

T-S 模糊系统的自触发有限时间 H_∞ 控制

刘晓迪

(江南大学 轻工过程与先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122)

摘要: 为克服事件触发控制对硬件设备的依赖以及控制策略频繁更新的局限, 针对一类不确定 Takagi-Sugeno (T-S) 模糊系统的有限时间 H_∞ 控制问题, 引入自触发机制, 提出一种基于此机制下只与触发时刻状态有关的模糊控制器设计方法; 基于自触发机制并结合有限时间控制的思想, 通过设计触发间隔函数、推导并求解线性矩阵不等式 (LMI), 使得系统在保障稳定性的前提下, 系统运动轨迹不会超过一定的界限, 并达到所期望 H_∞ 性能水平; 同时相较于事件触发机制, 自触发机制位于系统内部, 无需额外硬件设备接收触发信号且只需利用当前的触发状态信息来预测下一触发时刻, 在一定程度上进一步降低系统资源成本; 此外, 利用李亚普诺夫函数对系统稳定性进行了严格分析, 并提供一个确保能够防止芝诺现象发生的证明; 最后, 通过数值仿真、单连杆刚性机器人系统实例仿真两个实验说明所提方法的有效性。

关键词: 有限时间有界; 自触发控制; 鲁棒 H_∞ 控制; T-S 模糊系统; 模糊推理

Self-triggering Finite Time H_∞ Control for T-S Fuzzy Systems

LIU Xiaodi

(Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry (Ministry of Education),

Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: In order to overcome the dependence of event-triggering control on hardware devices and the limitation on the frequent updates of control strategies, aimed at the finite time H_∞ control problem of uncertain Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy systems, a self-triggering mechanism is introduced to propose a fuzzy controller design method based on this mechanism. Based on the self-triggering mechanism and the idea of finite-time stability, by designing the triggering interval function, deducing and solving the linear matrix inequality (LMI), the system trajectory will not exceed the certain limit and reach the desired H_∞ performance under the premise of ensuring stability. At the same time, compared with the event trigger mechanism, the self-trigger mechanism is located in the system, without the additional hardware devices to receive the trigger signals, and only using the current trigger state information to predict the next trigger moment, it further reduces the system resource cost to a certain extent. In addition, the Lyapunov function is adopted to strictly analyze the stability of the system, and provide a proof to prevent the Zeno phenomenon. Finally, the numerical simulation and actual simulation of a single-link rigid robot system are verified the effectiveness of the proposed method.

Keywords: finite-time boundness; self-triggered control; robust H_∞ control; T-S fuzzy system; fuzzy reasoning

0 引言

非线性在各种实际系统中广泛存在, 这给稳定性分析和合成带来了更多的困难和复杂性。T-S 模糊模型作为一种非常典型的复杂动态系统模糊模型, 通过使用“IF-THEN”规则, 将复杂的非线性问题转化为不同的小线段上的问题, 从而使得复杂的非线性系统更容易被分析。T-S 模糊模型已经成为处理非线性系统的稳定性分析及控制器综合的强有力工具, 且已被成功应用于多种实际控制问题中, 如汽车的防抱死制动系统与主动悬架系统的集成控制^[1]、搅拌反应釜系统的性能控制^[2]、主从式机器人的适应性的增强^[3]等。

然而目前关于 T-S 模糊的研究大都集中在李亚普诺夫

渐近稳定性上, 渐近稳定只能够确保系统的稳态性能良好, 但是系统中的某些暂态性能却未能体现。在实践中, 系统在有限时间间隔内的行为也非常重要。文献 [4] 引入有限时间概念, 并提出了一个有限时间的控制器设计标准。此后, 许多学者参与 T-S 模糊系统有限时间问题的研究^[5-8], 研究有限时间控制具有很重要的实际意义。

但上述文献控制器设计过程中, 其状态向控制器的传输通常是连续的。在某些情况下, 当控制目标实现时, 无需在保持系统性能时依旧每次都传输状态, 从而造成冗余传输, 这就导致了资源的浪费和低效率。造成这一缺点的主要原因是, 更新频率是由采样周期决定的, 通常假设采样周期是一个较小的值, 与系统状态无关。因此, 大量的

收稿日期: 2023-08-26; 修回日期: 2023-09-16。

作者简介: 刘晓迪 (1999-), 女, 硕士研究生。

引用格式: 刘晓迪. T-S 模糊系统的自触发有限时间 H_∞ 控制[J]. 计算机测量与控制, 2024, 32(4): 120-128.

冗余信息将被传输和更新。为了解决这一问题，文献 [9] 提出了一种事件触发控制方案，有效地减少传输资源。近年来，人们对事件触发机制下的 T-S 模糊系统分析和控制做了大量的工作^[10-13]。但是，其检测机制的被动性决定了其必须实时监测触发条件，会增大系统的执行代价。而自触发控制是根据当前的状态测量值，计算出控制律的下一个更新时刻，进一步节省资源。自触发控制也因此得到了越来越多的关注^[14-18]。文献 [19] 利用事件触发控制和自触发控制实现线性系统的有限时间稳定。文献 [20] 利用 T-S 模糊模型针对一类开关非线性系统设计了一种事件触发通信方案，讨论了其有限时间耗散控制问题。文献 [21] 研究了一种在多频率范围限制下的马尔可夫跳跃系统的自触发有限时间控制策略。

事件触发控制都需要事件触发器实时监控系统和测量误差。这在有些情况下很难实现且会造成额外计算资源损耗。因此有必要研究自触发控制。同时，关于 T-S 模糊系统通过自触发策略实现有限时间控制的文献非常稀少，这激发了我们的研究兴趣。

基于以上讨论，本文研究 T-S 模糊系统的自触发有限时间 H^∞ 控制问题。主要贡献为：

针对 T-S 模糊系统引入一种自触发方案，考虑参数不确定性和有界干扰对系统的影响，结合所提出的自触发机制，建立了一个基于自触发机制的连续时间 T-S 模糊系统模型。较事件触发方案而言，自触发方案不需要额外的硬件来监测触发条件，合理地减少计算资源及额外硬件资源。考虑有限时间间隔内的行为，使系统状态在固定的有限时间间隔内不超过一定界限的同时满足所期望的 H^∞ 性能指标。同时本文所提到的自触发机制避免了芝诺行为的发生，并且提供理论证明。

1 问题描述

考虑如下连续时间非线性系统：

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

其中： $x(t)$ 为系统状态， $u(t)$ 为控制输入，引入一个已知的非线性函数 $f(x(t))$ 来描述其非线性特性。通过采用模糊理论的方法将上述非线性系统 (1) 用以下具有第 i 条模糊规则的 T-S 模糊模型来逼近，其第 i 条规则描述的系统模型为：

Plant rule i :

if $\xi_1(t)$ is M_{i_1} , and ... and $\xi_n(t)$ is M_{i_n} , then

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A_i + \Delta A_i(t)]x(t) + [B_i + \Delta B_i(t)]u(t) + G_i\omega(t) \\ z(t) = C_i x(t) + D_i u(t) \quad i = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (2)$$

其中： ξ_1, \dots, ξ_p 为前件变量， $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态， $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入， $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ 为外部扰动且满足条件 $\int_0^T \omega^T(t)\omega(t)dt \leq W$ 。 A_i, B_i, C_i, D_i 及 G_i 是适当维数的系数矩阵。 r 是规则数量， M_{ij} 是模糊集， $\Delta A_i(t), \Delta B_i(t)$ 是系统矩阵

