

# 模型未知 LTI 系统的数据驱动预测控制

徐 凯, 陈 珺

(江南大学 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 针对含有随机噪声的模型未知线性时不变 (LTI, linear time invariant) 系统模型建立过程复杂且控制律难以得到的问题, 提出一种基于数据驱动的预测控制方法; 基于系统行为学理论和平衡子系统辨识方法, 仅利用测量得到的系统数据构建被控系统的非参数模型, 将其和预测控制理论相结合设计出基于数据驱动的预测控制器, 对于系统测量数据中存在的有界加性高斯噪声, 通过引入数据的松弛变量和 L2 正则项来降低噪声扰动的影响, 采用滚动时域优化策略计算最优控制序列并将其作用于被控系统, 实现了系统对设定值的轨迹跟踪; 将所提控制策略应用于四容水箱系统, 仿真结果表明所提方法能实现四容水箱系统的液位跟踪控制, 且与同样基于数据驱动的子空间预测控制方案相比, 所提方法具有更好的动态性能, 且该策略在抗噪声扰动方面有明显优势, 具有更强的鲁棒性。

**关键词:** 数据驱动; 系统行为学理论; 线性时不变系统; 预测控制; 滚动时域优化; 轨迹跟踪; 高斯噪声

## Data-driven Predictive Control for Model-unknown LTI system

XU Kai, CHEN Jun

(Key Laboratory of Advanced Process Control in Light Industry, Ministry of Education,  
Jiangnan university, Wuxi 214122, China)

**Abstract:** To solve the problems that the modeling process of model unknown linear time invariant (LTI) system containing stochastic noise is complicated and the control law is difficult to be obtained, a data-driven predictive control method is proposed. Based on the theory of system behavior and balanced subspace identification, the measured system data is used to build the non-parametric model of the controlled system, and the data-driven predictive controller is designed by combining it with the predictive control theory. For the bounded additive gaussian noise existing in the measured data, the slack variable and quadratic regularization of the data are introduced to reduce the influence of noise disturbance. The receding horizon optimization strategy is used to calculate the optimal control trajectory, which is applied to the controlled system to realize the preset trajectory tracking of the system. The proposed control strategy is adopted to a quadruple tank system. The simulation results show that compared with the data-driven subspace predictive control scheme, the proposed strategy has better dynamic performance. Meanwhile, the proposed strategy also has obvious advantages in anti-noise disturbance and stronger robustness.

**Keywords:** data-driven; system behaviour theory; LTI system; predictive control; receding horizon optimization; trajectory tracking; gaussian noise

## 0 引言

基于被控对象数学模型的现代控制理论自 20 世纪 60 年代被提出以来, 已经形成了一套十分成熟的理论体系, 并在工业过程、航空航天等领域中得到了大规模的成功应用<sup>[1]</sup>。然而, 对于机理模型或辨识模型可获取但却带有无法描述性质的系统、模型复杂且阶数较高的系统、模型无法获取的系统这三类系统的控制问题, 现代控制理论目前还未有较好的解决方案<sup>[2]</sup>。

数据驱动是一种利用被控系统的在线和离线数据实现系统基于数据的预测、评价、诊断、监控、决策和优化等各种功能的思想<sup>[3]</sup>。

在系统的控制问题之中, 轨迹跟踪问题是一个十分值

得研究的问题。在轨迹跟踪问题中, 模型预测控制 (MPC, model predictive control) 是应用最广泛的控制方法之一, 因为它允许在控制设计中考虑安全因素<sup>[4]</sup>, 可以通过约束保障系统的稳定运行。使用模型预测控制方案的关键是一个精确的系统参数状态空间模型, 但是这样的模型往往不能直接获取。因此将数据驱动的思想与之相结合变得很有意义。近年来, 有许多学者对两者的结合进行了研究并发表了相应研究成果, 文献 [5] 对 Vienna 整流器提出了一种利用电压和电流信息数据实现的超局部模型替代 Vienna 整流器精确模型的无模型预测电流控制方法; 文献 [6] 针对时滞系统难以获取模型的情况, 结合跟踪-微分器获取微分信息的能力, 利用 Smith 预估器预测未来时刻输出有效

