

有向通信拓扑下的无人集群分布式编队控制

王宁^{1,2}, 梁晓龙^{1,2}, 李哲^{1,2}, 郑傲宇^{1,2}, 王茜^{1,2}

(1. 空军工程大学 空管领航学院, 西安 710051;

2. 陕西省电子信息系统 系统集成重点实验室, 西安 710051)

摘要: 对无人集群航行过程中的编队一致性控制协议进行研究, 采用二阶离散运动模型对无人系统的运动学特性进行描述, 提出了基于虚拟领航者思想的一致性编队控制协议; 采用矩阵理论对控制协议的稳定性进行了理论分析, 提出了一种新的一致性控制协议证明过程, 给出了控制协议中参数设计的约束条件; 分析了编队控制过程中运用文章控制协议所需满足的约束条件, 阐述了控制协议参数的设计流程; 经实验测试所提控制协议能够有效满足集群编队的一致性控制需求。

关键词: 无人集群; 编队控制; 一致性控制; 矩阵分析

Distributed Formation Control of Unmanned Swarms Under Directed Communication Topology

WANG Ning^{1,2}, LIANG Xiaolong^{1,2}, LI Zhe^{1,2}, ZHENG Aoyu^{1,2}, WANG Han^{1,2}

(1. Air traffic control and navigation school, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China;

2. Shaanxi Province Lab. of Meta-synthesis for Electronic & Information System,
Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: A study is conducted on the formation consistency control protocol during the navigation of unmanned swarms, the kinematic characteristics of unmanned systems are presented by using a second-order discrete motion model, and a consistent formation control protocol based on the idea of virtual navigator is proposed. this paper makes a theoretical analysis on the stability of control protocol by using matrix theory, proposes a new proof process of coherent control protocol, gives the constraints of parameter design in the control protocol, analyzes the constraints to be satisfied by the control protocol in the formation control process, and explains the design process of control protocol parameters. Experimental results show that the proposed control protocol can effectively meet the consistency control requirements of swarm formation.

Keywords: unmanned swarms; formation control; consistency control; matrix analysis

0 引言

随着无人系统的快速发展, 无人系统的类别不断丰富, 使用速度性能、运动空间等存在差异的异构无人系统组成集群执行侦察、搜索、救援等任务将成为今后无人集群应用的一个重要内容。编队控制是无人集群有效遂行任务的关键技术, 编队控制协议的设计问题受到了广泛关注。

当前关于无人集群编队控制方法的研究主要包括

Leader-Follower 方法^[1-3]、基于行为法^[4-5]、虚拟结构法^[6-7]和一致性控制^[8-11]等方法。Leader-Follower 方法通常预先给定一条满足任务需求的航迹, 集群中选定一名成员作为 Leader 沿预定航迹飞行, 其他成员作为 Follower 保持一定的构型对航迹进行跟踪, 从而实现编队控制飞行, 但这种方法中编队的鲁棒性高度依赖于 Leader 的鲁棒性, 一旦 Leader 被毁伤, 编队控制将面临失效的风险。基于行为的编队控制方法则借鉴了自然界中生物群体的集群行为规律, 集群中每个个体能够依

收稿日期:2023-11-12; 修回日期:2024-01-26。

基金项目:国家自然科学基金(61703427)。

作者简介:王宁(1997-),男,博士研究生。

通讯作者:梁晓龙(1981-),男,教授,博士生导师。

引用格式:王宁,梁晓龙,李哲,等.有向通信拓扑下的无人集群分布式编队控制[J].计算机测量与控制,2025,33(3):71-78.

据其相邻个体的位置、速度等信息做出决策,从而产生一定的涌现特性,但这种方法通常难以从数学上显式地描述群体行为,从而给编队控制的稳定性、收敛速度等分析带来了较大困难。虚拟结构法将无人集群视为刚性结构上的一个节点,通过构型参数设计使成员之间在跟踪虚拟点的过程中能够保持预设构型,但这种方法要求编队必须刚性运动,使其应用范围受到了限制。

上述方法在实际运用过程中均存在一定的不足,因此学者们在研究无人集群编队控制方法时通常针对某一方法的不足提出具体改进措施,或将多种方法结合使用,实现不同方法之间的优势互补。其中,文献 [12] 提出了一种基于一致性控制方法的无人集群编队控制律,但对所提控制协议的稳定性分析过程十分复杂,且未对通信协议中的参数影响加以分析。文献 [13] 针对同构无人机集群编队构型演变问题,通过在一致性控制协议中引入了时变编队参考向量,实现了连续时间系统下的无人集群编队控制。文献 [14] 针对存在输入饱和、输出死区的多智能体系统一致性跟踪问题,设计了一种自适应神经网络一致性控制算法,通过设计与智能体阶次相同的辅助控制系统,实现了对饱和控制信号的动态补偿。文献 [15] 提出了一种包含通信时延的 AUV 集群编队控制方法,讨论了通信时延对编队一致性控制协议有效性的影响,给出了多 AUV 集群实现编队控制所需满足的时延约束条件。

上述研究在一定程度上解决了无人集群的编队控制问题,但主要是以连续时间系统为研究对象,相关结论难以直接满足离散时间系统的编队控制需求。为此,本文以加速度性能不同的异构平台为研究对象,对离散时间系统的编队控制问题展开研究,设计了一种基于一致性控制理论的无人集群编队控制协议,并给出了理论证明与仿真验证。

1 预备知识与问题描述

编队控制是发挥无人集群协同侦察、协同攻击、协同定位等优势能力的支撑技术^[16]。不同于单一平台的无人系统控制问题,无人集群编队控制具有平台规模大、任务需求复杂的特点。为便于分析和求解,一般将无人集群编队控制问题分解为外环控制与内环控制两个层次的问题予以考虑。其中,外环控制问题主要根据期望构型、任务航迹等信息给出无人系统的航点、速度或加速度控制指令;内环控制问题主要根据无人系统姿态信息和控制指令,解算出所需的姿态/舵面、推力/油门等参数的调整量。本文针对无人集群编队控制的外环控制律设计问题展开研究。

