进行参数拉偏实验就显得尤为必要且重要。本文选择拉偏的模型参数为：电磁时间常数 T_1 和转动惯量 J ，拉偏值为 $\pm 20\%$ 。

4.1 电磁时间常数拉偏

电机在生产加工过程中，但其内部的电阻和电感值会有小幅变化，这会对电机的电磁时间常数造成较大影响，进而影响伺服系统的模型参数。考虑对电磁时间常数进行拉偏实验，分析电机参数变化对控制系统造成的影响。如

图 10 所示, 电磁时间常数拉偏 $\pm 20\%$ 时, 系统响应受到的影响很小, 可以忽略不计。若电磁时间常数增大到原来的 1.5 倍, 斜坡响应和正弦响应结果发散。可以认为, 当电磁时间常数小范围变化时, 控制系统不会受到电磁时间常数变化带来的影响。

4.2 转动惯量拉偏

在实际飞行环境中, 作用在伺服系统上的力和过载会随时发生变化, 导致系统的转动惯量也随之改变。在仿真时需要模拟实际飞行环境中负载特性发生的变化, 改变转动惯量取值, 分析系统受到的影响^[13]。如图 11 所示, 当输入为阶跃信号时, 转动惯量越大系统响应越慢, 转动惯量变化会对响应调节时间产生毫秒量级的影响, 但不会导致响应曲线产生超调量和稳态误差。当输入为斜坡和正弦信号时, 转动惯量变化对系统响应造成的影响很小, 可以忽略不计。总的来说, 可以认为控制系统能够克服转动惯量变化带来的影响。

5 模型改进

本文的研究, 是在建立伺服系统刚体模型的基础上设计最优控制器。刚体模型中, 假设电机驱动负载的机械传动是刚体运动, 忽略了电机与负载间的传动弹性; 同时在建立状态空间模型时, 忽略了系统中的摩擦力矩。基于以上假设, 本文设计的最优控制器得到了较好的控制性能。但在任何的系统中, 一定存在摩擦, 并且传动机构并不是理想的刚体, 一定存在着弹性变形。并且在实际的伺服系统中, 摩擦因素与传动弹性是影响控制系统性能的非线性因素^[14]。由于摩擦因素的存在, 会使控制回路中存在死区环节; 而传动弹性则会使系统发生机械谐振, 严重时会造成伺服机构损坏, 在系统运行中, 必须避免机械谐振发生^[15]。因此可以在本文研究的最优控制器的基础上, 考虑研究伺服系统中的摩擦特性和传动弹性因素^[16-17], 在本文建立的刚体模型的基础上进一步增加非线性环节, 使得系统模型更加接近实际产品, 设计更加稳定、鲁棒性更好且能克服机械谐振等非线性因素的控制性能更优的控制器^[18-20]。