中的不确定时变参数，满足如下形式：

$$\begin{aligned} [\Delta A_i(t) \quad \Delta B_i(t)] &= [HF(t)(E_{1i} \quad E_{2i})] \\ i &= 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (3)$$

其中： $H, E_{1i}, E_{2i}, i = 1, 2, \dots, r$ 是已知的具有适当维数的常数实矩阵， $F(t)$ 是满足 $F(t)F^T(t) \leq I$ 的非线性时变矩阵函数，其中 I 表示适当位数的单位矩阵。则该 T-S 模糊系统的整体模型为：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i[\xi(t)]\{[A_i + \Delta A_i(t)]x(t) + [B_i + \Delta B_i(t)]u(t) + G_i\omega(t)\} \\ z(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t))C_i x(t) + D_i u(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (4)$$

式中， $h_i(\xi(t)) = \frac{\beta_i(\xi(t))}{\sum_{i=1}^r \beta_i(\xi(t))}$ ， $\beta_i(\xi(t)) = \prod_{j=1}^n M_{ij}(\xi_j(t))$ ，其中 $M_{ij}[\xi_j(t)]$ 是 $\xi_j(t)$ 在模糊集 M_{ij} 中的隶属度，且有：

$$\sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) = 1, 0 \leq h_i(\xi(t)) \leq 1, i = 1, 2, \dots, r$$

不同于事件触发控制，自触发控制提供了一种灵活的周期调整方式。如图 1 所示，该机制根据系统动力学知识和当前触发时刻的状态信息在自触发机制中计算下一触发时刻，并且状态反馈控制器只与当前触发时刻的系统信息 $x(t_k)$ 有关。也就是说，只有在触发时刻控制律才会更新，从而产生比事件触发控制更长的任务周期。

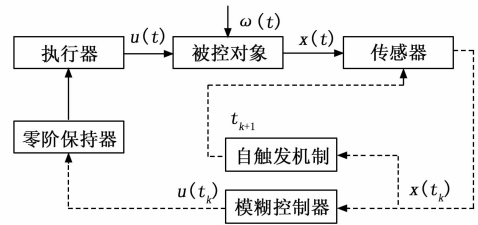


图 1 自触发机制原理图

因此，利用并行分布补偿方法，设计具有如下规则的状态反馈控制器：

Plant rule i :

$$\begin{aligned} &\text{if } \xi_1(t) \text{ is } M_{j_1} \text{ and } \dots \text{ and } \xi_n(t) \text{ is } M_{j_n}, \\ &\text{then } u(t) = K_j x(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \end{aligned} \quad (5)$$

式中， K_j 为局部反馈控制增益矩阵， t_k 是当前触发时刻， t_{k+1} 是下一触发时刻， $x(t_k)$ 是当前触发时刻的系统状态。模糊控制器的总体模型为：

$$u(t) = \sum_{j=1}^r h_j[\xi(t_k)]K_j x(t_k) \quad (6)$$

定义 $e(t)$ 为误差，且

$$e(t) = x(t_k) - x(t) \quad (7)$$

结合式 (7) 将模糊控制器 (6) 代入系统 (1) 得如下自触发闭环系统，为方便书写， $\sum_{j=1}^r h_j[\xi(t_k)]$ 简化为 h_j ，

$\sum_{i=1}^r h_i[\xi(t)]$ 简化为 h_i 。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i \sum_{j=1}^r h_j [(A_i + \Delta A_i(t) + B_i K_j + \Delta B_i(t) K_j) \\ \quad * x(t) + (B_i K_j + \Delta B_i(t) K_j) e(t) + G_i \omega(t)] \\ z(t) = \sum_{i=1}^r h_i \sum_{j=1}^r h_j [(C_i + D_i K_j) x(t) + D_i K_j e(t)] \end{cases} \quad (8)$$

本文所涉及定义及引理较多，为方便下文讨论，在此先给出介绍。

定义 1：对于给定的常数 $c_1, c_2, T (c_1 < c_2)$ 和正定矩阵 R ，假设控制输入 $u(t) = 0$ ，外界干扰 $\omega(t) = 0$ ，如果存在：

$$x^T(0)R x(0) \leq c_1 \Rightarrow x^T(t)R x(t) \leq c_2, \forall t \in [0, T] \quad (9)$$

则自触发闭环系统 (8) 是 (c_1, c_2, T, R, W) 有限时间稳定的。

定义 2：对于给定的常数 $c_1, c_2, T (c_1 < c_2)$ 和正定矩阵 R ，假设控制输入 $u(t) = 0$ ，外界干扰 $\omega(t) \neq 0$ 且上界为 W ，在给定时间 $[0, T]$ 内，使得下面条件成立：

$$x^T(0)R x(0) \leq c_1 \Rightarrow x^T(t)R x(t) \leq c_2, \forall t \in [0, T] \quad (10)$$

则自触发闭环系统 (8) 是 (c_1, c_2, T, R, W) 有限时间有界。

定义 3：给定参数 $0 < c_1 < c_2, T > 0, W > 0$ 及正定矩阵 R ，若系统 (8) 有限时间有界且满足零初始条件下：

$$\int_0^T z^T(t)z(t)dt < \gamma^2 \int_0^T \omega^T(t)\omega(t)dt \quad (11)$$

则系统 (8) 关于 (c_1, c_2, T, R, W) 有限时间有界且同时满足所期望的干扰抑制水平 γ 。

引理 1：对给定的适当维数的矩阵 Y, H, E ，其中 Y 是对称矩阵， F 满足 $F^T F \leq I$ ，当且仅当存在一个常数 $\beta > 0$ ，使得 $Y + \beta H H^T + \beta^{-1} E E^T < 0$ 成立时，有 $Y + H F E + E^T F^T H^T < 0$ 。

引理 2：对于任意适维实矩阵 X, Y 和任意正标量 $\lambda > 0$ ，下列不等式成立：

$$X^T Y + Y^T X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y$$

引理 3：对于连续函数 $u(t), v(t)$ 及 $f(t, u(t))$ ，若对任意 $t \geq 0$ 均满足 $\dot{u}(t) = f(t, u(t)), u(t_0) = u_0, \dot{v}(t) \leq f(t, v(t)), v(t_0) = v_0 \leq u_0$ 。则当 $t \geq 0$ ，有 $v(t) \leq u(t)$ 成立。

注：前文提到的有限时间稳定与通常意义下李雅普诺夫稳定是截然不同的概念。有限时间稳定是指在一个有限的时间区间范围，系统的状态轨迹始终能保持在预先给定的界限，它注重研究的是系统的暂态性能。

2 主要成果

自触发控制系统的核心通常包括一个反馈控制器和一个预测何时传输数据和更新控制信号的触发器。触发器决定传输数据之前，两个触发间隔之间的控制信号沿用上一触发时刻的控制信号保持不变，即在此期间不进行数据传输和控制信号的更新以达到节约通信资源的目的。然而由

于触发器的存在，使自触发控制下的闭环系统是一个同时具有连续和离散特征的混合系统，这势必会增大对系统稳定性分析的难度。

本文主要针对不确定 T-S 模糊系统进行基于自触发机制下有限时间的干扰鲁棒控制研究，研究主要分为两步：

1) 针对不确定 T-S 模糊系统 (4) 引入自触发机制，主要任务为设计并推导自触发间隔函数，使其仅根据系统当前采样信息决定下一个执行时刻以减少通讯及计算资源的占用。并针对不同的模糊子系统设计不同的触发阈值、触发矩阵，显著提高了设计的灵活性，有效地减轻了通信负担，直接反映了模糊模型的结构特征。

