

基于观测器的半马尔可夫跳变 系统模型参考跟踪控制

马奇¹, 嵇小辅²

(1. 江南大学 物联网工程学院, 江苏 无锡 214122;

2. 江南大学 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122)

摘要: 为了解决状态信息不可获取的半马尔可夫跳变系统跟踪控制问题, 引入状态观测器, 提出通过模态依赖的状态观测器去估计系统的状态; 为了获得期望的跟踪效果, 采用前馈-反馈复合控制思想, 提出基于状态观测器的模型参考输出跟踪控制器; 通过构建误差系统与参考模型的动态耦合关系, 建立了保证闭环系统随机稳定并满足 H_∞ 跟踪性能的充分条件; 在此基础上, 基于凸优化技术设计了观测器与控制器增益的协同求解算法; 为评估所提算法的综合性能, 通过结合数值仿真与对比测试验证了所提方法的可行性和优越性。

关键词: 半马尔可夫跳变系统; 输出跟踪控制; 状态观测器; 鲁棒 H_∞ 控制; 线性矩阵不等式

Observer-based Mode Reference Tracking Control for Semi-Markov Jump Systems

MA Qi¹, JI Xiaofu²

(1. School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China;

2. Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry (Ministry of Education),
Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: In order to solve the problem of tracking and control of semi-Markov jump system where state information is not available, a state observer is introduced, and a modal-dependent state observer is proposed to estimate the state of the system. In order to obtain the desired tracking effect, a model reference output tracking controller based on state observer was proposed by using the feedforward-feedback composite control idea. By establishing the dynamic coupling relationship between the error system and the reference model, sufficient conditions are derived to guarantee both the stochastic stability of the closed-loop system and the H_∞ tracking performance requirements. Building upon this foundation, a cooperative solution algorithm for observer and controller gains is developed through convex optimization techniques, achieving integrated parameter design. To evaluate the comprehensive performance of the proposed algorithm, numerical simulations and comparative experiments were conducted to validate the effectiveness and superiority of the developed method over existing approaches.

Keywords: semi-Markov jump systems; output tracking control; state observer; robust H_∞ control; linear matrix inequality

0 引言

随着现代工业系统的飞速发展, 系统结构变的日趋复杂, 对实际工业生产系统的效率和稳定性要求也越来越苛刻。马尔可夫跳变系统 (MJS, markov jump systems) 是一类特殊的随机切换系统, 它具有描述现实世界中各种系统的强大能力。例如, 电路系统可能会遇到

诸如参数突然变化、某个部件突然失效、外部突然干扰等事故。具有上述特征的系统均可视为 MJS, 具有很大的研究和应用潜力。MJS 作为一种随机混合系统, 包括连续状态和有限系统模态两部分。系统状态由微分方程决定, 系统模态由马尔可夫链控制。在过去的几十年中, 它在制造系统^[1]、水污染模型^[2]、机械系统^[3]、网络控制系统^[4]等领域广泛应用, 并在稳定性与镇定

收稿日期: 2023-12-21; 修回日期: 2024-02-26。

作者简介: 马奇 (1998-), 男, 硕士生。

通讯作者: 嵇小辅 (1979-), 男, 博士, 教授, 硕士生导师。

引用格式: 马奇, 嵇小辅. 基于观测器的半马尔可夫跳变系统模型参考跟踪控制[J]. 计算机测量与控制, 2025, 33(3): 87-96, 104.

性^[5-8]、鲁棒控制^[9-14]、滤波^[15-16]等方面取得了一些成果。例如,文献[5]讨论了完全和部分知道转移概率的延迟离散 MJS 的随机稳定性和镇定问题。文献[6]采用适当的加权方法建立了 MJS 的不太保守的稳定条件,而文献[7]给出了连续和离散 MJS 的稳定和稳定的充分必要条件。文献[8]改进了不确定离散 MJS 的鲁棒稳定性和稳定化方法。在文献[8]的基础上,文献[9]基于线性矩阵不等式设计了时滞离散 MJS 的 H_∞ 控制策略。文献[10]研究了奇异 MJS 的滑模控制问题,旨在将 H_2 性能与滑模动力学分析相结合,以抵抗未知输入的影响。文献[11]针对更复杂的 MJS 提出了鲁棒镇定和 H_∞ 控制方案。文献[12]提出了基于观测器技术的连续 MJS 有限时间输出反馈控制。文献[13]研究了一类具有延迟脉冲和部分未知转移概率的离散时间 MJS 的随机稳定性。文献[14]针对转移概率不确定的 MJS 开发了鲁棒 H_2 和 H_∞ 控制器。文献[15]利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函理论和广义 Finsler 引理提出了时滞 MJS 的指数 H_∞ 滤波。文献[16]讨论了转移概率不完全已知的 MJS 的有限时间滤波。

通常,我们将发生两次相邻模态跳变时刻的时间间隔称为驻留时间。对于 MJS,系统模态的驻留时间服从指数分布^[17],这意味着 MJS 的转移速率与驻留时间无关,这使得 MJS 在许多实际系统中不适用。

由于传统 MJS 驻留时间受限于指数分布的固有约束,学者们开始关注保守性较低的半马尔可夫跳跃系统(S-MJS, semi-Markov jump systems)。S-MJS 通过引入更一般的驻留时间分布机制,显著扩展了对系统模态切换特性的建模能力,比如它的驻留时间可以服从 Weibull 分布。所以, S-MJS 的转移概率矩阵为时变的^[18]。因此, S-MJS 比 MJS 的保守性更低,并且 S-MJS 在建模实际动力系统方面比 MJS 更实用。近年来,随着现代控制理论的发展,人们对 S-MJS 的研究越来越多,出现了许多有趣的成果,如稳定性和镇定性^[19-20]、 H_2 控制^[21]、 H_∞ 控制^[22]、有限时间控制^[11]、事件触发控制^[12]等等。文献[19]假设系统转移速率具有上下界约束,以线性矩阵不等式的形式给出了 S-MJS 控制器存在的充要条件,为 S-MJS 的随机稳定性分析提供了一种可行的数值可解算法。在文献[19]的基础上,文献[20]进一步考虑了时变时滞问题。结合分段分析方法,将时滞划分为小的区间段,提出了保证系统随机稳定性的充分条件。文献[21]通过构造半马尔可夫过程的 Lyapunov 函数,充分利用期望平滑性和变量间的独立性设计了异步控制器,导出了保证 S-MJS 随机稳定性和广义 H_2 性能的充分条件。文献[22]利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法和自由加权矩阵方法,推导出时滞 S-MJS 满足 H_∞ 镇定的充分条件。不同于

Lyapunov 意义下的稳定性,文献[23]研究了具有一般不确定转移速率的 S-MJS 的随机有限时间稳定性和状态反馈控制器设计。在文献[23]的研究成果下,文献[24]采用异步控制方法克服了系统模式与控制器模式之间的不同步现象。同时,引入事件触发机制减轻了通信信道中数据传输的负担,研究了 S-MJS 在执行器故障下的有限时间滑模控制问题。然而,目前关于 S-MJS 的学术探讨主要集中于系统稳定性分析与镇定控制等基础理论层面,对于 S-MJS 的模型参考跟踪控制仍没有得到充分的研究。