收稿日期: 2022-11-29; 修回日期: 2023-01-10。

基金项目: 国家自然科学基金项目(62073154)。

作者简介: 徐 凯(1998-), 男, 硕士研究生。

通讯作者: 陈 珺(1980-), 女, 博士研究生, 副教授。

引用格式: 徐 凯, 陈 珺. 模型未知 LTI 系统的数据驱动预测控制[J]. 计算机测量与控制, 2023, 31(9): 116-123.

提高了控制系统的响应速度; 文献 [7] 中使用数据驱动  
的神经元预测器拟合系统的模型结合预测控制实现了 ASV 的  
速度控制; 文献 [8] 结合了深度强化学习和预测控制实现  
了一种高精度的无人驾驶方式; 文献 [9] 通过子空间预测  
控制方案构建了电机的电压平衡模型, 从而实现了电机的  
无偏移跟踪; 文献 [10] 中采用深度学习训练通过 Koop-  
man 理论简化得到的通用结构模型, 实现了非线性模型  
的最优轨迹跟踪; 文献 [11] 提出一种将循环神经网络与模  
型预测控制算法相结合的算法, 在保持了控制器性能的  
同时, 有效提升了算法执行速度并减少了存储数据占用的  
内存; 文献 [12] 将子空间辨识和预测控制思想相结合并  
提出一种最优调优方法, 简化了预测模型的建立过程, 解  
决了控制器参数调整过程复杂的问题; 文献 [13] 将模型  
预测控制与比例、积分、微分控制方案相结合, 减少了传  
统模型预测控制方法调整的复杂度, 并解决了其计算量大、  
系统动态性能易受影响的问题, 同时将模糊理论与模型  
预测控制相结合, 获得了比 PID 算法更好的抗干扰能力,  
同时减少了预测范围; 文献 [14] 将数据驱动概念集成到  
鲁棒模型预测控制结构中, 用数据估计模型替代预测, 在  
解决了传统方法保守性高、计算困难的问题的同时提高了  
系统的闭环性能; 文献 [15] 提出了一种全新的数据驱动  
模型预测控制方案, 通过调整系统不同部分之间的耦合  
条件, 将系统分为不同的子系统并通过分散的模型预估  
独立控制, 有效提升了系统的稳定性。

虽然目前已经有很多种基于数据驱动的预测控制方法  
被提出, 但都是利用系统的历史数据并根据具体被控系  
统的数学原理来进行建模, 或者是使用神经网络等方法  
拟合出被控系统的模型, 模型获取过程十分繁琐, 同时  
获得的模型不具备通用性, 在系统参数调整时模型精  
度显著下降, 而且大都没有考虑测量噪声对系统控制  
效果的影响。

文中对于仅有测量数据可得 LTI 系统提出了一种  
数据驱动的预测控制方案, 根据系统行为学理论<sup>[16]</sup>和  
平衡子空间辨识方法<sup>[17]</sup>利用测量数据直接设计了控  
制器, 解决了传统模型预测控制方法获取预测模型  
困难且控制律难以设计的问题, 并考虑了系统测量  
数据中存在的随机噪声所带来的扰动对控制性能产  
生的影响, 通过引入辅助松弛变量和 L2 正则化项  
抑制了噪声扰动, 提高了算法的鲁棒性, 最后采用  
多步滚动时域优化方法求解优化问题并对系统施行  
控制, 实现了系统对设定值的轨迹跟踪。基于 Python  
平台和 CasADi 工具箱对算法进行仿真验证, 将所提  
方法应用于一个四容水箱系统并与同样基于数据驱  
动的子空间模型预测控制方法相比较, 仿真结果证  
明了所提方法的有效性和优越性。