1.1 预备知识

在无人集群编队控制问题的研究中,一般采用有向

拓扑图描述集群中各节点之间的通信关系。将包含 N 个无人系统组成的无人集群记为 $SAV_N = \{U_i \mid i = 1, 2, \dots, N\}$, 采用加权图 $G = (W, E, A)$ 对 SAV_N 的通信拓扑关系进行描述,其中 $W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ 、 $E = \{(\omega_i, \omega_j) \mid \omega_i, \omega_j \in W\}$ 、 $A = [a_{ij}]_{N \times N}$ 分别表示图 G 的节点集、边集和邻接矩阵。

在描述无人集群通信拓扑关系的过程中,每个无人系统均视为节点集 W 中的一个节点。若无人系统 U_i 能够向 U_j 发送自身位置、速度等状态信息,则称边集 E 中存在有向边 (ω_i, ω_j) , 即 $(\omega_i, \omega_j) \in E$ 。根据边集 E 中有向边的数量,邻接矩阵 A 中元素 a_{ij} 按照下式取值:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (\omega_i, \omega_j) \in E \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

式中, $a_{ij} = 1$ 表示节点 i 能够向节点 j 发送交互信息。若 $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_{j_m}}$ 均为 1, 则称图 G 中节点 i 到节点 j_m 是可达的, 若有向图 G 中任意两个节点互相可达, 则称图 G 为强连通图; 若有向图 G 不是强连通图, 但将其边集去掉方向后可化为无向连通图时, 称图 G 为弱连通图, 后文中所称的连通条件包含弱连通图和强连通图。

在邻接矩阵 A 的基础上, 采用度矩阵 D 表征无人集群中每个无人系统在集群通信拓扑中的重要程度, 度矩阵 D 可由下式求出:

$$D = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N a_{1j} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{j=1}^N a_{Nj} \end{bmatrix} \quad (2)$$

进一步地, 加权图 G 的拉普拉斯矩阵 L 可由下式给出:

$$L = D - A \quad (3)$$

矩阵 L 中元素的取值有如下物理含义:

- 1) l_{ii} 取值表示无人系统 U_i 在集群通信拓扑关系的重要度;
- 2) l_{ij} 取值为 -1 时, 表示 U_i 与 U_j 之间存在通信关系;

由此给出分析无人集群编队控制问题需要用到的引理 1:

引理 1^[17-19]: 对于包含 N 个节点的加权图 G , 其拉普拉斯矩阵 L 存在如下性质:

(1) 若图 G 是连通的, 则 0 是 L 的代数重数为 1 的特征值, 其他非零特征值均为正实数;

(2) L 至少有一个零特征值, 1_N 为特征值 0 对应的特征向量。

1.2 问题描述及分析

采用二阶离散时间系统表征无人系统运动方程如下:

$$\begin{cases} p_i(t+\delta) = p_i(t) + \delta v_i(t) \\ v_i(t+\delta) = v_i(t) + \delta u_i(t) \end{cases} \quad (4)$$

式中, $p_i(t)$ 、 $v_i(t)$ 分别表示无人系统 U_i 在 t 时刻的位置、速度; $u_i(t)$ 表示无人系统在时刻的控制输入; δ 表示控制周期。记无人集群进行编队航行的初始时刻为 t_0 , 则无人系统的状态更新时刻可以表示为 $t = t_0 + q \cdot \delta$, 其中 $q = 1, 2, 3, \dots$ 表示控制序列。

记 t 时刻编队中无人系统的期望构型参数如下:

$$\begin{cases} h_p(t) = [h_{1p}(t) - p_0(t), \dots, h_{Np}(t) - p_0(t)]^T \\ h_v(t) = [h_{1v}(t) - v_0(t), \dots, h_{Nv}(t) - v_0(t)]^T \\ h_a(t) = [h_{1a}(t) - a_0(t), \dots, h_{Na}(t) - a_0(t)]^T \end{cases} \quad (5)$$

式中, $p_0(t)$ 、 $v_0(t)$ 和 $a_0(t)$ 分别表示虚拟领航者在 t 时刻的位置、速度和加速度值; $h_{ip}(t)$ 、 $h_{iv}(t)$ 和 $h_{ia}(t)$ 表示无人系统 U_i 为达成期望构型所应当与虚拟领航者之间保持的相对位置、相对速度和相对加速度, 下标中 i 表示无人集群中的节点序号。

对于构型演变问题, 无人系统与虚拟领航者之间的相对速度、相对加速度均为时变向量; 对于固定构型控制问题而言, 要求无人集群在编队飞行过程中与虚拟领航者的期望速度与加速度保持一致。本文针对固定构型问题进行研究, 因此式 (5) 可简化如下:

$$\begin{cases} h_p(t) = [h_{1p}(t_0) - p_0(t), \dots, h_{Np}(t_0) - p_0(t)]^T \\ h_v(t) = [0, \dots, 0]^T \\ h_a(t) = [0, \dots, 0]^T \end{cases} \quad (6)$$

定义 1: 任取 $i, j = 1, \dots, N, i \neq j$, 当且仅当式 (7) 成立时, 称无人集群能够在期望构型条件下实现稳定控制:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} \| p_i(t) - h_{ip}(t) - p_0(t) \| = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \| v_i(t) - v_0(t) \| = 0 \end{cases} \quad (7)$$

定义 2: 如果对任意有界初始条件和 $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, i \neq j$, 有控制输入 $u_i(t)$ 使式 (7) 成立, 则称构型参数式 (6) 在控制协议 $u_i(t)$ 的作用下是可实现的。

2 编队控制协议设计

针对式 (4) 所示的二阶离散系统, 将无人系统的位置、速度作为集群内交互信息, 设计如下控制协议:

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -\alpha \sum_{j \in N_i} a_{ij} [x_i(t) - x_j(t)] - \\ & \beta \sum_{j \in N_i} a_{ij} [v_i(t) - v_j(t)] \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $x_i(t) = [p_i(t) - h_{ip}(t)]$; α 、 β 分别表示位置增益系数和速度增益系数。为保证系统稳定性, 控制量应为负反馈, 即系数 α 、 β 应满足 $\alpha > 0, \beta > 0$ 。