2) 设计模糊反馈控制器，结合 H_∞ 理论、有限时间有界思想，使得自触发闭环控制系统 (8) 具有一个给定的有限时间 H_∞ 性能，且保证系统运动轨迹不会超过一定的界限。

2.1 自触发机制

在事件触发控制策略中，常常定义一个事件触发函数，当且仅当事件触发函数满足一定条件时事件触发/发生，此时更新采样值。但是对于此条件的检测往往是需要额外硬件设备进行持续检测的。

与事件触发控制相比，自触发控制是指系统或设备通过内部机制来执行某些操作，不需要外部的触发信号或指令。此控制方式的一个基本要求是如何设计触发间隔函数 $\tau(x(t_k))$ 。通过表达式 $t_{k+1} = \tau(x(t_k)) + t_k$ 预测下一触发时刻，从而降低控制的实现成本。

引入下列触发条件 (12)， Φ_i 为第 i 条模糊规则下待求的触发参数矩阵， $0 < \epsilon_i \leq 1$ 为第 i 条模糊规则下对应的触发系数。

$$e^T(t)\Phi_i e(t) \geq \epsilon_i x^T(t)\Phi_i x(t) \quad (12)$$

定理 1：对于给定参数 β 及触发系数 ϵ_i ，且满足 $1 - \epsilon_i(1 - \beta^{-1}) > 0$ ，则自触发控制系统的触发间隔函数表达式如下：

$$\tau(x(t_k)) = \frac{1}{Q_1} \ln \left[\frac{Q_1 Q_3}{Q_2 \|x(t_k)\| + Q} \right] \quad (13)$$

其中：

$$Q_1 = \left\{ \max_{i \in M} \left\| \sqrt{\Phi_i} A_i \sqrt{\Phi_i^{-1}} \right\| + \max_{i \in M} \left\| \sqrt{\Phi_i} H \right\| \left\| E_{1i} \sqrt{\Phi_i^{-1}} \right\| \right\}$$

$$Q_2 = \left\{ \max_{i \in M} \left\| \sqrt{\Phi_i} A_i \right\| + \max_{i \in M} \left\| \sqrt{\Phi_i} H \right\| \left\| E_{1i} \sqrt{\Phi_i^{-1}} \right\| + \right.$$

$$\left. \max_{i \in M} \left\| \sqrt{\Phi_i} B_i \sum_{j=1}^r h_j(\xi(t_k)) K_j \right\| + \right.$$

$$\left. \max_{i \in M} \left\| \sqrt{\Phi_i} H \right\| \left\| E_{2i} \sum_{j=1}^r h_j(\xi(t_k)) K_j \right\| \right\}$$

$$\bar{Q} = W \left\| \sqrt{\Phi_i} G_i \right\|$$

$$Q_3 = \sqrt{\min_{i \in M} \left\{ \frac{\epsilon_i(1-\beta)}{1-\epsilon_i(1-\beta^{-1})} x^T(t_k)\Phi_i x(t_k) \right\}}$$

证明：令 $y(t) = \left\| \sqrt{\Phi_i} e(t) \right\|$ ，结合式 (2)、式 (6) 则有：

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq \left\| \sqrt{\Phi_i} e(t) \right\| \leq$$

$$\left\| \sqrt{\Phi_i} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_j h_j [(A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)K_j x(t_k) + G_i \omega(t)] \right\| \leq \frac{1}{Q_1} \ln \left[\frac{Q_1 \sqrt{\min_{i \in M} \{F x^T(t_k) \Phi_i x(t_k)\}}}{Q_2 \|x(t_k)\| + \bar{Q}} \right] \quad (21)$$

Zeno 行为是事件驱动函数一段时间内被无限次数触发, 排除芝诺行为是事件驱动机制可以使用的重要前提条件。

其中: $\theta = \lambda_{\min}(\sqrt{\Phi_i})$, τ_1 即为所提出的自触发方案下的触发间隔下界。可以很容易地从式 (21) 中进一步的发现 τ_1 是正的, 也就是说, 系统每次触发时其触发时刻均要大于上次触发时刻。通过理论分析证明了本文所设计的自触发机制不会存在芝诺行为。

2.2 自触发有限时间 H_∞ 性能分析

在实际工业过程中, 除了系统在无限时间内的稳态性能外, 有时暂态性能尤其重要。实际上, 如果一个稳定的系统具有较坏的暂态性能, 比如震荡剧烈、反应迟缓等, 将会造成很坏的影响, 从而无法满足工业过程的应用要求。基于这种情况的存在使得在有限时间内约束系统的状态轨迹成为必要。

本节将自触发条件与 H_∞ 理论相结合, 同时考虑有限时间稳定。对自触发闭环系统 (8) 进行 H_∞ 性能分析, 经过严格数学推导, 得到定理 2、定理 3。

定理 2: 如果对于给定参数 $0 < \epsilon_i \leq 1, 0 < c_1 < c_2, \gamma > 0, W > 0, T > 0$ 和适维矩阵 R , 存在实对称矩阵 $P > 0$, 自触发参数矩阵 $\Phi_i > 0$, 以及控制器增益 K_j 使下列线性矩阵不等式成立, 则自触发控制系统 (8) 关于 (c_1, c_2, T, R, W) 有限时间有界且满足期望的 H_∞ 性能。

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A} & P \bar{B} & P G_i & (C_i + D_i K_j)^T \\ -a \tilde{P} + \epsilon_i \Phi & * & * & * \\ * & -\Phi_i & 0 & K_j^T D_i^T \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (22a)$$

$$\lambda_1^* R^{-1} < Q < \lambda_2^* R^{-1} \quad (22b)$$

$$e^{\alpha T} c_1 \lambda_{\min}(P) + \frac{\gamma^2 W}{\alpha} (e^{\alpha T} - 1) < \lambda_{\max}(P) c_2 \quad (22c)$$

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^r h_i \sum_{j=1}^r h_j (A_i + B_i K_j + \Delta A_i + \Delta B_i K_j)$$

$$\bar{B} = \sum_{i=1}^r h_i \sum_{j=1}^r h_j (B_i K_j + \Delta B_i K_j)$$

记矩阵 P 的最小、最大特征值分别为 λ_1, λ_2 , 即 $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(P), \lambda_{\max} = \lambda_{\max}(P)$ 。令 $\lambda_1^* = \frac{1}{\lambda_{\max}}, \lambda_2^* = \frac{1}{\lambda_{\min}}$ 。