模型参考跟踪控制的研究目标是确保受控系统稳定运行的同时实现系统状态(输出)对参考模型状态(输出)的高精度跟踪,相较于传统稳定性控制具有更强的工程实践价值。该技术在航空航天器姿态调控^[26]及机器人轨迹跟踪^[26]等动态系统控制领域展现出显著优势。针对随机切换系统的跟踪控制问题,学界已提出多种创新方法:文献[27]采用时滞区间分解方法,通过构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函解决了含时变时滞的不确定 MJS 鲁棒跟踪问题;文献[28]通过设计离散状态反馈控制策略,有效处理了带外部干扰和输入约束的 MJS 跟踪控制;文献[29]引入干扰观测器对系统不确定性进行动态补偿,实现了模糊 S-MJS 的状态跟踪;文献[30]则创新性地提出模态依赖型事件触发机制,为网络化 S-MJS 的跟踪控制提供了新思路。这些研究成果不仅拓展了跟踪控制理论体系,更在复杂动态系统控制领域具有重要的工程应用意义。值得注意的是,上述文献均是在状态变信息完全可测的情况下展开研究。在控制系统实践中,由于测量方法的局限性或者传感器种类不足,直接测量动态系统的状态可能是困难或昂贵的。这种情况下,采用基于状态观测器的控制策略来研究 S-MJS 跟踪控制成为一个研究方向,目前也很少有人研究状态不可测 S-MJS 跟踪控制。

此外,输出跟踪控制也是控制工程中的一个重要问题。注意到文献[27-29]所考虑的都是状态跟踪控制。而在实际中我们往往需要系统的输出跟踪参考模型的输出。同时,在选取适当的参数下,状态跟踪可以看作是输出跟踪的一种特例。文献[31]研究了奇异 MJS 的输出跟踪问题,其中引入改进的等效输入干扰技术来抑制干扰。文献[32]在事件触发机制下,利用跟踪误差的积分项抑制干扰,研究 S-MJS 跟踪问题。但文献[31-32]的跟踪信号都是直接给定的,这具有一定的局限性。本文考虑更一般的情况,其跟踪信号由参考模型生成,通过模型参考跟踪控制方法研究 S-MJS 的输出跟踪控制。

在工程实践中,系统往往会受到扰动等外部因素的影响, H_∞ 控制方法是抑制扰动的有效手段。 H_∞ 控制的

设计思想是将控制系统中的不确定性视为一种干扰, 通过优化控制器的增益, 使得系统在受到不确定性干扰时仍能保持稳定和良好的性能。因此, H_∞ 控制具有很强的鲁棒性, 适用于各种具有模型摄动的系统。

综上所述, 本文聚焦于具有外部扰动的 S-MJS, 构建基于状态观测器的模型参考 H_∞ 输出跟踪控制框架。本文的创新性工作主要体现在以下三方面: (1) 针对状态信息不可获取的 S-MJS, 引入状态观测器估计系统状态。因此, 本文提出的控制策略在面对实际环境中具有更强的适用性。(2) 提出通过模型参考跟踪控制方法研究 S-MJS 的输出跟踪控制。(3) 不同于文献 [33] 的控制策略, 本文所设计的模型参考跟踪控制器综合前馈—反馈复合控制思想, 其中前馈控制是将参考模型状态前馈到闭环系统实现对参考模型输出信号的跟踪, 反馈控制保证闭环系统稳定。将文献 [33] 控制策略应用到本文, 仿真结果表明本文所提出控制策略的跟踪效果要优于文献 [33] 的效果。

符号: 文中出现的 \mathbb{R}^n 表示 n 维欧氏空间; $\mathbf{P} > 0$ 表示 \mathbf{P} 是正定矩阵; 上标 “ \mathbf{T} ” 和 “ -1 ” 分别表示矩阵的转置和矩阵的逆; \mathbf{I} 表示适当维数的单位矩阵; $\text{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 表示 $n \times n$ 的对角矩阵; $*$ 号表示矩阵的对称部分; $\text{sym}(A) \triangleq A + A^T$ 表示求取矩阵 A 的对称分量; $E\{A\}$ 表示求取 A 期望。

1 系统描述

在给定概率空间 (Ω, Θ, Pr) 下, 研究一类受外部扰动影响的 S-MJS:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\sigma(t))x(t) + B(\sigma(t))u(t) + G(\sigma(t))w(t) \\ y(t) = C(\sigma(t))x(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 表示系统的状态, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 表示控制输入, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ 表示系统输出, $w(t) \in \mathbb{R}^s$ 表示外部扰动且 $w(t) \in L_2[0, \infty)$ 。 $\sigma(t)$ 是具有连续轨迹的 S-MJS 链并且在有限时间集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 中取值, 其状态转移概率满足:

$$Pr\{\sigma_{t+h} = j \mid \sigma_t = i\} = \begin{cases} \lambda_{ij}(h)h + o(h), & i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii}(h)h + o(h), & i = j \end{cases} \quad (2)$$

其中: 转移率 $\lambda_{ij}(h)$ 为时变参数。 $h > 0$ 表示驻留时间。 $i \neq j$ 时, $\lambda_{ij}(h) > 0$ 定义为系统在 t 时刻从模态 i 跳变至模态 j 的时变转移率。 $\lim_{h \rightarrow 0} (o(h)/h) = 0$, $o(h)$ 是由 $\lim_{h \rightarrow 0} (o(h)/h) = 0$ 定义的无穷小量。当 $i = j$ 时, 满足

$\lambda_{ii}(h) = -\sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_{ij}(h)$ 。本文通过假设 $\lambda_{ij}(h)$ 存在已知上下界解决 S-MJS 时变转移率, 即满足 $\lambda_{ij}(h) \in [\underline{\lambda}_{ij}, \bar{\lambda}_{ij}]$, 其中 $\underline{\lambda}_{ij}, \bar{\lambda}_{ij}$ 分别是转移率 $\lambda_{ij}(h)$ 的下界和上界常

数^[34]。 $\mathbf{A}(\sigma(t))$, $\mathbf{B}(\sigma(t))$, $\mathbf{G}(\sigma(t))$ 及 $\mathbf{C}(\sigma(t))$ 为适当维度的常矩阵。为简化后续分析和讨论, 定义 $\sigma(t) = i$, 从而上述矩阵可统一表示为 \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i , \mathbf{G}_i 和 \mathbf{C}_i 。

注 1: 本文假设半马尔可夫过程的驻留时服从 Weibull 分布, 其累积分布函数为:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(t/\alpha)^\beta} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

从 Weibull 分布的累积分布函数可以看出, 其有两个参数: 比例参数 α 和形状参数 β 。当 $\beta = 1$ 时, 此时 Weibull 分布就转换为指数分布。由于指数分布的具有无记忆性, 所以, MJS 的驻留时间是一个常数, 相应的 S-MJS 的驻留时间是时变的。

假设 1^[35]: 定义 T_{n-1} 与 T_n 分别表示第 $n-1$ 次和第 n 次跳变的时刻, 则 $h_n = T_n - T_{n-1}$ 表示系统在第 $n-1$ 次与第 n 次跳变之间的驻留时间。序列 $\{h_n = T_n - T_{n-1}, n \geq 0\}$ 是驻留时间的集合, 期望为 $E\{T_n - T_{n-1}\} < \infty$ 。

为了更具一般性, 本文给出具有模态依赖的输出跟踪参考模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r(\sigma(t))x_r(t) + B_r(\sigma(t))r(t) \\ y_r(t) = C_r(\sigma(t))x_r(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中: $x_r(t) \in \mathbb{R}^n$ 表示参考模型状态, $r(t) \in \mathbb{R}^m$ 表示参考模型输入, 满足 $r(t) \in L_2[0, \infty)$, $y_r \in \mathbb{R}^p$ 表示参考模型输出。令 $\sigma(t) = i$, $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i$ 为适当维数的实常数矩阵, 且 \mathbf{A}_i 是 Hurwitz 的。

设计状态观测器来处理 S-MJS 的状态估计:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(\sigma(t))\hat{x}(t) + B(\sigma(t))u(t) + \\ L(\sigma(t))(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C(\sigma(t))\hat{x}(t) \end{cases} \quad (4)$$