### 1 系统行为学理论

基于根据文献 [16] 中提出的系统行为学理论, 一个  
动力系统可以被定义为一个三元组  $\Sigma = (T, W, B)$ , 其中  
 $T \subseteq R$  表示时间轴,  $W$  表示系统的信号空间包含该系  
统所有可

能的输入输出信号,  $B \subseteq W^T$  是系统的行为,  $B$  中的  
每个元素为系统的轨迹。文中考虑的是离散 LTI 系  
统, 对于此类系统有以下结论成立:  $T = N, W = R^o$   
是一个有限维度的向量空间,  $B$  是一个线性空间且  
满足  $B \subseteq \sigma B$  (时延算子  $\sigma$  定义为  $\sigma f(t) := f(t+1)$ ),  
同时  $B$  在点态收敛拓扑中是封闭的。综上所述,  
离散 LTI 系统按照系统行为学理论可以表示为  $\Sigma = (N, R^o, B)$ 。

对于该 LTI 系统的轨迹  $\omega(t) \in B$  通常可以表  
现为式 (1):

$$R_0 \omega(t) + R_1 \sigma \omega(t) + \dots + R_l \sigma^l \omega(t) = 0 \quad (1)$$

其中:  $R_i \in R^{i \times \omega}, i = 1, \dots, l, l$  表示等式的个  
数,  $\omega$  表示信号空间的维数,  $l$  表示方程的阶数。定  
义多项式矩阵  $R(\sigma)$  为式 (2):

$$R(\sigma) = R_0 + R_1 \sigma + \dots + R_l \sigma^l \in R^{l \times \omega}[\sigma] \quad (2)$$

式 (2) 是一个  $i \times \omega$  的矩阵, 每个元素都为时延  
算子  $\sigma$  的多项式。根据线性代数中核空间 kernel 的  
定义, 式 (2) 可以表示为式 (3) 的形式:

$$\ker(R(\sigma)) := \{\omega \mid R(\sigma)\omega = 0\} \quad (3)$$

因此  $B$  可以写为  $B := \ker(R(\sigma))$ 。在前述定  
义下, 对于系统的任意两个轨迹  $\omega_1, \omega_2 \in B$ , 存在  
 $\omega \in B$ , 使轨迹  $\omega_1$  在一定时间  $T$  后转变为  $\omega_2$ ,  
如图 1 所示。

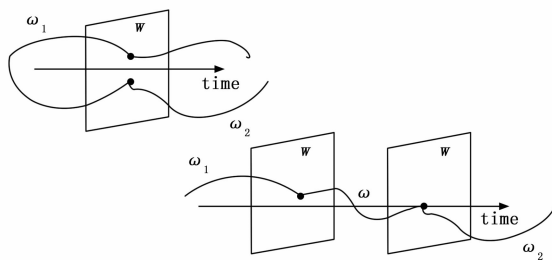


图 1 系统行为学理论下 LTI 系统轨迹变化示意图

即对于同一个 LTI 系统, 如果两条轨迹初始状态  
相同, 被观测到的输出也相同, 那么认为其过去的  
输入累积效果也相同。

### 2 平衡子空间辨识方法

根据文献 [17], 对于平衡状态空间的辨识问题。  
提出如下定义: 对于线性时不变系统  $\zeta \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$ , 其  
平衡状态模型为  $\zeta_{\text{bal}} \begin{cases} x_{\text{bal}}(t+1) = A_{\text{bal}}x(t) + B_{\text{bal}}u(t) \\ y_{\text{bal}}(t) = C_{\text{bal}}x(t) + D_{\text{bal}}u(t) \end{cases}$ 。