证明: 取李亚普诺夫函数为:

$$V(x(t)) = x^T(t) \tilde{P} x(t)$$

其中: $\tilde{P} = R^{1/2} P R^{1/2}$, 沿自触发闭环系统 (8) 的轨迹, 求取 $V(x(t))$ 的导数 $\dot{V}(x(t))$, 即有:

$$\dot{V} = \dot{x}^T(t) \tilde{P} x(t) + x^T(t) \tilde{P} \dot{x}(t) = \zeta \begin{bmatrix} \bar{A}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A} & \bar{P} \bar{B} & \bar{P} G_i \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}^T \zeta^T \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{\Phi_i} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_j h_j [(A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)K_j x(t_k) + G_i \omega(t)] \right\| \leq \\ & \left\| \sqrt{\Phi_i} \right\| \left\| \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_j h_j (A_i + \Delta A_i) \right\| \|x(t_k)\| + \\ & \left\| \sqrt{\Phi_i} \right\| \left\| \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_j h_j (B_i + \Delta B_i)K_j \right\| \|x(t_k)\| + \\ & \left\{ \left\| \sqrt{\Phi_i} \right\| \left\| \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_j h_j (A_i + \Delta A_i) \sqrt{\Phi_i^{-1}} \right\| \right\} * \\ & \left\| \sqrt{\Phi_i} e(t) \right\| + W \left\| \sqrt{\Phi_i} G_i \right\| + \\ & \left\| \sqrt{\Phi_i} \right\| \left\{ \max_{i \in M} \left\| (A_i + \Delta A_i) \sqrt{\Phi_i^{-1}} \right\| \right\} \left\| \sqrt{\Phi_i} e(t) \right\| + W \left\| \sqrt{\Phi_i} G_i \right\| + \\ & \left\| \sqrt{\Phi_i} \right\| \left\{ \max_{i \in M} \left\| (A_i + \Delta A_i) \right\| + \max_{i \in M} \left\| (B_i + \Delta B_i) \sum_{j=1}^r h_j K_j \right\| \right\} \\ & \|x(t_k)\| \leq Q_1 \left\| \sqrt{\Phi_i} e(t) \right\| + Q_2 \|x(t_k)\| + \bar{Q} \quad (14) \end{aligned}$$

假设 $\frac{dh}{dt} = Q_1 h(t) + Q_2 \|x(t_k)\| + \bar{Q}$, 结合引理 3, 有:

$$y(t) \leq h(t) = \frac{Q_2 \|x(t_k)\| + \bar{Q}}{Q_1} (e^{Q_1(t-t_k)} - 1) \leq \frac{Q_2 \|x(t_k)\| + \bar{Q}}{Q_1} e^{Q_1(t-t_k)} \quad (15)$$

若在时间间隔 $[t_k, t_{k+1})$ 系统没有触发, 由事件触发条件 (12) 结合式 (7) 可知下式成立:

$$\begin{aligned} & e^T(t) \Phi_i e(t) < \epsilon_i x^T(t) \Phi_i x(t) < \\ & \epsilon_i [x^T(t_k) - e^T(t)] \Phi_i [x(t_k) - e(t)] < \\ & \epsilon_i x^T(t_k) \Phi_i x(t_k) + \epsilon_i e^T(t) \Phi_i e(t) - \\ & \epsilon_i e^T(t_k) \Phi_i x(t_k) - \epsilon_i x^T(t_k) \Phi_i e(t_k) \quad (16) \end{aligned}$$

结合引理 2, 有:

$$\begin{aligned} & e^T(t) \Phi_i e(t) < \epsilon_i (1 - \beta^{-1}) e^T(t_k) \Phi_i e(t_k) + \\ & \epsilon_i (1 - \beta) x^T(t_k) \Phi_i x(t_k) \quad (17) \end{aligned}$$

不等式 (17) 可以写为:

$$\left\| \sqrt{\Phi_i} e(t) \right\| < \sqrt{\frac{\epsilon_i (1 - \beta)}{1 - \epsilon_i (1 - \beta^{-1})} x^T(t_k) \Phi_i x(t_k)}$$

故系统触发时应该满足以下条件:

$$\left\| \sqrt{\Phi_i} e(t) \right\| \geq \sqrt{\frac{\epsilon_i (1 - \beta)}{1 - \epsilon_i (1 - \beta^{-1})} x^T(t_k) \Phi_i x(t_k)} \quad (18)$$

结合不等式 (15)、(18), 可得:

$$\begin{aligned} & \frac{Q_2 \|x(t_k)\| + \bar{A}}{Q_1} e^{Q_1(t-t_k)} \geq \sqrt{F x^T(t_k) \Phi_i x(t_k)} \\ & F = \frac{\epsilon_i (1 - \beta)}{1 - \epsilon_i (1 - \beta^{-1})} \quad (19) \end{aligned}$$

令 $Q_3 = \sqrt{F x^T(t_k) \Phi_i x(t_k)}$, 式 (19) 可以改写为:

$$e^{Q_1(t-t_k)} \geq \frac{Q_1 Q_3}{Q_2 \|x(t_k)\| + \bar{Q}} \quad (20)$$

对不等式 (20) 两边取对数, 则可得到自触发间隔函数关系式 (13), 证毕。

此外, 从自触发间隔函数关系式 (13) 可以得出:

$$\tau_1 = \frac{1}{Q_1} \ln \left[\frac{Q_1 \sqrt{\min_{i \in M} \{F \theta\}}}{Q_2 + \bar{Q}} \right] \leq$$

$\zeta = [x^T(t) \quad e^T(t) \quad \omega^T(t)]$ 不等式 (23) 可以写为:

$$\dot{V}(x(t)) = \zeta \begin{bmatrix} \bar{A}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A} & \bar{P} \bar{B} & \bar{P} G_i \\ -\alpha \bar{P} + \varepsilon_i \Phi_i & * & * \\ * & -\Phi_i & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \zeta^T + \alpha V(x(t)) + e^T(t) \Phi_i e(t) - \varepsilon_i x^T(t) \Phi_i x(t) + \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) \quad (24)$$

利用引理 4 对不等式 (22a) 进行变形, 可得:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A} & \bar{P} \bar{B} & \bar{P} G_i \\ -\alpha \bar{P} + \varepsilon_i \Phi_i & * & * \\ * & -\Phi_i & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

由不等式 (22)、(23), 可得如下条件:

$$\dot{V} < \alpha x^T(t) \bar{P} x(t) + \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) \quad (26)$$

对上式两边同乘 $e^{-\alpha t}$, 则有:

$$d(e^{-\alpha t} V) / dt < e^{-\alpha t} \gamma^2 \omega^T \omega \quad (27)$$

对于 $\forall t \in [0, T]$, 如下不等式成立:

$$V(x(t)) < e^{\alpha t} (V(x(0)) + \gamma^2 \int_0^t e^{-\alpha \tau} \omega^T(\tau) \omega(\tau) d\tau) < e^{\alpha T} c_1 \lambda_{\min} + \frac{\gamma^2 W}{\alpha} (e^{\alpha T} - 1) \quad (28)$$

同时我们有:

$$V(x(t)) = x^T(t) \bar{P} x(t) = x^T(t) \mathbf{R}^+ \mathbf{P} \mathbf{R}^+ x(t) \geq \lambda_{\max} x^T(t) \mathbf{R} x(t) \quad (29)$$

结合 (28)、(29) 两式, 可得:

$$x^T(t) \mathbf{R} x(t) < \frac{e^{\alpha T} c_1 \lambda_{\min} + \frac{\gamma^2 W}{\alpha} (e^{\alpha T} - 1)}{\lambda_{\max}} < c_2 \quad (30)$$

显然, 由式 (30) 可看出, 对于 $\forall t \in [0, T]$, $x^T(t) \mathbf{R} x(t) < c_2$ 可由条件 (22c) 保证, 结合定义 2 可知自触发控制系统 (8) 关于 $(c_1, c_2, T, \mathbf{R}, \mathbf{W})$ 有限时间有界。接下来我们进行 H_∞ 性能分析。

定义 $\xi = [x^T(t) \quad e^T(t) \quad \omega^T(t) \quad z^T(t)]$

$$\xi \begin{bmatrix} \bar{A}^T \bar{P} + \bar{P} \bar{A} & \bar{P} \bar{B} & \bar{P} G_i & (C_i + D_i K_j)^T \\ -\alpha \bar{P} + \varepsilon_i \Phi_i & * & * & * \\ * & -\Phi_i & 0 & K_j^T D_i^T \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} \xi^T = \dot{V}(x(t)) - \alpha V(x(t)) - e^T(t) \Phi_i e(t) + \varepsilon_i x^T(t) \Phi_i x(t) - \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) + z^T(t) z(t) \quad (31)$$