其中: $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态估计, $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ 为观测器输出, $L(\sigma(t))$ 为模态依赖的观测器增益。令 $\sigma(t) = i$, $L(\sigma(t))$ 可表示为 L_i 。接着构造基于状态观测器的输出跟踪控制器, 即:

$$u(t) = K(\sigma(t))\hat{x}(t) + F(\sigma(t))x_r(t) \quad (5)$$

其中: $K(\sigma(t))$ 为状态反馈控制器增益, $F(\sigma(t))$ 为参考模型状态前馈补偿器增益。为方便起见, 令 $\sigma(t) = i$, $K(\sigma(t)), F(\sigma(t))$ 可表示为 K_i, F_i 。

本文旨在设计一种输出跟踪控制器, 使系统的输出信号 $y(t)$ 能够跟踪参考模型的目标输出 $y_r(t)$ 。为此, 定义跟踪误差 $e_r(t) = y(t) - y_r(t)$, 并构建如下性能指标以确保闭环系统满足预设的 H_∞ 性能要求:

$$E\left\{\int_0^\infty e_r^T(t)e_r(t)dt\right\} \leq \gamma^2 E\left\{\int_0^\infty \bar{w}^T(t)\bar{w}(t)dt\right\} \quad (6)$$

其中: $\bar{w}(t) = [w^T(t) \quad r^T(t)]^T$, $\gamma > 0$ 为给定的 H_∞ 跟踪性能指标。跟踪控制系统结构框图如图 1 所示。

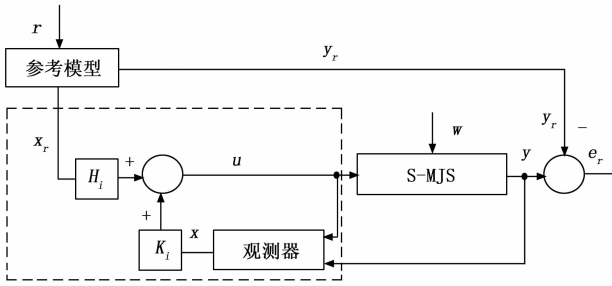


图 1 跟踪控制系统结构框图

定义观测误差 $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ ，由式和可得观测误差方程：

$$\dot{\bar{e}}_x(t) = (A_i - L_i C_i) \bar{e}_x(t) + G_i w(t) \quad (7)$$

令 $\bar{x}(t) = [x^T(t) \quad e_x^T(t) \quad x_r^T(t)]^T$ ，联立式 (1) (3) (4) 和 (5)，可得如下增广系统：

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{G}_i w(t) \quad (8)$$

其中：

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i + B_i K_i & -B_i K_i & B_i F_i \\ 0 & A_i - L_i C_i & 0 \\ 0 & 0 & A_{r_i} \end{bmatrix}, \bar{G}_i = \begin{bmatrix} G_i & 0 \\ G_i & 0 \\ 0 & B_{r_i} \end{bmatrix}.$$

在进入下一节前，本节需预先给出两条核心定义，其为第二部分的理论推导与算法设计提供必要基础。

定义 1^[36]：对于闭环增广系统 (8)，当 $w(t) \equiv 0$ 时，如果对于所有初始状态 x_0 和初始模态 σ_0 满足：

$$E \left\{ \int_0^\infty \bar{x}^T(t) \bar{x}(t) \mid x_0, \sigma_0 \right\} < \infty \quad (9)$$

则系统 (8) 是随机稳定的。

定义 2^[37]：对于闭环增广系统 (8)，当 $w(t) \neq 0$ 时，如果存在常数 $M(x_0, \sigma_0)$ ，且 $M(0, \sigma_0) = 0$ ，满足下面的不等式：

$$E \left\{ \int_0^\infty e_r^T(t) e_r(t) \mid x_0, \sigma_0 \right\} \leq \gamma^2 E \left\{ \int_0^\infty w^T(t) w(t) \right\} + M(x_0, \sigma_0) \quad (10)$$

则系统 (8) 是随机稳定的且满足 (6) 中的 H_∞ 跟踪性能 γ 。

2 主要结果

本节中，我们针对 S-MJS 设计状态观测器和基于该观测器的模型参考 H_∞ 输出跟踪控制器。对于给定的控制器 (5)，推导出实现 H_∞ 输出跟踪性能指标 (6) 的充分条件。

2.1 H_∞ 性能分析

定理 1：对于增广系统 (8)，给定输出跟踪性能抑制指标 $\gamma > 0$ ，如果存在模态依赖矩阵 $P_i > 0$ ，使得对任意模态 $i \in N$ 有 $\Phi_i < 0$ ，其中：

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i + \sum_{j=1}^n P_j \lambda_{ij}(h) + \bar{C}_i^T \bar{C}_i & P_i \bar{G}_i \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (11)$$

则闭环增广系统 (8) 随机稳定且满足 (6) 中的 H_∞ 跟踪性能。

证明：构造李雅普诺夫函数如下：

$$V(\bar{x}(t), i) = \bar{x}^T(t) P_i \bar{x}(t) \quad (12)$$

定义为随机过程李亚普诺夫函数的弱微分子子：

$$\xi V(\bar{x}(t), i) =$$

$$\frac{1}{\Delta} \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \{ E[V(\bar{x}(t+\Delta), \sigma(t+\Delta)) \mid \bar{x}(t), \sigma(t)] - V(\bar{x}(t), \sigma(t)) \} \quad (13)$$

其中： Δ 是很小的正数，应用条件期望，式 (13) 可重写为：

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left\{ \sum_{j=1, i \neq j}^n P_r \{ \sigma(t+\Delta) = j \mid \sigma(t) = i \} \right. \\ & \quad \bar{x}^T(t+\Delta) P_j \bar{x}(t+\Delta) + \\ & \quad P_r \{ \sigma(t+\Delta) = i \mid \sigma(t) = i \} \bar{x}^T(t+\Delta) P_i \bar{x}(t+\Delta) - \\ & \quad \left. \bar{x}^T(t) P_i \bar{x}(t) \right\} = \\ & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{P_r \{ \sigma(t+\Delta) = i, \sigma(t) = i \}}{P_r \{ \sigma(t) = i \}} \bar{x}^T(t+\Delta) P_i \bar{x}(t+\Delta) + \right. \\ & \quad \left. \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{P_r \{ \sigma(t+\Delta) = j, \sigma(t) = i \}}{P_r \{ \sigma(t) = i \}} \bar{x}^T(t+\Delta) P_j \bar{x}(t+\Delta) - \right. \\ & \quad \left. \bar{x}^T(t) P_i \bar{x}(t) \right\} = \\ & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left\{ \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}(N_i(h+\Delta) - N_i(h))}{1 - N_i(h)} \bar{x}^T(t+\Delta) P_j \bar{x}(t+\Delta) + \right. \\ & \quad \left. \frac{1 - N_i(h+\Delta)}{1 - N_i(h)} \bar{x}^T(t+\Delta) P_i \bar{x}(t+\Delta) - \bar{x}^T(t) P_i \bar{x}(t) \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

其中： h 为驻留时间，累积分布函数记为 $N_i(t)$ ， q_{ij} 表征系统模态切换的概率强度。 $\bar{x}(t+\Delta)$ 可以近似简化为 $\bar{x}(t+\Delta) = \bar{x}(t) + \Delta \dot{\bar{x}}(t) + o(\Delta)$ 。同时，由累积分布函数的性质，可以得到：

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1 - N_i(h+\Delta)}{1 - N_i(h)} = 1$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{N_i(h+\Delta) - N_i(h)}{1 - N_i(h)} = 0$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{N_i(h+\Delta) - N_i(h)}{(1 - N_i(h)) \Delta} = \lambda_i(h)$$

联合式 (13) (14) 得：

$$\xi V(\bar{x}(t), i) = \lambda_i(h) \bar{x}^T(t) \left(\sum_{j=1, i \neq j}^n q_{ij} P_j - P_i \right) \bar{x}(t) + \text{sym}(\bar{x}^T(t) P_i \bar{x}(t)) \quad (15)$$