将无人集群的状态向量记为 $y(t)$, 则有:

$$x(t) = [x_1(t), \dots, x_N(t)]^T$$

$$\begin{aligned} v(t) &= [v_1(t), \dots, v_N(t)]^T \\ y(t) &= [x^T(t), v^T(t)]^T \end{aligned} \quad (9)$$

在通信拓扑图中需要将虚拟领航者作为一个节点纳入, 将虚拟领航者的相对位置状态 $x_0(t)$ 和速度 $v_0(t)$ 引入式 (9) 中, 则有:

$$\begin{aligned} x(t) &= [x_0(t), x_1(t), \dots, x_N(t)]^T \\ v(t) &= [v_0(t), v_1(t), \dots, v_N(t)]^T \\ y(t) &= [x^T(t), v^T(t)]^T \end{aligned} \quad (10)$$

由于虚拟领航者的位置信息是编队控制的基准位置, 因此对于虚拟领航者有:

$$x_0(t) = p_0(t) \quad (11)$$

将式 (4) 和式 (8) 代入式 (10) 后可得:

$$y(t+\delta) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N+1} & \delta \mathbf{I}_{N+1} \\ -\alpha \delta \mathbf{L} & \mathbf{I}_{N+1} - \beta \delta \mathbf{L} \end{bmatrix} y(t) \quad (12)$$

记式 (12) 中的状态变换矩阵为 Γ , 即:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N+1} & \delta \mathbf{I}_{N+1} \\ -\alpha \delta \mathbf{L} & \mathbf{I}_{N+1} - \beta \delta \mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (13)$$

下面给出控制协议的稳定性分析及增益参数设计流程。

3 稳定性分析

引理 2^[20]: 设 \mathbf{A} 是 m 阶方阵, \mathbf{D} 是 n 阶方阵, 若 \mathbf{A} 可逆, 则 $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|$ 。

定理 1: 拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 中 0 特征值的代数重数为 m 等价于状态变换矩阵 Γ 中 1 特征值的代数重数为 $2m$ 。

证明: 记 Γ 的特征值为 μ , 由特征值的定义可知:

$$\det(\mu \mathbf{I}_{2(N+1)} - \Gamma) = 0 \quad (14)$$

分两种情况讨论式 (14) 成立所应满足的条件:

1) $\mu \neq 1$, 即 $(\mu \mathbf{I}_{(N+1)} - \mathbf{I}_{(N+1)})$ 可逆。

根据引理 2, 有:

$$\begin{aligned} \det(\mu \mathbf{I}_{2(N+1)} - \Gamma) &= \det(\mu \mathbf{I}_{N+1} - \mathbf{I}_{N+1}) \cdot \\ & \det(\mu \mathbf{I}_{N+1} - \mathbf{I}_{N+1} - \alpha \delta \mathbf{L} (\mu \mathbf{I}_{N+1} - \mathbf{I}_{N+1})^{-1} (-\delta \mathbf{I}_{N+1})) \end{aligned} \quad (15)$$

进一步有:

$$\begin{aligned} \det(\mu \mathbf{I}_{2(N+1)} - \Gamma) &= (\mu - 1)^{N+1} \cdot |(\mu - 1) \mathbf{I}_{N+1} + \\ & \beta \delta \mathbf{L} - \alpha \beta \delta \mathbf{L} \cdot (\mu - 1)^{-1} \mathbf{I}_{N+1} \cdot (-\delta) \mathbf{I}_{N+1}| = \\ & (\mu - 1)^{N+1} \cdot |(\mu - 1) \mathbf{I}_{N+1} + (\alpha \delta^2 (\mu - 1)^{-1} + \beta \delta) \mathbf{L}| = \\ & (\mu - 1)^N \cdot |(\mu - 1)^2 \mathbf{I}_{N+1} + (\alpha \delta^2 + \beta \delta (\mu - 1)) \mathbf{L}| = \\ & \prod_{i=1}^{N+1} \{(\mu - 1)^2 + (\alpha \delta^2 + \beta \delta (\mu - 1)) \cdot \lambda_i\} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $\lambda_i (i = 1, \dots, N+1)$ 为拉普拉斯矩阵的特征值。欲使上式成立, Γ 应存在特征值 $\mu_{i,2}$ 满足下列条件:

$$\mu_{i,2} = 1 + \frac{-\beta \lambda_i \pm \sqrt{\beta^2 \lambda_i^2 - 4\alpha \lambda_i}}{2} \delta \quad (17)$$

由于增益系数 α 、 β 和控制周期 δ 均为正数, 结合假

设条件, 若 $\mu_{1,2} \neq 1$, 则必有 $\lambda_i \neq 0, i \in [1, N+1]$ 。

2) $\mu = 1$, 即 $(\mu \mathbf{I}_{N+1} - \mathbf{I}_{N+1})$ 不可逆。

此时式 (14) 可表示如下:

$$\det(\mu \mathbf{I}_{2(N+1)} - \mathbf{\Gamma}) = \begin{vmatrix} 0 & -\delta \mathbf{I}_{N+1} \\ \alpha \delta \mathbf{L} & \beta \delta \mathbf{I}_{N+1} \end{vmatrix} = |\alpha \delta \mathbf{L}| \cdot |-\delta \mathbf{I}_{N+1}| = (-1)^{N+1} \cdot \alpha^{N+1} \cdot \delta^{2(N+1)} \cdot \prod_{i=1}^{N+1} \lambda_i = 0 \quad (18)$$

由上式可知, 若 $\mu = 1$, 则必存在 $\lambda_i = 0, i \in [1, N+1]$ 。

综上所述, 当且仅当 $\lambda_i = 0, i \in [1, N+1]$ 时, 有 $\mu_{1,2} = 1$, 定理 1 得证。

定理 2: 若图 G 是连通的, 状态变换矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 特征值 1 的代数重数为 2, 且其余特征值均在单位圆内的等价条件是: 拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 中 0 特征值的代数重数为 1, 且增益系数 α 、 β 和控制周期 δ 满足下式:

$$\begin{cases} \max(\lambda_i) < \frac{4}{2\beta\delta - \alpha\delta^2} \\ \alpha\delta - \beta < 0 \end{cases} \quad (19)$$