系统信号的时间序列为  $f = (f(1), \dots, f(T))$ 。定  
义该信号的块 Hankel 矩阵为:

$$H_{\Delta}(f) = \begin{bmatrix} f(1) & f(2) & f(3) & \dots & f(T-\Delta+1) \\ f(2) & f(3) & f(4) & \dots & f(T-\Delta+2) \\ f(3) & f(4) & f(5) & \dots & f(T-\Delta+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\Delta) & f(\Delta+1) & f(\Delta+2) & \dots & f(T) \end{bmatrix}$$

其中： $\Delta$  为有限时间平衡参数。根据以上算法。

算法 1：输入：系统轨迹  $\omega = (u, y)$ ，系统阶数的上界  $\Pi_{\max}$ ，有限时间平衡参数  $\Delta > \Pi_{\max}$ 。

步骤 1：找到系统脉冲响应矩阵的前  $2\Delta$  样本  $H(0), \dots, H(2\Delta - 1)$ ，并令  $H := \text{col}(H(0), \dots, H(2\Delta - 1))$ 。

步骤 2：找到初始状态为  $x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(M)}$  在零输入信号下对应的响应  $y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(M)}$ ，其中  $M := T - \Delta + 1$ 。令  $Y_0 := [y_0^{(1)} \dots y_0^{(M)}]$ 。

步骤 3：计算 Markov 参数  $\mathfrak{F} = \sqrt{U \sum V^T} = H_{\Delta}(\sigma H) \in R^{dp \times \Delta m}$ 。

步骤 4：计算平衡状态序列  $\tilde{X}_{\text{bal}} := \sqrt{\sum^{-1}} U^T Y_0 = [\tilde{x}_{\text{bal}}(\Pi_{\max} + 1) \dots \tilde{x}_{\text{bal}}(\Pi_{\max} + M)]$ 。

步骤 5：通过求解线性系统等式

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{\text{bal}}(\Pi_{\max} + 2) \dots \tilde{x}_{\text{bal}}(\Pi_{\max} + M) \\ \tilde{y}(\Pi_{\max} + 1) \dots \tilde{y}(\Pi_{\max} + T - \Delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\text{bal}} & B_{\text{bal}} \\ C_{\text{bal}} & D_{\text{bal}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{x}_{\text{bal}}(\Pi_{\max} + 1) \dots \tilde{x}_{\text{bal}}(\Pi_{\max} + T - \Delta) \\ \tilde{u}(\Pi_{\max} + 1) \dots \tilde{u}(\Pi_{\max} + T - \Delta) \end{bmatrix}$$

解得有限时间  $\Delta$  下的平衡实现  $A_{\text{bal}}, B_{\text{bal}}, C_{\text{bal}}, D_{\text{bal}}$ 。

根据系统行为学理论，有以下基础引理。

引理 1：用  $B_{[1, L]}$  表示 LTI 系统在间隔  $[1, L]$  内的轨迹

集合即： $B_{[1, L]} := \{\omega = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} := (\begin{bmatrix} u(1) \\ y(1) \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} u(L) \\ y(L) \end{bmatrix})\}$ ， $\exists x(1) \dots x(L)$  满足该系统}。

根据以上引理和基础算法，在给定一段轨迹  $\tilde{\omega} = (\tilde{u}, \tilde{y})$  的情况下，可以得到对应系统的前  $2\Delta$  个脉冲响应样本  $H$  来构建  $\Delta \times \Delta$  阶的 Hankel 块矩阵  $H_{\Delta}(\sigma H)$ ，通过其因子分解反过来给出有限时间  $\Delta$  下的平衡转换。

根据系统行为学引理和上述引理，在适当情况下有  $\text{col-span}(H_{2\Delta}(\tilde{\omega})) = B_{[1, 2\Delta]}$  成立。这意味着必然存在一个矩阵  $G$ ，使得  $H_{2\Delta}(\tilde{y})G = H$  成立。因此，平衡子空间辨识方法问题可以归结为找到特定的  $G$  使得上式满足。