结合式 (22a)、式 (31) 以及触发条件 (13), 可以得到:

$$\dot{V} < \alpha x^T(t) \bar{P} x(t) + \gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) - z^T(t) z(t)$$

对上式左右两边同乘 $e^{-\alpha t}$, 并取 0 到 T 积分, 得到如下不等式:

$$e^{-\alpha T} V(x(t)) < \int_0^T e^{-\alpha t} (\gamma^2 \omega^T(t) \omega(t) - z^T(t) z(t)) dt$$

则有:

$$\int_0^T z^T(t) z(t) dt < \gamma^2 \int_0^T \omega^T(t) \omega(t) dt \quad (32)$$

由定义 3 可知, 上述不等式成立可确保自触发控制系统 (8) 关于 $(c_1, c_2, T, \mathbf{R}, \mathbf{W})$ 有限时间有界且满足所期望的 H_∞ 性能。

定理 2 给出的矩阵不等式 (22a) ~ (22c) 并不是严格意义上的线性矩阵不等式, 在编程工具中无法直接求解。

线性矩阵不等式的求解可转化为凸优化问题的求解, 自 1988 年 Nesterov 和 Nemirovski 提出内点法, 并直接用以求解具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 使得求解线性矩阵不等式成为处理控制问题的一种有效手段。将上述不等式进行处理, 得到定理 3。

定理 3: 如果对于给定参数 $0 < \varepsilon_i \leq 1, 0 < c_1 < c_2, \gamma > 0, \mathbf{W} > 0, T > 0$ 和适维矩阵 \mathbf{R} , 存在实对称矩阵 $\mathbf{Q} > 0$, 适维矩阵 \mathbf{Y}_j , 自触发参数矩阵 $\bar{\Phi}_i > 0$, 以及实数 λ_1^*, λ_2^* , 使下列线性矩阵不等式成立:

$$\Psi_{ii} < 0, i = 1, 2, \dots, r \quad (33a)$$

$$\Psi_{ij} + \Psi_{ji} < 0, i < j, i, j = 1, 2, \dots, r \quad (33b)$$

$$\lambda_1^* \mathbf{R}^{-1} < \mathbf{Q} < \lambda_2^* \mathbf{R}^{-1} \quad (33c)$$

$$\begin{bmatrix} -e^{-\alpha T} c_2 \lambda_1^* & \lambda_1^* \sqrt{c_1} & \lambda_1^* \\ * & -\lambda_2^* & 0 \\ * & * & -\frac{\alpha}{\gamma^2 W (1 - e^{-\alpha T})} \end{bmatrix} < 0 \quad (33d)$$

则自触发控制系统关于 $(c_1, c_2, T, \mathbf{R}, \mathbf{W})$ 有限时间有界且满足期望的 H_∞ 性能。其对应有限时间控制器增益以及自触发参数矩阵分别为 $\mathbf{K}_j = \mathbf{Y}_j \mathbf{Q}^{-1}, \bar{\Phi}_i = \mathbf{Q}^{-1} \bar{\Phi}_i \mathbf{Q}^{-1}$ 。其中:

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \mathbf{Y}_j & \mathbf{G}_i & \Pi & \mathbf{Q} \mathbf{E}_{1i}^T & \mathbf{Y}_j^T \mathbf{E}_{2i}^T & 0 \\ * & -\bar{\Phi}_i & 0 & \mathbf{Y}_j^T \mathbf{D}_i^T & 0 & 0 & \mathbf{Y}_j^T \mathbf{E}_{2i}^T \\ * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \nu_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \nu_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \nu_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{A}^T + \mathbf{Y}_j^T \mathbf{B}_i^T + \mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{B} \mathbf{Y}_j + \varepsilon_i \bar{\Phi}_i - \alpha \mathbf{Q} +$$

$$(\beta_1 + \beta_2) \mathbf{H} \mathbf{H}^T$$

$$\Pi = \mathbf{Q} \mathbf{C}_i^T + \mathbf{Y}_j^T \mathbf{D}_i^T$$

$$\nu_1 = \frac{-\mathbf{I} \beta_1^{-1}}{(1 + \lambda)}, \nu_2 = \frac{-\mathbf{I} \beta_1^{-1}}{(1 + \lambda^{-1})}, \nu_3 = -\mathbf{I} \beta_2^{-1}$$

证明:

$$\text{对不等式 (22a) 左乘右乘} \begin{bmatrix} \bar{P}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ * & \bar{P}^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & \mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & \mathbf{I} \end{bmatrix} \text{及其转}$$

置, 令 $\mathbf{Q} = \bar{P}^{-1}, \bar{\Phi}_i = \mathbf{Q} \Phi_i \mathbf{Q}$, 则有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} \mathbf{A}^T + \bar{\mathbf{A}} \mathbf{Q} & \bar{\mathbf{B}} \mathbf{Q} & \mathbf{G}_i & \mathbf{Q} \mathbf{C}_i^T \\ + \varepsilon_i \bar{\Phi}_i - \alpha \mathbf{Q} & * & * & + \mathbf{Q} \mathbf{K}_j^T \mathbf{D}_i^T \\ * & -\bar{\Phi}_i & 0 & \mathbf{Q} \mathbf{K}_j^T \mathbf{D}_i^T \\ * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

结合 (2) 式及引理 1, 不等式 (34) 等价于下式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{K}_j)^T + (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i\mathbf{K}_j)\mathbf{Q} + \varepsilon_i \bar{\boldsymbol{\Phi}}_i - \alpha\mathbf{Q} & \mathbf{B}_i\mathbf{K}_j\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{B}_i\mathbf{K}_j\mathbf{Q} & \mathbf{G}_i & \mathbf{Q}\mathbf{C}_i^T + \mathbf{Q}\mathbf{K}_j^T\mathbf{D}_i^T \\ * & -\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i & 0 & \mathbf{Q}\mathbf{K}_j^T\mathbf{D}_i^T \\ * & * & -\gamma^2\mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

上式等价于:

$$\begin{bmatrix} \Omega & \mathbf{B}_i\mathbf{K}_j\mathbf{Q} & \mathbf{G}_i & \mathbf{Q}\mathbf{C}_i^T + \mathbf{Q}\mathbf{K}_j^T\mathbf{D}_i^T \\ * & -\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i + \beta_2^{-1}\Theta_2 & 0 & \mathbf{Q}\mathbf{K}_j^T\mathbf{D}_i^T \\ * & * & -\gamma^2\mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbf{Q}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{Q}\mathbf{K}_j^T\mathbf{B}_i^T + \mathbf{A}_i\mathbf{Q} + \mathbf{B}_i\mathbf{K}_j\mathbf{Q} + \varepsilon_i \bar{\boldsymbol{\Phi}}_i - \alpha\mathbf{Q} + \beta_1^{-1}\Theta_1 + (\beta_1 + \beta_2)\mathbf{H}\mathbf{H}^T \\ \Theta_1 &= \mathbf{Q}\mathbf{E}_{11}^T\mathbf{E}_{11}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{E}_{11}^T\mathbf{E}_{21}\mathbf{K}_j\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{K}_j^T\mathbf{E}_{21}^T\mathbf{E}_{11}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{K}_j^T\mathbf{E}_{21}^T\mathbf{E}_{21}\mathbf{K}_j\mathbf{Q} \\ \Theta_2 &= \mathbf{Q}\mathbf{K}_j^T\mathbf{E}_{21}^T\mathbf{E}_{21}\mathbf{K}_j\mathbf{Q} \end{aligned}$$