证明: 根据定理 1, 若 $\mathbf{\Gamma}$ 有特征值 1 的代数重数为 2, 则拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 中 0 特征值的代数重数为 1。

将 \mathbf{L} 中的 0 特征值记为 λ_1 , 根据引理 1, 有 $\lambda_2, \dots, \lambda_{N+1} > 0$ 。根据韦达定理, 当 $\mu \neq 1$ 时, 式 (16) 中状态变换矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的特征值 μ 应满足下列关系:

$$\begin{cases} (\mu_{i1} - 1) + (\mu_{i2} - 1) = -\lambda_i \beta \delta \\ (\mu_{i1} - 1) \cdot (\mu_{i2} - 1) = \lambda_i \alpha \delta^2 \end{cases}, i = 2, 3, \dots, N+1 \quad (20)$$

下面分两种情况讨论 μ 位于单位圆内的等价条件:

1) μ 为实数:

分析式 (20) 可知, $(\mu_{i1} - 1) \cdot (\mu_{i2} - 1)$ 为正, 故 $\mu_{i1} - 1$ 与 $\mu_{i2} - 1$ 正负性相同; 由于 $(\mu_{i1} - 1) + (\mu_{i2} - 1)$ 为负, 故 $\mu_{i1} - 1$ 与 $\mu_{i2} - 1$ 均为负数, 则有 $\mu_{1,2} < 1, i = 2, 3, \dots, N+1$ 。

欲使 $\mu_{1,2} > -1, i = 2, 3, \dots, N+1$ 成立, 结合式 (17), 应有:

$$\frac{-\beta \lambda_i \pm \sqrt{\beta^2 \lambda_i^2 - 4\alpha \lambda_i}}{2} \delta > -2 \quad (21)$$

式 (21) 可进一步表达如下:

$$\pm \sqrt{\beta^2 \lambda_i^2 - 4\alpha \lambda_i} > -\frac{4}{\delta} + \beta \lambda_i \quad (22)$$

上式等价于:

$$\beta^2 \lambda_i^2 - 4\alpha \lambda_i < \left(-\frac{4}{\delta} + \beta \lambda_i\right)^2 \quad (23)$$

上式左侧展开后有:

$$\beta^2 \lambda_i^2 - 4\alpha \lambda_i < \beta^2 \lambda_i^2 - \frac{8}{\delta} \beta \lambda_i + \frac{16}{\delta^2} \quad (24)$$

由于 λ_i 为非负实数, 对上式化简后有:

$$\max(\lambda_i) < \frac{4}{2\beta\delta - \alpha\delta^2} \quad (25)$$

2) μ 为复数:

对式 (20) 进行化简, 有:

$$\begin{cases} \mu_{i1} + \mu_{i2} = 2 - \lambda_i \beta \delta \\ \mu_{i1} \cdot \mu_{i2} = \lambda_i \alpha \delta^2 - \lambda_i \beta \delta + 1 \end{cases} \quad (26)$$

根据式 (17) 可知, 状态变换矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的复数特征值存在共轭性, 因此令 $\mu_{i1} = a + jb$ 、 $\mu_{i2} = a - jb$, 结合式 (26) 有:

$$|\mu_{i1}| = |\mu_{i2}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\mu_{i1} \cdot \mu_{i2}} = \frac{\sqrt{\lambda_i \delta (\alpha \delta - \beta) + 1}}{\delta} \quad (27)$$

式中, 若状态变换矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的复数特征值在单位圆内, 则等价于下列条件:

$$\alpha\delta - \beta < 0 \quad (28)$$

综上可知, 式 (25) 给出了状态变换矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 非 1 的实数特征值位于单位圆内的等价条件, 式 (28) 给出了状态变换矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 非 1 的复数特征值位于单位圆内的等价条件, 定理 2 得证。

定理 3: 若图 G 是连通的, 式 (7) 成立的充要条件是状态变换矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 特征值 1 的代数重数为 2, 且其余特征值均在单位圆内。

证明: (充分性) 记矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的特征值为 1 时对应的特征向量为 $[g_1^T, g_2^T]^T$, 则有下式成立:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N+1} & \delta \mathbf{I}_{N+1} \\ -\alpha \delta \mathbf{L} & \mathbf{I}_{N+1} - \beta \delta \mathbf{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_1^T \\ g_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^T \\ g_2^T \end{bmatrix} \quad (29)$$

根据上式可以求出, g_1^T 为矩阵 \mathbf{L} 的 0 特征值对应的特征向量, g_2^T 为零向量。

当图 G 是连通图时, 结合引理 1 可知, $g_1^T = \mathbf{1}_{N+1}$, 故矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的 1 特征值对应的特征向量为 $[\mathbf{1}_{N+1}^T, \mathbf{0}_{N+1}^T]^T$ 。

为求取 $t \rightarrow +\infty$ 时状态向量 $y(t)$ 的收敛情况, 首先求取矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的 Jordan 标准形。记矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的特征向量及广义特征向量组成的可逆矩阵 \mathbf{P} 满足下式:

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{P} = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1} \\ & \mathbf{J}' \end{bmatrix} \quad (30)$$

根据矩阵广义特征向量的求法, 不难求出矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的 1 特征值对应的广义特征向量为 $[\mathbf{0}_{N+1}^T, \frac{1}{\delta} \mathbf{1}_{N+1}^T]^T$ 。

进一步地, 记矩阵 \mathbf{L} 的 0 特征值的左特征向量为 ξ_{N+1}^T , 根据左特征向量定义, 可以求出矩阵 $\mathbf{\Gamma}$ 的 1 特征值对应的左特征向量和左广义特征向量为 $[\mathbf{0}_{N+1}^T, \xi_{N+1}^T]^T$ 和 $[\frac{1}{\delta} \xi_{N+1}^T, \mathbf{0}_{N+1}^T]^T$ 。

由于 ξ_{N+1}^T 是矩阵 \mathbf{L} 的 0 特征值的左特征向量, 因此有下式成立:

$$\xi_{N+1}^T \cdot \mathbf{L} = \mathbf{0} \cdot \xi_{N+1}^T \quad (31)$$

设无人集群中的无人系统 U_0 是虚拟领航者, 则拉普拉斯矩阵 L 中的第 1 行为全零行, 因此, 不妨令 $\xi_{N+1} = [\delta, 0_{N+1}^T]^T$.