定义  $\text{row dim}$  为矩阵的块行数， $U_{\rho}, U_f, Y_{\rho}, Y_f$  如下：

$$H_{l_{\max}+2\Delta}(\tilde{u}) := \begin{bmatrix} U_{\rho} \\ U_f \end{bmatrix}, H_{l_{\max}+2\Delta}(\tilde{y}) := \begin{bmatrix} Y_{\rho} \\ Y_f \end{bmatrix}$$

其中： $\text{row dim}(U_{\rho}) = \text{row dim}(Y_{\rho}) = l_{m_{\max}}$ ， $\text{row dim}(U_f) = \text{row dim}(Y_f) = 2\Delta$ 。

定理 1：设  $\omega = (\tilde{u}, \tilde{y})$  是可控 LTI 系统的一段轨迹，其阶数  $n \leq n_{\max}$ ，滞后  $l \leq l_{\max}$ 。让输入信号  $\tilde{u}$  持续激励  $2\Delta + n_{\max} + l_{\max}$  阶。那么对于该系统有以下等式 (4) 成立。

$$\begin{bmatrix} U_{\rho} \\ U_f \\ Y_{\rho} \end{bmatrix} G = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \\ 0_{m(2\Delta-1) \times m} \\ 0_{l_{\max} \times m} \end{bmatrix} \quad (4)$$

根据上述定理可以求得  $G$ ，证明过程见文献 [17]。在式 (4) 可解的情况下，脉冲响应  $(\begin{bmatrix} I_m \\ 0_{m(2\Delta-1) \times m} \end{bmatrix}, H)$  是系统

在零初始条件下的脉冲响应。由于初始状态为 0，因此存在一个  $\tilde{G}$  使下式成立。

$$\begin{bmatrix} U_{\rho} \\ U_f \\ Y_{\rho} \\ Y_f \end{bmatrix} \tilde{G} = \begin{bmatrix} 0_{m_{\max} \times m} \\ I_m \\ 0_{m(2\Delta-1) \times m} \\ 0_{l_{\max} \times m} \\ H \end{bmatrix} \quad (5)$$

如上所述，可以将获得的数据分为过去和未来两个部分，据此提出算法 2。

算法 2：输入：输入  $\tilde{u}$ ，输出  $\tilde{y}$ ，参数  $i$ 。

定义： $\begin{bmatrix} U_{\rho} \\ U_f \end{bmatrix} := H_{2i}(\tilde{u})$ ，其中  $i = \text{row dim}(U_{\rho})$ ， $\begin{bmatrix} Y_{\rho} \\ Y_f \end{bmatrix} := H_{2i}(\tilde{y})$ ， $i = \text{row dim}(Y_{\rho})$ 。

步骤 1：计算矩阵  $[T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4]$ ，其行由  $[U_{\rho}^T \ Y_{\rho}^T \ U_f^T \ Y_f^T]^T$  的左核构成。

步骤 2：计算 Hankel 矩阵的 Markov 参数  $\mathfrak{F} = T_4^+(T_2 T_4^+ T_3 - T_1)J$ ，其中上标 + 表示左逆， $J$  为符合维度的矩阵。

步骤 3：计算零输入响应矩阵  $Y_0 = T_4^+[T_1 \ T_2] \begin{bmatrix} U_{\rho} \\ Y_{\rho} \end{bmatrix}$ 。

步骤 4：计算 Markov 参数的分解式  $\mathfrak{F} = U \sum V^T$ 。

步骤 5：计算平衡状态序列  $X_{\text{bal}} = \sqrt{\sum^{-1}} U^T Y_0$ 。

步骤 6：通过代入求解前述算法步骤 5 中等式的可以获得系统相应的平衡表示  $A_{\text{bal}}, B_{\text{bal}}, C_{\text{bal}}, D_{\text{bal}}$ 。