同理, 利用引理 1 对参数不确定项进行上述处理, 结合引理 2. 令 $\mathbf{Y}_j = \mathbf{K}_j\mathbf{Q}$ 可得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_i\mathbf{Y}_j & \mathbf{G}_i & \mathbf{Q}\mathbf{C}_i^T + \mathbf{Y}_j^T\mathbf{D}_i^T & \mathbf{Q}\mathbf{E}_{1i}^T & \mathbf{Y}_j^T\mathbf{E}_{2i}^T & 0 \\ * & -\bar{\boldsymbol{\Phi}}_i & 0 & \mathbf{Y}_j^T\mathbf{D}_i^T & 0 & 0 & \mathbf{Y}_j^T\mathbf{E}_{2i}^T \\ * & * & -\gamma^2\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \nu_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \nu_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \nu_3 \end{bmatrix} < 0$$

显然, 上式等价于下式

$$\sum_{i=1}^r h_i^2 \boldsymbol{\Psi}_i + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (\boldsymbol{\Psi}_{ij} + \boldsymbol{\Psi}_{ji}) < 0, \quad i < j \quad (36)$$

从而式 (33a)、(33b) 成立. 由前述李亚普诺夫函数的定义可知:

$$\lambda_{\max} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{x}(t) \leq V(\mathbf{x}(t)) \leq \lambda_{\min} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{x}(t) \quad (37)$$

而 $\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{R}^{-1/2}$, 故有下式成立:

$$\frac{\mathbf{R}^{-1}}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})} \leq \mathbf{Q} \leq \frac{\mathbf{R}^{-1}}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})} \quad (38)$$

即式 (33c) 成立, 条件 (22c) 舒尔补化简可得式 (33d) 成立, 证毕.

3 仿真实验

为了验证所建立的模糊控制器以及所设计的自触发方案的有效性, 通过数值仿真说明了该方法的可行性, 单连杆刚性机器人系统验证自触发机制及控制器在实践中的有效性.

数值仿真:

考虑以下具有状态量化的 T-S 模糊系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}_i + \Delta\mathbf{A}_i(t))\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B}_i + \Delta\mathbf{B}_i(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}_i\boldsymbol{\omega}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_i\mathbf{u}(t) \quad i = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

两条模糊规则下的系统参数矩阵如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} -0.13 & -0.02 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -0.15 & -1.23 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.01 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_2 &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0.1 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

不确定参数 $\Delta\mathbf{A}_i(t)$ $\Delta\mathbf{B}_i(t)$ 满足 (3) 式定义, 选取

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 &= \begin{bmatrix} -0.125 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E}_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.06 \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_{12} &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.02 \end{bmatrix}, \mathbf{F}(t) = \sin(t). \end{aligned}$$

假设隶属度函数分别为 $h_1(\theta_1(t)) = \sin^2(t)$, $h_2(\theta_2(t)) = 1 - h_1(\theta_1(t))$. 给定参数 $\gamma = 2, \varepsilon_1 = 0.2, \varepsilon_2 = 0.1, \mathbf{W} = 3, \alpha = 0.5, c_1 = 1, c_2 = 2, T = 8, \beta = 0.4, \beta_1 = \beta_2 = 1, \mathbf{I} = \text{diag}\{1, 1\}$, 模糊系统初始状态设定为: $\mathbf{x}(0) = [0.5 \quad -0.8]^T$.

给定扰动 $\boldsymbol{\omega}(t) = \frac{\sin(t)}{(1+t^3)}$.

求解把不等式 (33a) ~ (33d), 可以得到一系列可行解:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= [-6.849 \quad -5.856] & \mathbf{K}_2 &= [-7.883 \quad -5.518] \\ \boldsymbol{\Phi}_1 &= \begin{bmatrix} 0.7163 & 0.6399 \\ 0.6399 & 1.6565 \end{bmatrix} & \boldsymbol{\Phi}_2 &= \begin{bmatrix} 0.6152 & 0.2784 \\ 0.2784 & 0.6111 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

仿真结果及分析:

图 2 为 T-S 模糊系统开环状态轨迹图. c_1 为有限时间有界的下界, c_2 为有限时间有界的上界, 根据有限时间有界的定义, 规定系统初始状态在 c_1 界内, 在一个有限的时间区间范围, 系统的状态轨迹始终能够保持在预先给定的界限内. 从图 2 可以看出, 当系统无控制输入时, 其运动轨迹超出所给的界限. 图 3 为 T-S 模糊系统闭环状态轨迹图. 对比两图可知, 在控制作用下, T-S 模糊系统能够达到有限时间有界, 这也说明所设计的控制器的有效性.

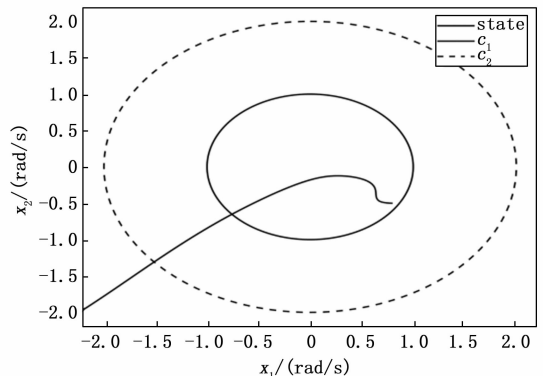


图 2 T-S 模糊系统开环状态轨迹图

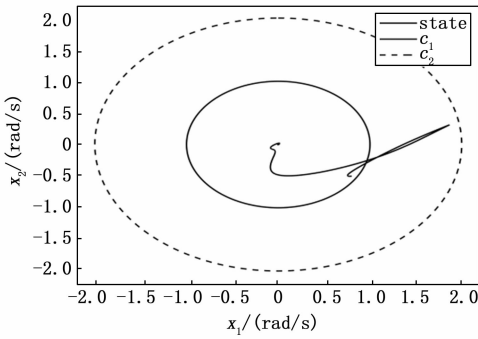


图 3 T-S 模糊系统闭环状态轨迹图

图 4 为自触发机制作用时所产生的触发间隔图。通常周期触发方式是以一个固定时间周期进行系统触发，这种方式就会使控制器增益按照此时间周期频繁触发。由图 4 可知，触发间隔均大于 0，避免了芝诺行为的发生，并且可以看到 $t=5$ s 时，触发间隔达到 0.25 s 并保持此值进行触发。

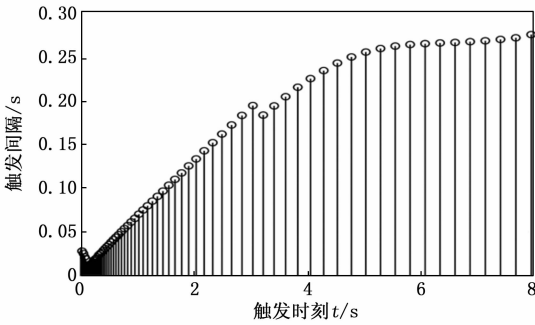


图 4 自触发时间间隔图

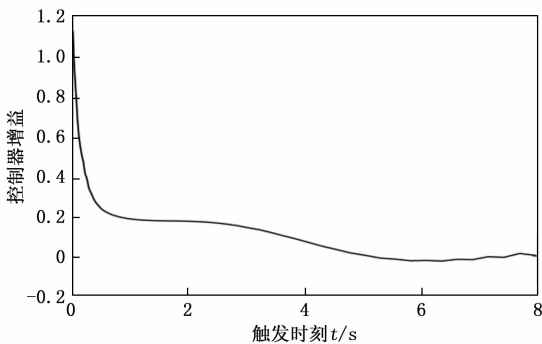


图 5 控制器增益变化图

一方面，由图 5 得知，此时控制器增益 u 接近于 0，此时系统达到稳定状态，触发时刻不变。假设以最小触发间隔为周期触发间隔，可以看到，在系统稳定后，触发间隔可以达到最初的 8 倍左右，所设计的自触发机制可以节约 80.2% 的资源。