当 $i \neq j$ ，令 $\lambda_{ij}(h) = q_{ij} \lambda_i(h)$ ， $\lambda_{ii} = -\sum_{j=1, i \neq j}^n \lambda_{ij}(h)$ 。

从而，式 (15) 可以重写为：

$$\begin{aligned} & \bar{x}^T(t) \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n q_{ij} \lambda_i(h) \mathbf{P}_j - \lambda_i(h) \mathbf{P}_i \right) \bar{x}(t) + \\ & \quad \text{sym}(\bar{x}^T(t) \mathbf{P}_i \dot{\bar{x}}(t)) = \\ & \bar{x}^T(t) \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j \lambda_{ij}(h) \bar{x}(t) + \text{sym}(\bar{x}^T(h) \mathbf{P}_i \dot{\bar{x}}(t)) = \\ & \quad \text{sym}(\bar{x}^T(t) \bar{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{P}_i \bar{x}(t) + \bar{w}^T(t) \bar{\mathbf{G}}_i^T \mathbf{P}_i \bar{x}(t)) + \\ & \quad \bar{x}^T(t) \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j \lambda_{ij}(h) \bar{x}(t) \end{aligned} \quad (16)$$

综上所述, 可以得到:

$$\xi V(\bar{x}(t), i) = \text{sym}(\bar{x}^T(t) \bar{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{P}_i \bar{x}(t) + \bar{w}^T(t) \bar{\mathbf{G}}_i^T \mathbf{P}_i \bar{x}(t)) + \bar{x}^T(t) \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j \lambda_{ij}(h) \bar{x}(t) \quad (17)$$

定义性能指标:

$$J = e_r^T(t) e_r(t) - \gamma^2 \bar{w}^T(t) \bar{w}(t) + \xi V(\bar{x}(t), i) \quad (18)$$

将式 (17) 代入式 (18), 且:

$$e_r^T(t) e_r(t) = \bar{x}^T(t) \bar{\mathbf{C}}_i^T \bar{\mathbf{C}}_i \bar{x}(t) \quad (19)$$

其中: $\bar{\mathbf{C}}_i = [\mathbf{C}_i \quad 0 \quad -\mathbf{C}_n]$ 。故式 (18) 重写为:

$$\begin{aligned} J &= \bar{x}^T(t) \bar{\mathbf{C}}_i^T \bar{\mathbf{C}}_i \bar{x}(t) - \gamma^2 \bar{w}^T(t) \bar{w}(t) + \\ & \quad \bar{x}^T(t) \bar{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{P}_i \bar{x}(t) + \bar{w}^T(t) \bar{\mathbf{G}}_i^T \mathbf{P}_i \bar{x}(t) + \\ & \quad \bar{x}^T(t) \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{A}}_i \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{G}}_i \bar{w}(t) + \\ & \quad \bar{x}^T(t) \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j \lambda_{ij}(h) \bar{x}(t) = \eta^T \Phi_i \eta \end{aligned} \quad (20)$$

其中: $\eta = [\bar{x}^T(t) \quad \bar{w}^T(t)]^T$,

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{A}}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j \lambda_{ij}(h) + \bar{\mathbf{C}}_i^T \bar{\mathbf{C}}_i & \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{G}}_i \\ * & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

应用 Schur 补定理, 由定理 1 知矩阵 $\Phi_i < 0$ 等价于:

$$\begin{bmatrix} \varphi & \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{G}}_i & \bar{\mathbf{C}}_i^T \\ * & -\gamma^2 \mathbf{I} & 0 \\ * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

其中: $\varphi = \bar{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{A}}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j \lambda_{ij}(h)$ 。

因此, 由 $\Phi_i < 0$ 得 $J < 0$, 即:

$$J = e_r^T(t) e_r(t) - \gamma^2 \bar{w}^T(t) \bar{w}(t) + \xi V(\bar{x}(t), i) < 0 \quad (22)$$

在零初始条件下利用 Dynkins 方程得:

$$\begin{aligned} & E\left\{ \int_{t_0}^t \xi V(\bar{x}(t), i) ds \right\} = \\ & E\{V(\bar{x}(t), i)\} - E\{V(\bar{x}(t_0), i)\} = E\{V(\bar{x}(t), i)\} \end{aligned} \quad (23)$$

将式 (22) 两边积分, 并与式 (23) 结合起来可得:

$$\begin{aligned} & E\left\{ \int_{t_0}^t e_r^T(s) e_r(s) ds \right\} - E\left\{ \int_{t_0}^t \gamma^2 \bar{w}^T(s) \bar{w}(s) ds \right\} + \\ & \quad E\{V(\bar{x}(t), i)\} < 0 \end{aligned} \quad (24)$$

所以:

$$E\left\{ \int_{t_0}^t e_r^T(s) e_r(s) ds \right\} - E\left\{ \int_{t_0}^t \gamma^2 \bar{w}^T(s) \bar{w}(s) ds \right\} < 0 \quad (25)$$

$$E\left\{ \int_{t_0}^t e_r^T(s) e_r(s) ds \right\} < E\left\{ \int_{t_0}^t \gamma^2 \bar{w}^T(s) \bar{w}(s) ds \right\} \quad (26)$$

综上所述, 由定义 1 和 2 知, 式 (6) 成立。闭环增广系统是随机稳定的且 S-MJS 的输出 y 可以跟踪参考模型 (3) 的输出 y_r , 并满足跟踪性能水平 γ 。证毕。

注 2: 定理 1 为闭环系统随机稳定性提供了充分性判据。然而, 式 (11) 中转移率 $\lambda_{ij}(h)$ 的引入会导致需要处理无限维 LMI, 这在数值实现层面存在显著困难。此外, 定理 1 尚未给出观测器与跟踪控制器增益的显式设计方法。针对这些局限性, 定理 2 通过引入参数化矩阵分解技术和有界转移率处理方法解决上述问题。

2.2 基于观测器的输出跟踪控制器设计

定理 2: 针对 S-MJS (1), 对于任意的 $i \in N$, 如果存在常数 $\gamma > 0, \epsilon > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ 以及矩阵 $\mathbf{Q}_i > 0, \mathbf{Q}_{3i} > 0, \mathbf{U}_i > 0$, 矩阵 $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{Z}_i$ 满足线性矩阵不等式 (27) ~ (29):

$$\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11} & \bar{\Psi}_{12} \\ * & \bar{\Psi}_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\Psi}_{11} & \underline{\Psi}_{12} \\ * & \underline{\Psi}_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} -\epsilon \mathbf{I} & (\mathbf{C}_i \mathbf{Q}_i - \mathbf{U}_i \mathbf{C}_i)^T \\ * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (29)$$