根据上述求解, 记 Γ 的特征值为 $\mu_1, \dots, \mu_{2(N+1)}$, 相应的特征向量为 $\gamma_1, \dots, \gamma_{2(N+1)}$, 相应的左特征向量为 $\eta_1, \dots, \eta_{2(N+1)}$, 令 μ_1 和 μ_2 为特征值 1, 根据前述分析, 其对应的特征向量、广义特征向量、左广义特征向量和左特征向量分别如下:

$$\begin{cases} \gamma_1 = [1_{N+1}^T, 0_{N+1}^T]^T \\ \gamma_2 = [0_{N+1}^T, \frac{1}{\delta} 1_{N+1}^T]^T \\ \eta_1 = [\frac{1}{\delta} \xi_{N+1}^T, 0_{N+1}^T]^T \\ \eta_2 = [0_{N+1}^T, \xi_{N+1}^T]^T \end{cases} \quad (32)$$

根据式 (12), 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $y(t)$ 可由下式得出:

$$\begin{aligned} \lim_{t' \rightarrow +\infty} y(t') &= \lim_{q \rightarrow +\infty} \Gamma^q y(t) = \\ & \lim_{q \rightarrow +\infty} P \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \\ & & \ddots \\ & & & \mu_{2(N+1)} \end{bmatrix}^q P^{-1} y(t) = \\ & \lim_{q \rightarrow +\infty} \left\{ (\gamma_1, \gamma_2) \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + (\gamma_3, \dots, \gamma_{2(N+1)}) \lim_{q \rightarrow +\infty} J^q \begin{pmatrix} \eta_3^T \\ \vdots \\ \eta_{2(N+1)}^T \end{pmatrix} \right\} y(t) = \\ & \lim_{q \rightarrow +\infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta} 1_{N+1} \xi_{N+1}^T & q 1_{N+1} \xi_{N+1}^T \\ 0_{N+1} 0_{N+1}^T & \frac{1}{\delta} 1_{N+1} \xi_{N+1}^T \end{bmatrix} y(t) \quad (33) \end{aligned}$$

记无人集群进行编队控制的初始时刻为 t_0 , 对上式进一步化简可得:

$$\begin{aligned} \lim_{t' \rightarrow +\infty} \begin{bmatrix} x(t') \\ v(t') \end{bmatrix} &= \lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} 1_{N+1} \xi_{N+1}^T x(t) + q \delta 1_{N+1} \xi_{N+1}^T v(t) \\ 1_{N+1} \xi_{N+1}^T v(t) \end{bmatrix} = \\ & \lim_{q \rightarrow +\infty} \begin{bmatrix} [x_0(t), \dots, x_0(t)]^T + q \delta [v_0(t), \dots, v_0(t)]^T \\ [v_0(t), \dots, v_0(t)]^T \end{bmatrix} \quad (34) \end{aligned}$$

当 $\delta < 1$ 时, 式 (34) 可进一步化简如下:

$$\lim_{t' \rightarrow +\infty} \begin{bmatrix} x(t') \\ v(t') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [x_0(t), \dots, x_0(t)]^T \\ [v_0(t), \dots, v_0(t)]^T \end{bmatrix} \quad (35)$$

将式 (35)、定义 2 结合推导过程可知, 控制协议 (8) 在满足下列条件时, 能够使无人系统实现期望构型。

$$\begin{cases} \max(\lambda_i) < \frac{4}{2\beta - \alpha\delta^2}, i = 2, \dots, N+1 \\ \delta < \frac{\beta}{\alpha} \\ \alpha, \beta > 0 \\ 0 < \delta < 1 \end{cases} \quad (36)$$

(必要性) 引理 1 表明拉普拉斯矩阵 L 至少有一个特征值为 0, 结合定理 1 可知状态变换矩阵 Γ 至少有两个特征值为 1. 假设必要性条件不满足, 则状态变换矩阵 Γ 至少有 3 个特征值不在单位圆内, 这意味着无人集群中至少有一个无人系统与其他个体状态不一致, 与式 (7) 成立的假设矛盾, 故必要性条件成立。

基于定理 3, 给出有向通信拓扑结构下控制协议 (8) 有效的充要条件如下。

推论: 对于有向通信拓扑结构 $G(t)$, 控制协议 (8) 有效的充要条件是 $G(t)$ 在任意时刻 t 是连通的。

4 系统参数设计

式 (36) 给出了采用控制协议 (8) 进行编队控制时应当满足的约束条件, 可以看出, α 、 β 、 δ 在满足各自取值范围的前提下互相制约。因此, 本文根据系统的实际性能指标, 给出下列参数确定流程。

步骤 1: 对给定的无人集群系统, 根据其通信拓扑关系求解拉普拉斯矩阵的特征值;

步骤 2: 根据无人系统的性能指标确定参数的实用取值范围, 记无人系统的最大加速度为 u_{\max} , 记初始时刻无人系统间的最大位置差量和最大速度差量为 l_{\max}^x 和 l_{\max}^v , α 、 β 应满足 $\alpha l_{\max}^x + \beta l_{\max}^v$ 大小适当, 本文取 $\alpha l_{\max}^x + \beta l_{\max}^v = u_{\max}$ 。

步骤 3: 将 α 和 β 取值代入式 (36), 确定合适的控制周期 δ , 若无解, 则返回步骤 2, 调整 α 和 β 取值, 必要时, 可通过调整无人集群拓扑结构和无人系统控制周期来放宽 α 和 β 的取值条件。