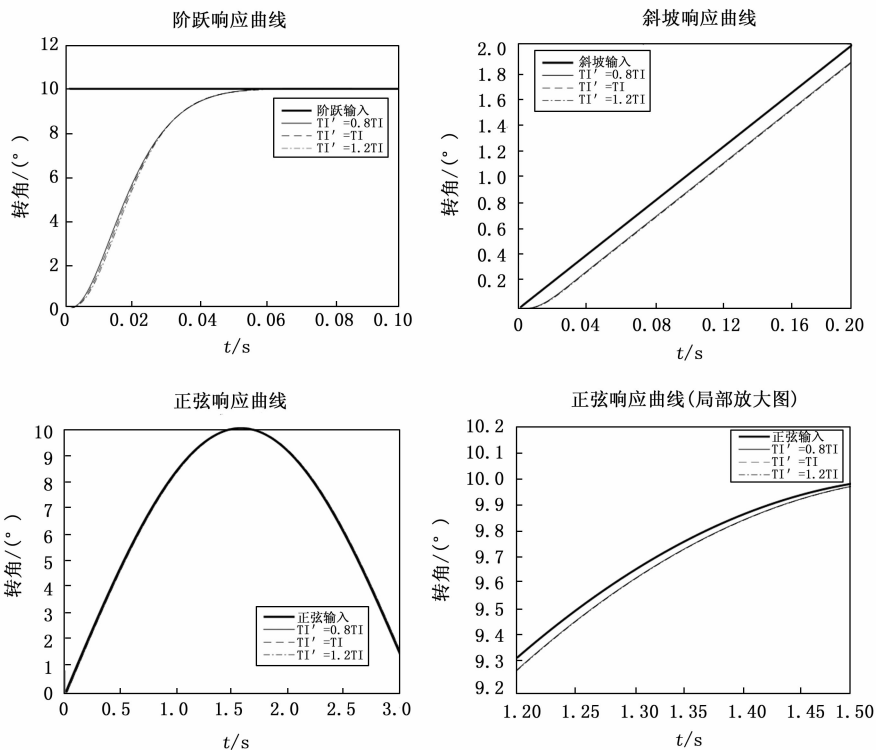


图 10 电磁时间常数拉偏对比曲线

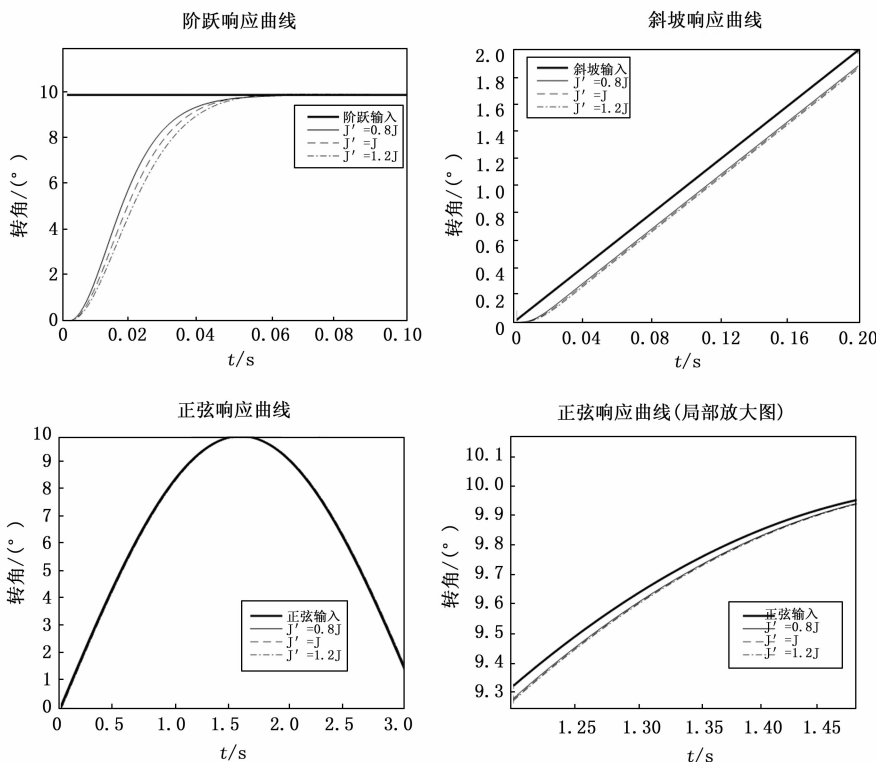


图 11 转动惯量拉偏对比曲线

6 结束语

本文基于光电伺服系统, 在建立伺服系统刚体模型的

基础上, 设计了最优控制器, 实现了光电导引头伺服系统控制。文中选取线性二次型性能指标, 通过合理选择加权系数 q 和 r , 寻找到了最优控制律, 实现了较好的控制结果。通过仿真结果图 7~9 可以看到, 最优控制器能够快速跟踪阶跃信号、斜坡信号和正弦输入信号, 系统跟踪阶跃信号无静差无超调, 跟踪斜坡信号和正弦信号时虽有较小跟踪误差, 但误差均远小于工程中要求的 0.1° , 滞后时长仅为毫秒量级。最优控制器阶跃响应无静差如图 12 所示, 调节时间仅有 0.034 s , 上升过程平稳快速无超调量, 与经典 PID 控制器的阶跃响应相比, 很好地解决了工程中遇到的 PID 控制系统在快速性与平稳性中难以兼得的问题。此外, 文中还通过对模型参数拉偏, 探究了最优控制器的稳定性。通过仿真结果图 10 和图 11 可以看到, 当电磁时间常数和转动惯量等伺服系统参数小幅变化时, 系统受到的影响很小可以忽略, 由此可以证明本文设计的最优控制器具有较好的稳定性, 当电机参数或伺服系统工作环境发生变化时, 控制系统能够克服变化使得跟踪响应不受影响。综合以上研究与分析, 本文设计的最优控制器具有较高的控制精度、较好的控制性能和稳定性, 对导引头伺服控制系统研究具有一定的借鉴作用和应用价值。