其中:

$$\bar{\Psi}_{11} = \begin{bmatrix} \bar{\Pi}_{11i} & -B_i Y_i & B_i Z_i \\ * & \bar{\Pi}_{22i} & 0 \\ * & * & \bar{\Pi}_{33i} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Psi}_{11} = \begin{bmatrix} \underline{\Pi}_{11i} & -B_i Y_i & B_i Z_i \\ * & \underline{\Pi}_{22i} & 0 \\ * & * & \underline{\Pi}_{33i} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Psi}_{12} = \begin{bmatrix} G_i & 0 & Q_i C_i^T & \bar{\mathbf{r}}_{1i} & 0 & 0 \\ G_i & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{r}}_{2i} & 0 \\ 0 & B_{ni} & -Q_{3i} C_{ni}^T & 0 & 0 & \bar{\mathbf{r}}_{3i} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Psi}_{12} = \begin{bmatrix} G_i & 0 & Q_i C_i^T & \underline{\mathbf{r}}_{1i} & 0 & 0 \\ G_i & 0 & 0 & 0 & \underline{\mathbf{r}}_{2i} & 0 \\ 0 & B_{ni} & -Q_{3i} C_{ni}^T & 0 & 0 & \underline{\mathbf{r}}_{3i} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Psi}_{22} = \text{diag}\{-\gamma^2 \mathbf{I} \quad -\gamma^2 \mathbf{I} \quad -\mathbf{I} \quad -\bar{\mathbf{V}}_{1i} \quad -\bar{\mathbf{V}}_{2i} \quad -\bar{\mathbf{V}}_{3i}\}$$

$$\underline{\Psi}_{22} = \text{diag}\{-\gamma^2 \mathbf{I} \quad -\gamma^2 \mathbf{I} \quad -\mathbf{I} \quad -\underline{\mathbf{V}}_{1i} \quad -\underline{\mathbf{V}}_{2i} \quad -\underline{\mathbf{V}}_{3i}\}$$

$$\bar{\Pi}_{11i} = \text{sym}(A_i Q_i + B_i Y_i) + \bar{\lambda}_{ii} Q_i$$

$$\underline{\Pi}_{11i} = \text{sym}(A_i Q_i + B_i Y_i) + \underline{\lambda}_{ii} Q_i$$

$$\bar{\Pi}_{22i} = \text{sym}(A_i Q_i - X_i C_i) + \bar{\lambda}_{ii} Q_i$$

$$\underline{\Pi}_{22i} = \text{sym}(A_i Q_i - X_i C_i) + \underline{\lambda}_{ii} Q_i$$

$$\bar{\Pi}_{33i} = \text{sym}(A_{ni} Q_{3i}) + \bar{\lambda}_{ii} Q_{3i}$$

$$\underline{\Pi}_{33i} = \text{sym}(A_{ni} Q_{3i}) + \underline{\lambda}_{ii} Q_{3i}$$

$$\bar{\mathbf{r}}_{1i} = \bar{\mathbf{r}}_{2i} = [\sqrt{\bar{\lambda}_{i1}} Q_i \quad \sqrt{\bar{\lambda}_{i2}} Q_i \quad \cdots \quad \sqrt{\bar{\lambda}_{in}} Q_i]_{n \neq i}$$

$$\underline{\mathbf{r}}_{1i} = \underline{\mathbf{r}}_{2i} = [\sqrt{\underline{\lambda}_{i1}} Q_i \quad \sqrt{\underline{\lambda}_{i2}} Q_i \quad \cdots \quad \sqrt{\underline{\lambda}_{in}} Q_i]_{n \neq i}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{3i} &= [\sqrt{\lambda_{i1}}Q_{3i} \quad \sqrt{\lambda_{i2}}Q_{3i} \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_{in}}Q_{3i}]_{n \neq i} \\ \underline{\Gamma}_{3i} &= [\sqrt{\lambda_{i1}}Q_{3i} \quad \sqrt{\lambda_{i2}}Q_{3i} \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_{in}}Q_{3i}]_{n \neq i} \\ \bar{V}_{1i} &= \text{diag}\{Q_1 \quad \cdots \quad Q_{i-1} \quad Q_{i+1} \quad \cdots \quad Q_n\} \\ \underline{V}_{1i} &= \bar{V}_{2i} = \underline{V}_{2i} = \bar{V}_{1i} \end{aligned}$$

$$\bar{V}_{3i} = \underline{V}_{3i} = \text{diag}\{Q_{31} \quad \cdots \quad Q_{3(i-1)} \quad Q_{3(i+1)} \quad \cdots \quad Q_{3n}\}$$

那么, 状态观测器 (4) 和输出跟踪控制器 (5) 能够保证输出跟踪误差满足 H_∞ 跟踪性能, 且观测器及控制器增益矩阵分别为:

$$L_i = X_i U_i^{-1}, K_i = Y_i Q_i^{-1}, F_i = Z_i Q_i^{-1} \quad (30)$$

证明 由定理 1 知, 式 (11) 小于零时, 输出跟踪

误差满足 H_∞ 跟踪性能。定义 $\bar{P}_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(h) P_j$,

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & P_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & P_{3i} \end{bmatrix} > 0.$$

为方便起见, 令 $P_{1i} = P_{2i}$, $\bar{P}_{1i} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(h) P_{1j}$, \bar{P}_{2i}

$= \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(h) P_{2j}$, $\bar{P}_{3i} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(h) P_{3j}$ 。同时将矩阵 \bar{A}_i ,

\bar{G}_i, \bar{C}_i 代入式 (21) 可得到:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ * & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

其中:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} \Pi_{11i} & -P_{1i} B_i K_i & P_{1i} B_i F_i \\ * & \Pi_{22i} & 0 \\ * & * & \Pi_{33i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} P_{1i} G_i & 0 & C_i^T \\ P_{2i} G_i & 0 & 0 \\ 0 & P_{3i} B_n & -C_n^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{22} = \text{diag}\{-\gamma^2 I \quad -\gamma^2 I \quad -I\}$$

$$\Pi_{11i} = \text{sym}[P_{1i}(A_i + B_i K_i)] + \bar{P}_{1i}$$

$$\Pi_{22i} = \text{sym}[P_{2i}(A_i - L_i C_i)] + \bar{P}_{2i}$$

$$\Pi_{33i} = \text{sym}(P_{3i} A_n) + \bar{P}_{3i}$$

可以看出不等式 (11) 有耦合项, 为了能使用 LMI 工具箱求解不等式 (31), 在不等式 (31) 左右两边同时乘以 $\text{diag}\{P_{1i}^{-1} \quad P_{2i}^{-1} \quad P_{3i}^{-1} \quad I \quad I \quad I\}$ 进行解耦, 定义:

$$C_i Q_i = U_i C_i \quad (32)$$

$$P_{1i}^{-1} = P_{2i}^{-1} = Q_i, P_{3i}^{-1} = Q_{3i}$$

$$X_i = L_i U_i, Y_i = K_i Q_i, Z_i = F_i Q_{3i} \quad (33)$$

将式 (33) 代入式 (31) 中, 结合式 (32) 并引入

Schur 补定理得到不等式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{11} & \mathbf{\Gamma}_{12} \\ * & \mathbf{\Gamma}_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

其中:

$$\mathbf{\Gamma}_{11} = \begin{bmatrix} \Xi_{11i} & -B_i Y_i & B_i Z_i \\ * & \Xi_{22i} & 0 \\ * & * & \Xi_{33i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}_{12} = \begin{bmatrix} G_i & 0 & Q_i C_i^T & \Upsilon_{1i} & 0 & 0 \\ G_i & 0 & 0 & 0 & \Upsilon_{2i} & 0 \\ 0 & B_n & -Q_{3i} C_n^T & 0 & 0 & \Upsilon_{3i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}_{22} = \text{diag}\{-\gamma^2 I \quad -\gamma^2 I \quad -\gamma^2 I \quad -V_{1i} \quad -V_{2i} \quad -V_{3i}\}$$

$$\Xi_{11i} = \text{sym}(A_i Q_i + B_i Y_i) + \lambda_{ii}(h) Q_i$$

$$\Xi_{22i} = \text{sym}(A_i Q_i - X_i C_i) + \lambda_{ii}(h) Q_i$$

$$\Xi_{33i} = \text{sym}(A_n Q_{3i}) + \lambda_{ii}(h) Q_{3i}$$

$$Y_{1i} = Y_{2i} =$$

$$[\sqrt{\lambda_{i1}}(h)Q_i \quad \sqrt{\lambda_{i2}}(h)Q_i \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_{in}}(h)Q_i]_{n \neq i}$$

$$Y_{3i} = [\sqrt{\lambda_{i1}}(h)Q_{3i} \quad \sqrt{\lambda_{i2}}(h)Q_{3i} \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_{in}}(h)Q_{3i}]_{n \neq i}$$

$$V_{1i} = V_{2i} = \text{diag}\{Q_1 \quad \cdots \quad Q_{i-1} \quad Q_{i+1} \quad \cdots \quad Q_n\}$$

$$V_{3i} = \text{diag}\{Q_{31} \quad \cdots \quad Q_{3(i-1)} \quad Q_{3(i+1)} \quad \cdots \quad Q_{3n}\}$$