5 仿真实验

本节通过数值仿真对无人集群协同编队控制方法进行验证。设定无人集群由 4 架无人机、5 艘水面无人艇组成, 假设无人机在航行过程中高度控制器与航向、偏航控制器解耦。仿真中平台的位置、速度、加速度单位分别是 m、m/s、m/s², 仿真时间共 1 000 s。仿真所用参数的取值如表 1 所示, 无人机和无人艇的加速度性能指标 u_{\max}^{uv} 、 u_{\max}^{usv} 分别取 10 m/s² 和 5m/s²。

表 1 控制协议参数

参数	α	β
取值	0.033	0.33

5.1 有向通信拓扑条件下的编队控制

首先给定无人集群的初始位置 F_s 和期望构型参数 F_d , 如式 (38) 及图 1 所示。给定无人集群初始时刻的通信拓扑如图 2 所示, 可以计算其对应的拉普拉斯矩阵的最大特征值为 2。

$$F_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -340 & 150 & -280 & 250 & -300 \\ 0 & 180 & 20 & 240 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}$$

$$F_d = \begin{bmatrix} 380 & -400 & 400 \\ 0 & 300 & 310 \\ 300 & 600 & 600 \\ 0 & 0 & -100 & 100 & -200 & 200 & -300 & 300 \\ 0 & 300 & 200 & 200 & 100 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 300 & 300 \\ -400 & 400 \\ 300 & 300 \\ 600 & 600 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$F_d = \begin{bmatrix} -400 & 400 \\ 300 & 300 \\ 600 & 600 \end{bmatrix} \quad (38)$$

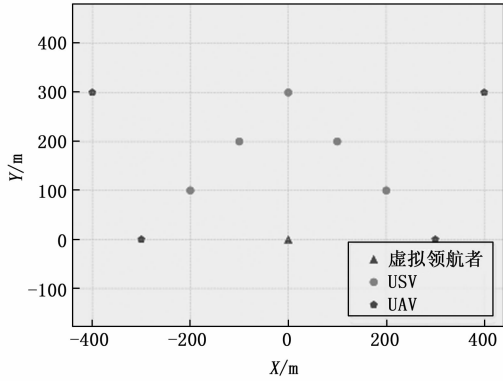


图 1 无人集群编队构型

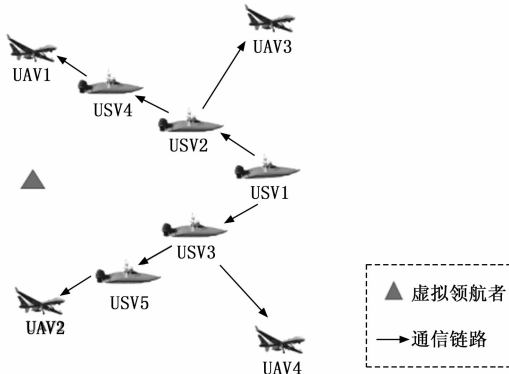
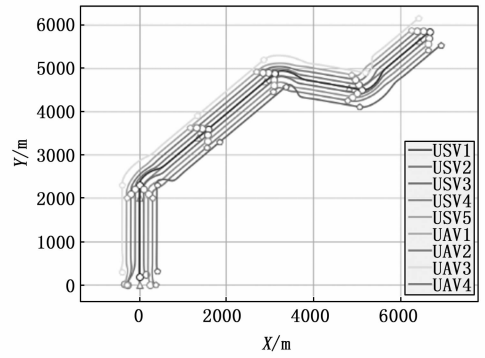


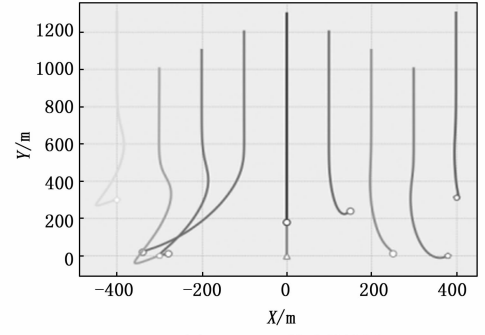
图 2 无人集群初始通信拓扑结构

图 3 (a) 给出了无人集群的编队轨迹，图中虚拟领航者采用正三角形标记，无人艇与无人机分别采用圆形和五边形标记。图 3 (b) 给出了 0 至 100 s 时的无人集群编队轨迹，可以看出，当无人集群的初始位置不满足构型需求时，无人集群能够在控制协议的作用下迅速向期望构型收敛。图 3 (a) 中给出了无人集群在 200 s 至 250 s、600 s 至 650 s 和 800 s 至 850 s 之间进行 3 次转弯机动的编队轨迹，仿真过程中每次转弯机动的幅度设定为 50°。可以看出，虚拟领航者在直线或转弯机动的情况下，无人集群编队均能有效保持编队构型，体现了控制协议的稳定性。

图 4 给出了无人集群以期望构型进行编队飞行过程时的速度变化情况，可以看出，无人系统在三次转弯机

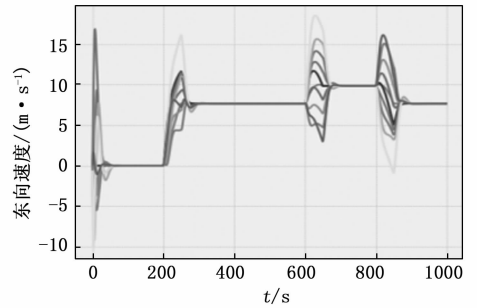


(a) 0~1 000 s 编队轨迹图

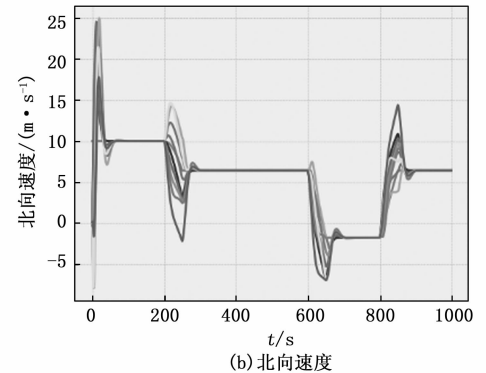


(b) 0~100 s 编队轨迹图

图 3 无人集群编队轨迹图



(a) 东向速度



(b) 北向速度

图 4 无人集群编队飞行速度变化图

动的过程中均能够及时调整自身速度，完成对编队构型的保持。从图 4 中可以看出，在编队转弯的过程中，各平台的速度调整量并不一致，这是由于无人集群在转弯过程中需要保持构型，从而导致了集群成员间的转弯半