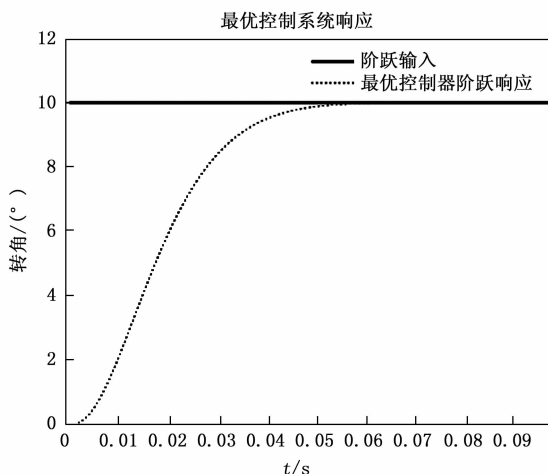


图 12 最优控制阶跃响应

参考文献:

- [1] LI J, MEI Z, SHEN Q, et al. Analysis on core capabilities and key technologies of future air defense anti-missile operations [C] //International Conference on Man-Machine-Environment System Engineering. Singapore: Springer Singapore, 2020: 1047-1054.
- [2] WHITE M E, PRICE W R. Affordable hypersonic missiles for long-range precision strike [J]. Johns Hopkins APL Technical digest, 1999, 20 (3): 415-423.
- [3] 李保平. 精确制导技术在未来制导兵器发展中的应用预测(一) [J]. 红外与激光工程, 1996 (2): 1-7.
- [4] 张平. 机载/弹载视觉导引稳定平台的建模与控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2011.
- [5] HUAJIE H, DAPENG F, BO J. The research of control system based on sliding mode variable structure control for the photoelectric stabilized platform [C] //2010 International Conference on Digital Manufacturing & Automation. IEEE, 2010, 2: 766-769.
- [6] GUO B, KE F, YU X, et al. Control strategy for photoelectric stabilized platform based on sliding mode variable structure control [J]. Acta Armamentarii, 2022, 43 (8): 1874.
- [7] YANG D, WANG X, HU F, et al. On disturbance rejection on a photoelectrical stabilized platform [C] //Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. IEEE, 2011: 6345-6349.
- [8] SUN M, WANG C, LIU X, et al. Neural network sliding mode control of airborne photoelectric stabilized sighting platform [C] //2019 Chinese Control And Decision Conference (CCDC). IEEE, 2019: 3157-3161.
- [9] 刘坤. 基于最优 LQR 的直流电机控制技术的研究 [J]. 中国信息化, 2013 (4): 98-99.
- [10] 陈明俊, 李长红, 杨燕. 武器伺服系统工程实践 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2013.
- [11] 周凤岐, 周军, 郭建国. 现代控制理论基础 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2011.
- [12] 邱德润. 求解线性二次型最优控制问题的较简便途径 [J]. 常德高等专科学校学报 (自然科学版), 1999 (2): 9-11.
- [13] 冯晓媛. 某舱段转动惯量测量系统研制 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2022.
- [14] 刘丽兰, 刘宏昭, 吴子英, 等. 机械系统中摩擦模型的研究进展 [J]. 力学进展, 2008 (2): 201-213.
- [15] 夏超, 那学智, 柴晓慧, 等. 伺服系统机械谐振机理与抑制方法分析 [J]. 导航定位与授时, 2016, 3 (1): 29-35.
- [16] 刘磊. 光电平台中的 LQ 控制方法研究 [D]. 中国科学院研究生院 (长春光学精密机械与物理研究所), 2013: 39-47.
- [17] 克晶, 苏宝库, 曾鸣. 一种直流力矩电机系统的自适应摩擦补偿方法 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2003 (5): 536-540.
- [18] JI J K, LEE D C, SUL S K. LQG based speed controller for torsional vibration suppression in 2-mass motor drive system [C] //Proceedings of IECON'93-19th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics. IEEE, 1993: 1157-1162.
- [19] JI J K, SUL S K. Kalman filter and LQ based speed controller for torsional vibration suppression in a 2-mass motor drive system [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1995, 42 (6): 564-571.
- [20] SONG S H, JI J K, SUL S K, et al. Torsional vibration suppression control in 2-mass system by state feedback speed controller [C] //Proceedings of IEEE International Conference on Control and Applications. IEEE, 1993: 129-134.