另一方面，结合图 4 和图 5，系统控制器增益的变化与触发频率呈现正相关趋势。这也与自触发机制自身的设计理念相吻合，模糊控制器的更新只与触发时刻的状态变量有关。可以看出，当系统频繁触发时，控制器增益数值变

化率大，当控制器增益变化较小时，触发频率也相应减小，触发间隔增大。通过以上分析，可以说明所设计的自触发机制在资源利用率上更具有优势。

实例仿真：

单连杆刚性机器人系统的动态方程如下^[4]：

$$J\ddot{\nu} = -(0.5mgl + Mgl)\sin(\nu) + u$$

其中： ν 为手臂的旋转角度 (rad/s)， $m = 1.5$ kg 为载荷质量， $M = 3$ kg 为刚性链质量， $g = 9.8$ m/s² 为重力常数， $l = 0.5$ m 为机器人链接的长度， $J = Ml^2 + (1/3)ml^2$ 为惯性矩， u 为手臂关节施加的控制力矩 (N·m)。 $\nu = 0$ 表示在控制作用为零的情况下转矩的最低垂直平衡位置。定义新的变量 $x_1 = \nu$ ， $x_2 = \dot{\nu}$ ，可以构建如下不确定 T-S 模糊系统：

Plant Rule 1:

if x_1 is about 0, then

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_1 + \Delta A_1(t))x(t) + (B_1 + \Delta B_1(t))u(t) + G_1\omega(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_1u(t) \end{cases}$$

Plant Rule 2:

if x_1 is about $\frac{\pi}{2}$, then

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_2 + \Delta A_2(t))x(t) + (B_2 + \Delta B_2(t))u(t) + G_2\omega(t) \\ z(t) = C_2x(t) + D_2u(t) \end{cases}$$

其中：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(0.5mgl + Mgl)}{J} & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2(0.5mgl + Mgl)}{\pi J} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix},$$

受控输出方程参数选取：

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.15 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}.$$

不确定参数 $\Delta A_i(t)$ $\Delta B_i(t)$ 满足 (3) 式定义，选取

$$H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, E_{11} = \begin{bmatrix} -0.45 & 0.2 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$E_{12} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, E_{21} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.06 \end{bmatrix},$$

$$E_{22} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.08 \end{bmatrix}, F(t) = \cos(t).$$

本实验的控制目标是在系统参数不确定并且存在外部干扰的情况下，设计一个自触发机制及模糊控制器使得系统运动轨迹在有限时间内不会超过一定的界限，保证了系统的暂态性能。经过严格的数学推导，同时保证系统满足所期待的 H_∞ 性能指标。设计该机制能够使得系统无需依赖外部硬件设备对触发条件进行持续监测，节约硬件资源

与计算资源。

选取外部扰动 $\omega(t) = 0.5\sin(2\pi t)\exp(-0.8t)$ 。扰动矩阵参数 $G_1 = G_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}$ ，定义隶属度函数为 $h_1(\xi(t)) = \frac{(0.5\pi - |x_2|)}{0.5\pi}$, $h_2(\xi(t)) = 1 - h_1(\xi(t))$ 。给定参数 $\gamma = 5\varepsilon_1 = 0.6, \varepsilon_2 = 0.3, W = 15, \alpha = 0.7, c_1 = 1, c_2 = 2, T = 120, \beta = 0.2, \beta_1 = \beta_2 = 1, I = \text{diag}\{1, 1\}$ ，模糊系统初始状态设定为 $x(0) = [0.3 \ 0.5]^T$ 。

利用 Matlab 软件的线性矩阵不等式工具，求解 (33a) ~ (33d)，得到如下控制器增益及自触发参数矩阵：

$$K_1 = [-0.5830 \quad -0.5117]$$

$$K_2 = [-0.6882 \quad -0.3978]$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 2.5156 & -2.5497 \\ -2.5497 & 3.1748 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} 3.2375 & -2.7851 \\ -2.7851 & 3.2588 \end{bmatrix}$$

将有限时间控制器增益和所提出的自触发策略以及求解所得的自触发参数矩阵应用到系统 (8) 中，来验证所提方法的有效性。

图 6、图 7 分别为参数不确定的 T-S 模糊系统开环、闭环状态轨迹图。对比两图可知，在所设计的自触发机制下，施加控制作用的单连杆刚性机器人系统是满足有限时间有界且满足期望的性能水平。在一些活动范围受限、执行动作精度较高的情况下，其状态轨迹在有限时间内不超过一定的界限，这证明了该方法的可用性。而开环系统中其运动轨迹会超过所规定的界限 c_2 。

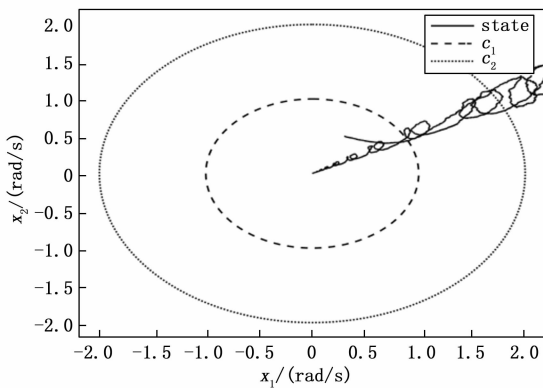


图 6 单连杆刚性机器人系统开环状态轨迹图

图 8 为系统闭环状态响应图，图 9 为触发间隔图。可以发现，系统在性能较差时，自触发机制频繁工作，触发间隔较小。随着系统稳定性提高，触发间隔不断增大，触发次数减少。从图 5 中可以看出，当时间在 80 s 后，触发间隔可以达到 2 s 以上，使得系统触发频率不断降低，假设以最初触发间隔 0.7 s 为恒定采样周期，可以得出此方法可以节省 35% 的资源占用，这也进一步证明了所设计的自触发机制能够提高资源利用率。