径不同, 结合图 3 也可以看出, 所提控制协议能够在编队转弯飞行的过程中较好地保持构型不变。

5.2 控制参数对控制性能的影响

为验证控制协议中参数对编队控制效率的影响, 分别以 α 和 β 为变量, 采用以下两组对比参数对无人集群初始构型形成的过程进行对比仿真。

表 2 控制协议参数

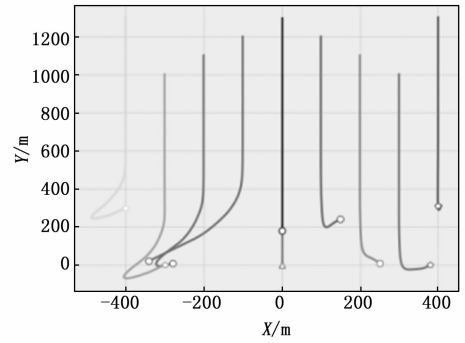
	α	β	δ
基本参数	0.033	0.33	0.1
对比参数 1	0.033	0.165	0.1
对比参数 2	0.1	0.33	0.1

图 5 至图 7 给出了不同参数设置下无人集群形成初始构型的轨迹与速度变化。从图 6 和图 7 中可以看出, 通过适当减小 β 取值, 能够缩短无人集群速度收敛一致的时间, 但速度调节过程中无人系统所需达到的最大速度会明显增加; 通过适当减小 α 取值, 能够获得更加平滑的轨迹, 但需要更长的速度调节时间。

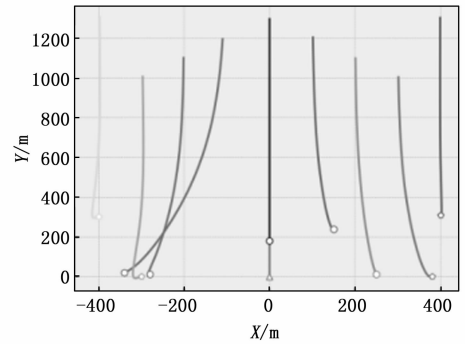
6 结束语

本文研究了一种有向通信拓扑下的无人集群编队控制问题。相较于现有一致性控制协议理论分析, 本文通过代数理论与矩阵分析对所提控制协议进行了严格的稳

定性分析, 分析过程相对易于理解。在完成理论分析的

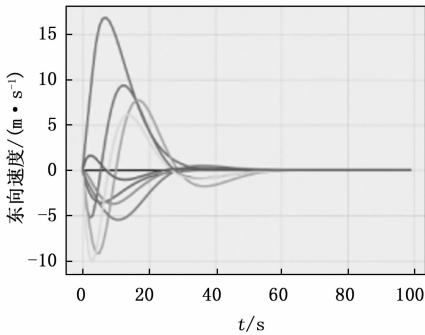


(a) $\alpha=0.033, \beta=0.165$

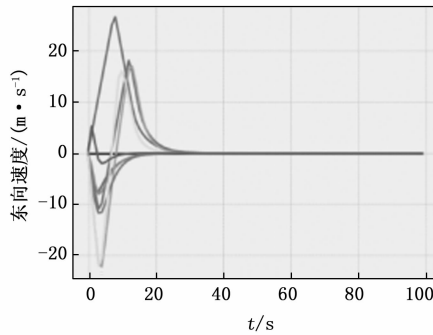


(b) $\alpha=0.01, \beta=0.33$

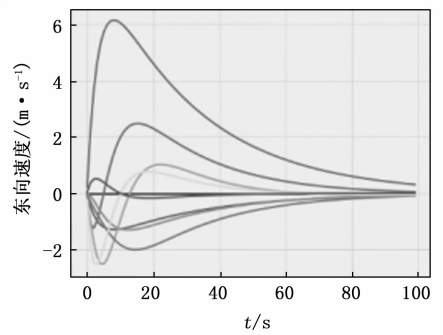
图 5 0~100 s 编队轨迹图



(a) $\alpha=0.033, \beta=0.33$

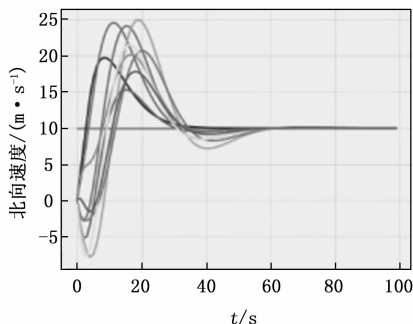


(b) $\alpha=0.033, \beta=0.165$

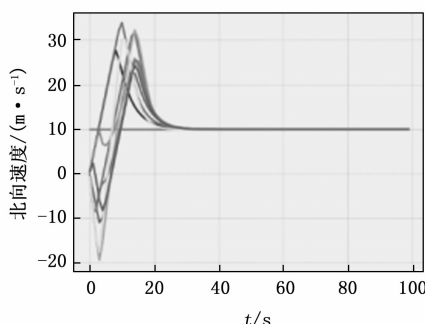


(c) $\alpha=0.01, \beta=0.33$

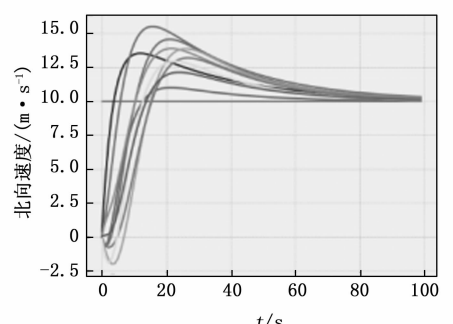
图 6 编队初始构型形成过程中的东向速度变化



(a) $\alpha=0.033, \beta=0.33$



(b) $\alpha=0.033, \beta=0.165$



(c) $\alpha=0.01, \beta=0.33$

图 7 编队初始构型形成过程中的北向速度变化

基础上, 进一步给出了控制协议中的参数设计方法, 并通过数值仿真验证了所设计控制协议的有效性。

参考文献:

[1] LI Y L, LI H T, DING X Y, et al. Leader-Follower Consensus of Multiagent Systems With Time Delays Over Finite Fields [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49 (8): 3203 - 3208.