式 (32) 是等式约束项, 不能在 Matlab 中用 LMI 工具箱来解决, 可以等效转化为:

$$\text{tr}[(C_i Q_i - U_i C_i)^T (C_i Q_i - U_i C_i)] = 0 \quad (35)$$

接着, 式 (35) 可以简化为:

$$(C_i Q_i - U_i C_i)^T (C_i Q_i - U_i C_i) \leq \epsilon I \quad (36)$$

其中: ϵ 是一个趋近于零的正数。通过 Schur 补定理对式 (36) 进行变换可得 (29) 成立。

下面处理式 (34) 中转移率的时变项, 上文中假设转移率 $\lambda_{ij}(h)$ 具有上下界, 即满足 $\lambda_{ij}(h) \in [\underline{\lambda}_{ij}, \bar{\lambda}_{ij}]$ 。对于给定的驻留时间 h , 转移速率 $\lambda_{ij}(h) = \theta_1 \bar{\lambda}_{ij} + \theta_2 \underline{\lambda}_{ij}$, 其中, $\theta_1 + \theta_2 = 1$, 且 $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0$ 。将 θ_1 乘以式 (27), θ_2 乘以式 (28), 得到:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \theta_1 \bar{\Psi}_{12} + \theta_2 \underline{\Psi}_{12} \\ * & \Psi_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (37)$$

其中: $\Psi_{11} = \text{sym}(A_i Q_i + B_i Y_i) + (\theta_1 \bar{\lambda}_{ii} + \theta_2 \underline{\lambda}_{ii}) Q_i$, $\Psi_{22} = \text{diag}\{-\gamma^2 I \quad -\gamma^2 I \quad -I \quad -V_{1i} \quad -V_{2i} \quad -V_{3i}\}$, V_{1i}, V_{2i}, V_{3i} 见式 (34)。

通过调整参数 θ_1 和 θ_2 , 可得到任意的转移率 $\lambda_{ij}(h) \in [\underline{\lambda}_{ij}, \bar{\lambda}_{ij}]$ 式 (37) 成立等价于式 (27) ~ (28) 成立。由此可知, 状态观测器 (4) 与输出跟踪控制器 (5) 能够保证输出跟踪误差的 H_∞ 性能, 其增益矩阵可通过式 (30) 求解。证毕。

此外, 为实现 $C_i Q_i$ 对 $U_i C_i$ 的高精度近似, 需分步优化: 首先基于最小化问题的全局解确定参数 ϵ , 随后通过调节 H_∞ 性能指标 γ , 最终获得最优解。

$$\begin{aligned} & \min \quad \epsilon \\ & \text{s. t.} \quad (27) \sim (29) \end{aligned}$$

3 仿真实验

为检验状态观测器与模型参考跟踪控制器的有效

性, 本节结合数值仿真和实例仿真进行验证。

3.1 数值仿真

S-MJS 的模型参数:

模态 1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3.5 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2.5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

模态 2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 1.5 \\ 1.3 & 0.9 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

输出跟踪参考模型的参数:

模态 1:

$$A_{r1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B_{r1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, C_{r1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

模态 2:

$$A_{r2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}, B_{r2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, C_{r2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

假设转移速率的上下界为:

$$\underline{\lambda}_{ij}(h) = \begin{bmatrix} -0.4568 & 0.0586 \\ 0.0586 & -0.4568 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\lambda}_{ij}(h) = \begin{bmatrix} -0.0586 & 0.4568 \\ 0.4568 & -0.0586 \end{bmatrix}$$

参考输入 $r(t) = 3.5 \sin(2\pi \cdot 0.5t)$, 外部扰动 $w(t) = 0.1 \tanh(t) + 3.8 \sin(0.5t)$ 。在定理 2 的约束下, 通过 LMI 工具箱求解 (27) ~ (29) 可得 $\gamma = 3.2558$, $\epsilon = 2.6932 \times 10^{-16}$, 相应的状态观测器和输出跟踪控制器增益为:

$$L_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1.6056 & -0.1959 \\ -0.0555 & 1.6272 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1.6060 & -0.1325 \\ -0.1165 & 1.6065 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1.2284 & -1.9817 \\ -1.8015 & 2.5396 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.9992 & -1.2709 \\ -2.2799 & 2.2744 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} -2.0481 & 2.0483 \\ 2.7551 & -2.7553 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} -1.4252 & 1.4252 \\ 2.8556 & -2.8556 \end{bmatrix}$$

仿真过程中, S-MJS、观测器系统以及参考模型的初始状态分别设定为 $x(0) = \hat{x}(0) = x_r(0) = [0 \ 0]^T$ 。

仿真结果如图 2~5 所示。

根据所获得的控制器和观测器增益, 在图 2 所示的

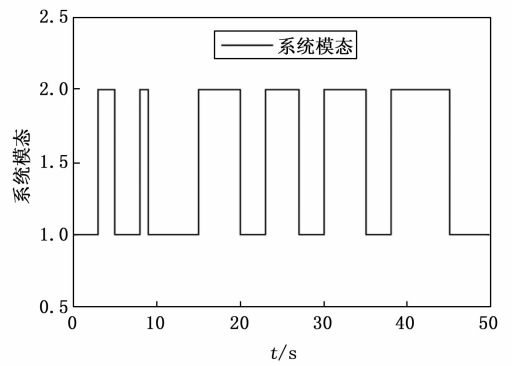


图 2 系统模态响应曲线

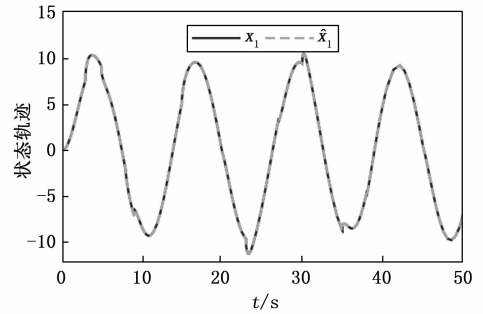


图 3 状态 x_1 及估计

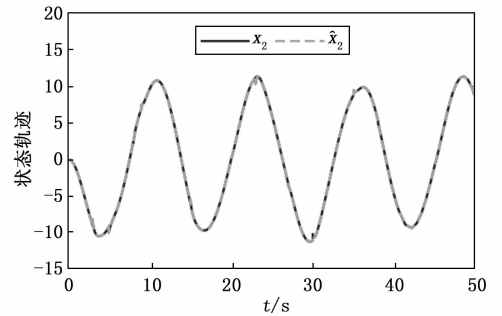


图 4 状态 x_2 及估计

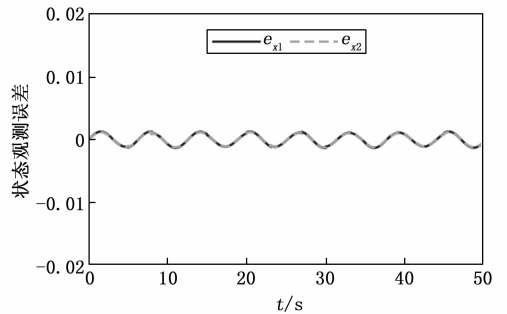


图 5 状态估计误差

S-MJS 的跳变模式下, 图 3~4 分别展示了闭环 S-MJS 的实际状态轨迹与观测器估计轨迹, 图 5 进一步刻画了二者误差特性。通过仿真曲线可知, 输出跟踪控制器 (5) 可确保基于观测器的估计轨迹与系统实际状态保持