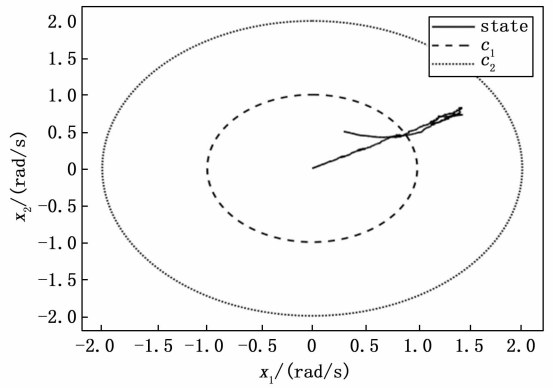


图 7 单连杆刚性机器人系统闭环状态轨迹图

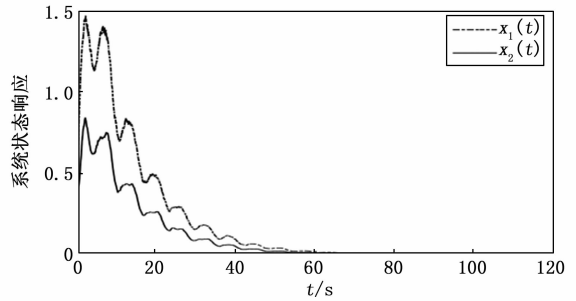


图 8 单连杆刚性机器人系统闭环状态响应图

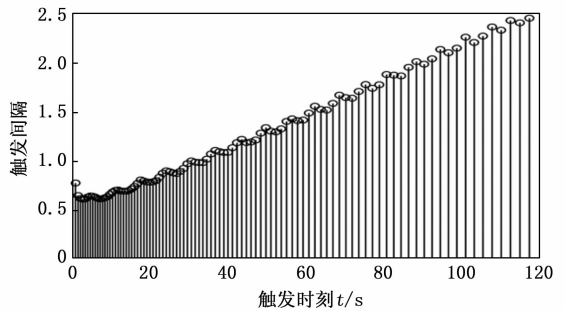


图 9 自触发时间间隔图

4 结束语

为了减少通信资源的浪费，针对不确定性 T-S 模糊系统设计了一种自触发机制。利用触发周期不固定的特性，在能够保障稳定性的前提下，实现控制系统的能耗优化。自触发机制装载在系统内部，无需额外硬件设备接收触发信号。同时考虑外部有界干扰的存在，设计只与触发时刻状态有关的模糊控制器，推导了保证具有期望 H^∞ 性能水平的 T-S 模糊系统有限时间稳定的充分条件。通过求解一组 LMI，同时获得了有限时间 H^∞ 控制器的状态反馈增益及自触发参数矩阵。最后通过数值仿真及实例仿真，验证了所建立的模糊控制器以及所设计的自触发方案的有效性。

参考文献：

[1] WANG W Y, CHEN M C, SU S F. Hierarchical T-S fuzzy-

neural control of anti-lock braking system and active suspension in a vehicle [J]. *Automatica*, 2012, 48: 1698 – 1706.

[2] TANGX M, DENG L. Multistep output feedback predictive control for uncertain discrete-time T-S fuzzy system via event-triggered scheme [J]. *Automatica*, 2019, 107: 362 – 370.

[3] SUN D, LIAO Q, STOYANOV T, et al. Bilateral telerobotic system using type-2 fuzzy neural network based moving horizon estimation force observer for enhancement of environmental force compliance and human perception [J]. *Automatica*, 2019, 106: 358 – 373.

[4] SHEN Y J, HUANG Y H. Global finite-time stabilization for a class of nonlinear systems [J]. *Int. J. Syst. Sci.*, 2012, 43: 73 – 78.

[5] WU J, CHEN W S, LI J. Global finite-time adaptive stabilization for nonlinear systems with multiple unknown control directions [J]. *Automatica*, 2016, 69: 298 – 307.

[6] ZHAO E, ZHU B, SUN L, et al. Finite-time dissipative control for a kind of nonlinear system based on T-S fuzzy model [C] // 2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC). IEEE, 2016: 5888 – 5892.

[7] SUN Y M, CHEN B, LIN C, et al. Finite-time adaptive control for a class of nonlinear systems with non-strict feedback structure [J]. *IEEE Trans. Cybern.*, 2017, 48 (10): 2774 – 2782.

[8] HAN X, MA Y, FU L. Finite-time dynamic output-feedback dissipative control for singular uncertainty T-S fuzzy systems with actuator saturation and output constraints [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357 (8): 4543 – 4573.

[9] HU S, YUE D, PENG C, et al. Event-triggered controller design of nonlinear discrete-time networked control systems in T-S fuzzy model [J]. *Applied Soft Computing*, 2015, 30: 400 – 411.

[10] PENG C, MA S, XIE X. Observer-based non-PDC control for networked T-S fuzzy systems with an event-triggered communication [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47 (8): 2279 – 2287.

[11] SHEN H, LI F, YAN H, et al. Finite-time event-triggered H_∞ control for T-S fuzzy Markov jump systems [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26 (5): 3122 – 3135.

[12] ZHANG Z, LIANG H, WU C, et al. Adaptive event-triggered output feedback fuzzy control for nonlinear networked systems with packet dropouts and actuator failure [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, 27 (9): 1793 – 1806.

[13] XUE M, YAN H, ZHANG H, et al. Event-triggered guaranteed cost controller design for TS fuzzy Markovian jump systems with partly unknown transition probabilities [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 29 (5): 1052 – 1064.

[14] ANTAA, TABUADA P. To sample or not to sample: Self-triggered control for nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55 (9): 2030 – 2042.

[15] YI X, LIU K, DIMAROGONAS D V, et al. Dynamic event-triggered and self-triggered control for multi-agent systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 64 (8): 3300 – 3307.

[16] KISHIDA M. Event-triggered control with self-triggered sampling for discrete-time uncertain systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 64 (3): 1273 – 1279.

[17] BRUNNER F D, HEEMELS W, ALLGWER F. Event-triggered and self-triggered control for linear systems based on reachable sets [J]. *Automatica*, 2019, 101: 15 – 26.

[18] DELMIPALTADAKIS G, MAZO M. Region-based self-triggered control for perturbed and uncertain nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2021, 8 (2): 757 – 768.

[19] ZHANG K, ZHOU B, ZHENG W X, et al. Finite-time stabilization of linear systems by bounded event-triggered and self-triggered control [J]. *Information Sciences*, 2022, 597: 166 – 181.

[20] GAO H, ZHANG H, XIA J. Event-triggered finite-time extended dissipative control for a class of switched nonlinear systems via the TS fuzzy model [J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2020, 18 (11): 2798 – 2807.

[21] WAN H, LUAN X, HE S, et al. Finite-time resources-aware self-triggered H_∞ controller for Markov jump systems [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2020, 357 (16): 11773 – 11792.

[22] 唐晓彬, 董曼茹, 徐 荣. 大数据背景下 CPI 预测问题的文本挖掘技术设计与应用 [J]. *统计研究*, 2021, 38 (8): 146 – 160.

[23] 陈 艺, 江芝蒙, 张 渝. 云系统中基于同态哈希认证的大数据安全传输 [J]. *计算机工程与设计*, 2021, 42 (5): 1250 – 1256.

[24] 苏 博, 王洪斌, 高 静. 事件触发策略下多 AUV 抗干扰固定时间编队控制 [J]. *控制理论与应用*, 2021, 38 (7): 1113 – 1123.

[25] 徐建明, 周 培. EtherCAT 同步模式数据丢失的伺服指令预测算法 [J]. *浙江工业大学学报*, 2021, 49 (3): 245 – 253.

(上接第 86 页)

[17] 刘蕴涵, 沙朝锋, 牛军钰. 基于 Stack Overflow 的数据库相关主题分析 [J]. *计算机科学*, 2021, 48 (6): 48 – 56.

[18] 汤 洁, 张溶洲, 石照耀. 基于 Javaweb 的齿轮双啮测量数据云处理系统部署及实现 [J]. *光学精密工程*, 2021, 29 (6): 1387 – 1396.

[19] 冯一飞, 丁 楠, 叶钧超, 等. 领域专用低延迟高带宽 TCP/IP 卸载引擎设计与实现 [J]. *计算机工程*, 2022, 48 (9): 162 – 170.

[20] 郑明忠, 卜强生, 高 磊, 等. 面向服务端的变电站自主可控站控层服务协议一致性测试技术 [J]. *电力自动化设备*, 2022, 42 (11): 211 – 217.