[2] HUANG J, WANG W, WEN C, et al. Distributed adaptive leader-follower and leaderless consensus control of a class of strict-feedback nonlinear systems: a unified approach [J]. *Automatica*, 2020, 118 (5): 109021.

[3] KIM J, YAMMARINO F J, DIONNE S D, et al. State-of-the-science review of leader-follower dyads research [J]. *The Leadership Quarterly*, 2019: 101306.

[4] 费思远, 鲜 斌, 王 岭. 基于群集行为的分布式多无人机编队动态避障控制 [J]. *控制理论与应用*, 2022, 39 (1): 1 - 11.

[5] 徐 博, 张大龙. 基于量子行为鸽群优化的无人机紧密编队控制 [J]. *航空学报*, 2020, 41 (8): 313 - 324.

[6] 杨明月, 寿莹鑫, 唐 勇, 等. 多四旋翼无人机编队保持与避碰控制 [J]. *航空学报*, 2022, 43 (s1): 89 - 99.

[7] 陈 佳, 单 梁, 吴志强, 等. 虚拟结构法和领航跟随法相结合的多机器人协同编队算法研究 [C] //2021 中国自动化大会论文集, 2021: 597 - 602.

[8] 刘 伟, 闫 实, 王希彬, 等. 不确定通信网络下多智能体系统一致性控制 [J]. *北京航空航天大学学报*, 2024 (5): 1463 - 1473.

[9] 马小陆, 谭毅波, 梅 宏. 符号图下含扰动的多智能体系统预定时间二分一致性 [J]. *控制与决策*: 1 - 9 [2023-06-27]. https://kns.cnki.net/kcms2/article/abstract?v=YHRUfPYi6NOGdacvIM_eU0AXakZr8wUUjMd-wpMYcBoY9mircio4cHUzqnnbG9paMM6CjX7scgflrdxL9xgrmWi8VtaNWHPgoWXOc0IhMXOc4V82Mc3nlp4Jwnh8rBN48fLPOIFz3LaZaeCkPZx80UrdQlQu-j61bjv9a8iaP3o5olc

[16] 张 冕. 行星齿轮箱关键零部件故障诊断 [D]. 成都: 电子科技大学, 2019.

[17] YE H C C M, ZHU Y, ULANOVA L, et al. Matrix profile I: all pairs similarity joins for time series: a unifying view that includes motifs, discords and shapelets [C] // 2016 IEEE 16th International Conference on Data Mining (ICDM), 2016: 1317 - 1322.

[18] 贺志洋, 赵德尊, 娄 乐, 等. 基于低秩约束的旋转机械内激励激发的振源信号分离研究 [J]. *振动与冲击*, 2020, 41 (17): 152 - 159.

[19] ZHANG Y W, Alexandre d'Aspremont, Laurent El Ghaoui. Sparse PCA: convex relax-ations, algorithms and ap-

yOb94PoGTuYi-5b&-uniplatform = NZKPT&-language = CHS.

[10] FU X, PAN J, WANG H, et al. A formation maintenance and reconstruction method of UAV swarm based on distributed control [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2020, 104: 105981.

[11] 闵海波, 刘 源, 王仕成, 等. 多个体协调控制问题综述 [J]. *自动化学报*, 2012, 38 (10): 1557 - 1570.

[12] 侯岳奇, 梁晓龙, 张 诺, 等. 有向通信拓扑下海上无人集群分布式编队控制 [J]. *中国舰船研究*, 2021, 16 (6): 1 - 9.

[13] 刘 流, 梁晓龙, 张佳强, 等. 切换通信拓扑条件下的无人机集群构型变换控制 [J]. *兵工学报*, 2019, 40 (5): 996 - 1002.

[14] 于跃飞, 林国怀, 马 慧, 等. 输出死区下的随机多智能体系统一致性饱和控制 [J]. *控制与决策*, 2023, 38 (5): 1249 - 1257.

[15] 杜 雪, 孙兆栋, 徐成龙, 等. 输入时延与通信时延下 AUV 集群的牵制控制 [J]. *北京航空航天大学学报*, 2024, 50 (5): 1474 - 1480.

[16] 徐星光, 王晓峰, 姚 璐, 等. 固定翼无人机编队构型与通信拓扑优化 [J]. *系统工程与电子技术*, 2022, 44 (9): 2936 - 2946.

[17] 田 磊, 董希旺, 赵启伦, 等. 异构集群系统分布式自适应输出时变编队跟踪控制 [J]. *自动化学报*, 2021, 47 (10): 2386 - 2401.

[18] REN W, BEARDRW. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50 (5): 655 - 661.

[19] 田 磊, 王蒙一, 赵启伦, 等. 拓扑切换的集群系统分布式分组时变编队跟踪控制 [J]. *中国科学: 信息科学*, 2020, 50 (3): 408 - 423.

[20] 王力梅, 郭莉琴, 邵海琴, 等. 分块矩阵的行列式 [J]. *四川兵工学报*, 2011, 32 (11): 149 - 150.

[20] 蔡艳平, 范 宇, 陈 万, 等. 改进时频分析和特征融合在内燃机故障诊断中的应用 [J]. *中国机械工程*, 2020, 31 (16): 1901 - 1911.

[21] FENG Z P, ZUO M J. Vibration signal models for fault diagnosis of planetary gearboxes [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331 (22): 4919 - 4939.

[22] 朱丹宸, 何 伟, 朱群伟. 基于多信号和改进经验傅里叶分解的故障特征提取方法 [J]. *机电工程*, 2024, 41 (10): 1853 - 1864.

[23] 林 云, 郭 瑜, 陈 鑫. 参数优化最大二阶循环平稳盲解卷积行星轮轴承故障提取 [J]. *振动与冲击*, 2023, 42 (2): 321 - 328.

(上接第 70 页)