高度一致。说明了本文所设计的状态观测器是有效的。

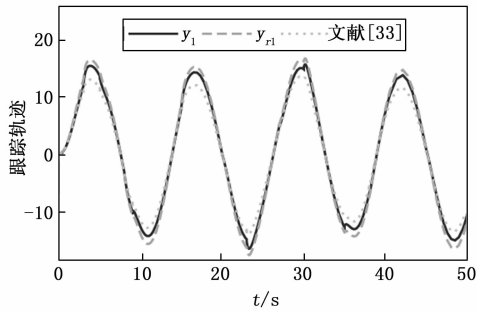


图 6 输出跟踪曲线 y_1

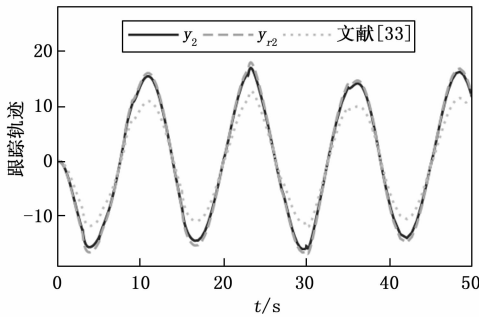


图 7 输出跟踪曲线 y_2

图 6 和图 7 分别是 y_1 和 y_2 的输出跟踪曲线，从图中可以看出，在外部扰动作用下，控制器 (5) 可保证闭环系统在随机渐近稳定的基础上跟踪参考模型输出，且达到期望的跟踪性能。

此外，为了说明本文设计的输出跟踪控制器的优越性，图 6 和图 7 中还给出了对比实验。文献 [33] 中，针对互联马尔可夫跳跃系统，在有限时间稳定性意义下，提出了一种分散跟踪控制技术。该控制方案 ($u = K_i(\hat{x} - x_r)$) 仅利用反馈控制跟踪参考信号，将此控制策略应用在本文研究的对象，在相同仿真参数下，仿真结果如图 6 和图 7 所示。从图中可以看出，文献 [33] 所提控制方案下，系统输出状态与参考模型间呈现显著跟踪偏差，表明其动态跟踪性能受限。本文利用前馈—反馈控制方法可以有效减小跟踪误差。综上所述，说明了本文所设计的输出跟踪控制器是有优势的。

3.2 实例仿真

为了进一步证明本文所设计的状态观测器和模型参考跟踪控制器的优越性。在这个例子中，参考文献 [38]，我们考虑一个机器人手臂模型，其控制方程为如下形式的二阶微分方程：

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{M(\sigma(t))gL}{J(\sigma(t))} \sin(\theta(t)) - \frac{W\dot{\theta}(t)}{J(\sigma(t))} + \frac{u(t)}{J(\sigma(t))} \quad (38)$$

式中， $\theta(t)$ 和 $u(t)$ 分别表示手臂和控制输入的角度位置。参数 $M(\sigma(t))$ 、 $J(\sigma(t))$ 、 g 、 L 和 W 分别表示载荷

质量、转动惯量、重力加速度、臂长、粘性摩擦系数。机器人手臂工作在不同的环境条件下，随着载荷的变化，会产生随机跳变的规律，该过程符合半马尔可夫跳变过程。定义 $x(t) = [\theta(t) \ \dot{\theta}(t)]^T$ ，在平衡点 $x(0) = [0 \ 0]^T$ 处线性化式，然后考虑外部扰动 $w(t)$ ，当 $\sigma(t) = i$ 时，我们可以得到线性化动态模型：

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + G_i w(t)$$

其中： $A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{M_i g L}{J_i} & -\frac{W}{J_i} \end{bmatrix}$ ，选择参数 $g = 9.8$

m/s^2 ， $W = 2$ 和 $L = 0.5$ ，考虑参数 M_i 和 J_i 有两个不同的模式： $M_1 = 1 \text{ kg}$ ， $J_1 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ ； $M_2 = 2 \text{ kg}$ ， $J_2 = 2.5 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。则包含两种模式的系统参数如下：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.9 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.92 & -0.8 \end{bmatrix}$$

S-MJS 的其他参数选取如下：

模式 1：

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2.5 & 1 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

模式 2：

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

假设输出跟踪参考模型参数为：

$$A_{r1} = A_{r2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B_{r1} = B_{r2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{r1} = C_{r2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

假设转移速率的上下界取值为：

$$\underline{\lambda}_{ij}(h) = \begin{bmatrix} -0.4568 & 0.0586 \\ 0.0586 & -0.4568 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\lambda}_{ij}(h) = \begin{bmatrix} -0.0586 & 0.4568 \\ 0.4568 & -0.0586 \end{bmatrix}$$

参考输入 $r(t) = 0.5 \sin(2\pi \cdot 0.5t)$ ，外部扰动 $w(t) = 0.1 \tanh(t) + 3.8 \sin(0.5t)$ 。通过应用定理 2，利用 LMI 工具箱求解 (27) ~ (29) 可得 H_∞ 跟踪性能指标 $\gamma = 5.4314$ ， $\epsilon = 6.6217 \times 10^{-18}$ ，相应的状态观测器和输出跟踪控制器增益为：

$$L_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1.6681 & -0.1536 \\ -0.1581 & 1.6704 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1.6958 & -0.1714 \\ -0.1580 & 1.6873 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} -1.6509 & 0.8503 \\ 0.8446 & -1.6434 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} -3.4012 & 1.7202 \\ 1.7197 & -3.4038 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1.4829 & -0.0514 \\ -0.0531 & 1.4837 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 3.3377 & -0.0930 \\ -0.0873 & 3.3316 \end{bmatrix}$$

仿真过程中, S-MJS、观测器系统以及参考模型的初始状态分别设定为 $x(0) = \hat{x}(0) = x_r(0) = [0 \ 0]^T$ 。仿真结果如图 8~11 所示。

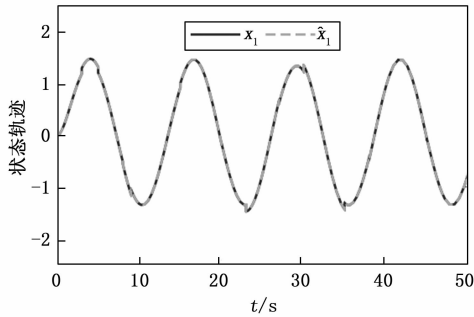


图 8 状态 x_1 及估计

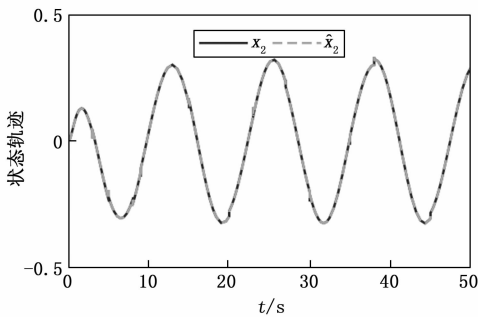


图 9 状态 x_2 及估计

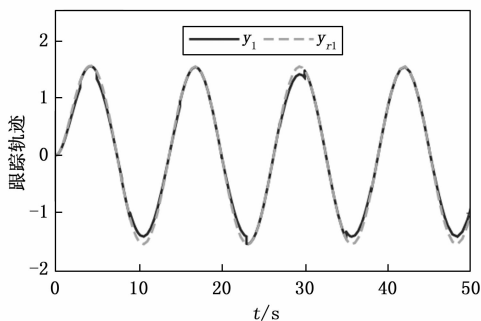


图 10 输出跟踪曲线 y_1

根据所获得的控制器和观测器增益, 在图 2 所示的 S-MJS 的跳变模式下, 闭环 S-MJS 的状态和状态估计曲线如图 8 和 9 所示。从仿真结果可以看出, 在输出跟踪控制器 (5) 作用下, 基于观测器的估计轨迹与系统实际状态保持高度一致。说明了本文所设计的状态观测器是有效的。

进一步观察图 10 和图 11 的输出跟踪曲线, 从图中可以清晰地看到, 即使在外部扰动的影响下, 输出跟踪控制器 (5) 依然能够确保闭环系统在保持随机稳定的前提下精确地跟踪参考模型的输出信号, 同时展现出预

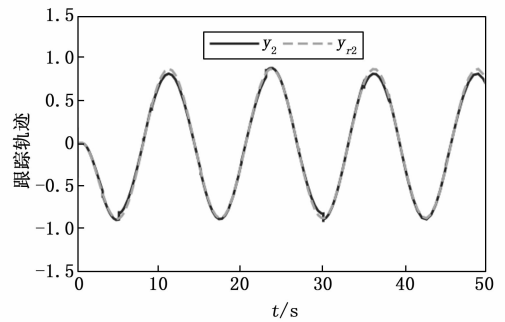


图 11 输出跟踪曲线 y_2

期的跟踪性能。

4 结束语

考虑存在外部扰动的情况下, 研究了 S-MJS 的模型参考输出跟踪控制。针对系统状态不可测的情况, 设计了状态观测器对其进行估计。在此基础上, 给出了基于状态观测器的输出跟踪控制策略, 该控制策略是一种前馈-反馈复合控制。具体来说, 其中前馈控制是将参考模型状态前馈到闭环系统实现对参考模型输出信号的跟踪, 反馈控制保证闭环系统稳定。同时, 本文以 LMI 形式给出了闭环系统随机稳定并满足 H_∞ 跟踪性能的可行解条件, 借助凸优化方法可求得相应状态观测器和输出跟踪控制器增益。最后通过仿真验证了所设计控制策略的可行性。在未来的工作中, 将重点研究具有执行器故障和扰动的 S-MJS 的自适应容错跟踪控制问题。

参考文献:

- [1] SHEN L, BUSCHER U. Solving the serial batching problem in job shop manufacturing systems [J]. European Journal of Operational Research, 2012, 221 (1): 14 - 26.
- [2] MA Y C, JIA X R, ZHANG Q L. Robust observer-based finite-time H-infinity control for discrete-time singular markovian jumping system with time delay and actuator saturation [J]. Nonlinear Analysis-Hybrid Systems, 2018, 28: 1 - 22.
- [3] VARGAS A N, SAMPAIO L P, ACHO L, et al. Optimal control of dc-dc buck converter via linear systems with inaccessible markovian jumping modes [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2016, 24 (5): 1820 - 1827.
- [4] ZHANG M, SHI P, MA L H, et al. Network-based fuzzy control for nonlinear markov jump systems subject to quantization and dropout compensation [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2019, 371: 96 - 109.
- [5] MA S P, BOUKAS E K, CHINNIAH Y. Stability and stabilization of discrete-time singular markov jump systems with time-varying delay [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20 (5): 531 - 543.
- [6] PARK B Y, KWON N K, PARK P. Stabilization of mark-

- ovian jump systems with incomplete knowledge of transition probabilities and input quantization [J]. *Journal of the Franklin Institute-Engineering and Applied Mathematics*, 2015, 352 (10): 4354 - 4365.
- [7] ZHANG L X, LAM J. Necessary and sufficient conditions for analysis and synthesis of markov jump linear systems with incomplete transition descriptions [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55 (7): 1695 - 1701.
- [8] DE SOUZA C E. Robust stability and stabilization of uncertain discrete-time markovian jump linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51 (5): 836 - 841.
- [9] BOUKAS E K, LIU Z K. Robust H-infinity control of discrete-time markovian jump linear systems with mode-dependent time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46 (12): 1918 - 1924.
- [10] WU L G, SU X J, SHI P. Sliding mode control with bounded H_2 gain performance of markovian jump singular time-delay systems [J]. *Automatica*, 2012, 48 (8): 1929 - 1933.
- [11] SENTHILKUMAR T. Robust stabilization and H-infinity control for nonlinear stochastic T-S fuzzy markovian jump systems with mixed time-varying delays and linear fractional uncertainties [J]. *Neurocomputing*, 2016, 173: 1615 - 1624.
- [12] TARTAGLIONE G, ARIOLA M, AMATO F. An observer-based output feedback controller for the finite-time stabilization of markov jump linear systems [J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2019, 3 (3): 763 - 768.
- [13] ZHANG Y. Stability of discrete-time markovian jump delay systems with delayed impulses and partly unknown transition probabilities [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 75 (1/2): 101 - 111.
- [14] MORAIS C F, BRAGA M F, OLIVEIRA R, et al. H-infinity and H_2 control design for polytopic continuous-time markov jump linear systems with uncertain transition rates [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26 (3): 599 - 612.
- [15] CHEN Y, ZHENG W X. Exponential H-infinity filtering for stochastic markovian jump systems with time delays [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24 (4): 625 - 643.
- [16] CHENG J, ZHU H, ZHONG S M, et al. Finite-time H-infinity filtering for a class of discrete-time markovian jump systems with partly unknown transition probabilities [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2014, 28 (10): 1024 - 1042.
- [17] WANG J M, MA S P, ZHANG C H. Stability analysis and stabilization for nonlinear continuous-time descriptor semi-markov jump systems [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, 279: 90 - 102.
- [18] SHEN H, WANG Y, XIA J W, et al. Fault-tolerant leader-following consensus for multi-agent systems subject to semi-markov switching topologies: An event-triggered control scheme [J]. *Nonlinear Analysis-Hybrid Systems*, 2019, 34: 92 - 107.
- [19] FARAJI-NIRI M, JAHED-MOTLAGH M R. Stochastic stability and stabilization of semi-markov jump linear systems with uncertain transition rates [J]. *Information Technology and Control*, 2017, 46 (1): 37 - 52.
- [20] LI F B, WU L G, SHI P. Stochastic stability of semi-markovian jump systems with mode-dependent delays [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24 (18): 3317 - 3330.
- [21] XIN B, ZHAO D L. Generalized H_2 control of the linear system with semi-markov jumps [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, 31 (3): 1005 - 1020.
- [22] WU X H, MU X W. H-infinity stabilization for networked semi-markovian jump systems with randomly occurring uncertainties via improved dynamic event-triggered scheme [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29 (13): 4609 - 4626.
- [23] CHENG G F, JU Y Y, MU X W. Stochastic finite-time stability and stabilisation of semi-markovian jump linear systems with generally uncertain transition rates [J]. *International Journal of Systems Science*, 2021, 52 (1): 185 - 195.
- [24] WANG J, RU T T, XIA J W, et al. Asynchronous event-triggered sliding mode control for semi-markov jump systems within a finite-time interval [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2021, 68 (1): 458 - 468.
- [25] LI Y, KE J, ZENG J P. Tracking control for lower limb rehabilitation robots based on polynomial nonlinear uncertain models [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021, 31 (6): 2186 - 2204.
- [26] SUN H F, YANG Z L, MENG B. Tracking control of a class of non-linear systems with applications to cruise control of air-breathing hypersonic vehicles [J]. *International Journal of Control*, 2015, 88 (5): 885 - 896.
- [27] XIA J W, PARK J H, ZHANG B Y, et al. Robust H-infinity tracking control for uncertain markovian jumping systems with interval time-varying delay [J]. *Complexity*, 2015, 21 (2): 355 - 366.
- [28] TIAN G T. Tracking control of discrete-time markovian jump systems [J]. *International Journal of Systems Science*, 2020, 51 (15): 3070 - 3080.

(下转第 104 页)