由此提出以下性质：若  $(\tilde{u}, \tilde{y})$  是可控 LTI 系统的一段轨迹，且满足  $n \leq n_{\max}, l \leq l_{\max}$ ，让输入  $\tilde{u}$  满足持续激励  $2i + n_{\max}$  阶，此时通过算法 1 和 2 解得的系统平衡参数等价于原系统，此外，由算法 2 计算的表达式建立在有限时间  $i$  平衡的基础之上。该性质的证明见文献 [17]。

根据上述性质和算法描述，系统当前状态前的最新连续测量数据轨迹  $[U_{\rho}^T \ Y_{\rho}^T]^T$  可以用于确认系统当前时刻的状态和系统的状态模型，结合系统行为学理论，通过将  $[U_f^T \ Y_f^T]^T$  线性组合可以表示系统任意一段连续轨迹。

根据上述结论，在系统采集的数据满足充分持续激励阶时，该系统可被充分识别，可以通过历史数据确认系统的模型和当前状态。

### 3 算法原理及实现步骤

#### 3.1 非参数模型的建立

根据第一节所述系统行为学理论，提出如下定义。把  $B$  中每个轨迹中  $[t_1, t_2]$  内的部分截断出来，组成新的集合 (6)：

$$B_{[t_1, t_2]} = \{\omega: [0, T-1] \rightarrow R^w \mid \exists v \in B: \omega(t) = v(t) \quad \forall t_1 \leq t \leq t_2\} \quad (6)$$

根据式 (1)、式 (2)、式 (3) 可以得到零空间式 (7)：

$$r_B = \{r \in R^w[\sigma] \mid r^T(\sigma)B = 0\} \quad (7)$$

根据式 (2) 定义式 (7) 的阶数形式为式 (8)：

$$r_B^{\psi} = \{r \in R^n[\sigma] \mid r^T(\sigma)B = 0, \text{ 每个元素的阶数均小于等于 } \psi\} \quad (8)$$

考虑如下离散时不变系统模型 (9):

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (9)$$

式 (7) 中  $u(k) \in R^m, x(k) \in R^n, y(k) \in R^p$  分别为系统的输入、状态和输出量,  $A, B, C, D$  是具有合适维度的矩阵, 且满足  $(A, B)$  可控,  $(A, C)$  可观测。

从 0 时刻起, 在系统 (9) 中采样长度为  $T$  的信号  $f: f \in B|_{[0, T-1]}$ 。定义一个 Hankel 矩阵如式 (10)。

$$H_L(f) := \begin{bmatrix} f(0) & f(1) & \cdots & f(T-L) \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(T-L+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(L-1) & f(L) & \cdots & f(T-1) \end{bmatrix} \quad (10)$$

把式 (10) 代入式 (8), 根据式 (8) 对于任意  $r(\sigma) \in r_B^{L-1}, r(\sigma) = r_0 + r_1\sigma + \cdots + r_{L-1}\sigma^{L-1}$  都有式 (11) 成立。

$$[r_0^T \ r_1^T \ \cdots \ r_{L-1}^T]H_L(f) = 0 \quad (11)$$

根据式 (11) 可以得到式 (12) 成立:

$$r_B^{L-1} \subset \text{leftkernel}(H_L(f)) \quad (12)$$

同样由于 LTI 系统的线性特性, 可以得到式 (13) 成立:

$$\text{colspan}(H_L(f)) \subset B|_{[0, T-1]} \quad (13)$$

定义 1: 假设信号  $f = [0, T-1] \cap N \rightarrow R^o$  当且仅当式 (14) 满足时持续激励  $L$  阶。

$$\text{rank}(H_L(f)) = L\omega \quad (14)$$

其中:  $\omega$  是信号空间  $W$  的维数, 对于系统 (7) 有  $\omega = m + p$ , 即由输入和输出拼接成系统信号轨迹。

定理 1: 若系统 (9) 可控, 则存在输入输出序列  $\bar{u}: [0, T-1] \rightarrow R^m, \bar{y}: [0, T-1] \rightarrow R^n$ , 信号序列  $\bar{\omega} = (\bar{u}, \bar{y})$ , 则  $\bar{\omega} \in B|_{[0, T-1]}$ 。如果  $\bar{u}$  持续激励  $L+n$  阶,  $n$  是系统的状态维度, 则有式 (15) 和 (16) 成立:

$$r_B^{L-1} = \text{leftkernel}(H_L(f)) \quad (15)$$

$$\text{colspan}(H_L(f)) = B|_{[0, T-1]} \quad (16)$$

定理 1 的证明见文献 [16]。

根据上述定义和定理, 若满足定理 1 的条件, 系统 (9) 的任意长度为  $L$  的轨迹都可以表示为  $H_L(\bar{\omega})\alpha, \alpha \in R^{T-L+1}$ 。因此对于系统 (9), 其任意长度为  $L$  的连续输入输出信号都可以表示为式 (17)。

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_L(u) \\ H_L(y) \end{bmatrix} \alpha \quad (17)$$

式 (17) 即为离散 LTI 系统的非参数模型, 其完全由系统的输入输出数据构成, 系统的任意一段长度为  $L$  的轨迹都可以由系统测量数据的 Hankel 矩阵的列线性张成。

### 3.2 算法实现

算法主要由数据采集, 优化问题求解和滚动时域优化三部分组成。

对于数据驱动的控制方法, 数据的采集是必不可少的。

根据定义 1 和定理 1 的要求, 采集的数据轨迹需要满足式 (14) 且必须采集自一条连续的系统轨迹。由于判断 Hankel 矩阵的秩比较困难, 一般通过保证采集的数据点个数满足条件  $T > (m+1)(L+n) - 1$  来保证定理 1 的条件成立。

控制系统结构如图 2 所示。

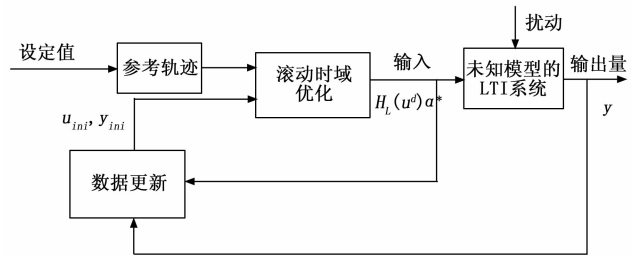


图 2 基于数据驱动的预测控制系统结构框图

如图 2 所示, 系统在每次决策过后更新当前数据。根据文献 [17] 中的平衡子空间辨识法, 把式 (17) 分解为式 (18) 的形式:

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{mi} \\ u_f \\ y_{mi} \\ y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_L(u^d) \\ H_L(y^d) \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} U_p \\ U_f \\ Y_p \\ Y_f \end{bmatrix} \alpha \quad (18)$$

式 (18) 中  $[u_{mi}^T \ y_{mi}^T]^T$  用于估计系统的初始状态  $x_{mi}$ ,  $[u_f^T \ y_f^T]^T$  用于预测。通过求解预测模型 (18) 可以得到  $\alpha$  和预测输出  $y_f$ 。

用式 (18) 作为预测模型代替传统模型预测控制中如式 (9) 的系统状态空间模型表示和系统状态估计, 设计目标函数如下式 (19):

$$\begin{aligned} \min_{u, y, \alpha} \sum_{i=0}^{N-1} \|\bar{u}_i(t)\|_R^2 + \|\bar{y}_i(t) - y^s\|_Q^2 \\ \text{s. t. } \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_{mi} \\ u_f \\ y_{mi} \\ y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_L(u^d) \\ H_L(y^d) \end{bmatrix} \alpha, \\ \bar{u}_i(t) &\in U, \forall i \in \{0, \dots, N-1\}, \\ \bar{y}_i(t) &\in Y, \forall i \in \{0, \dots, N-1\} \end{aligned} \quad (19)$$

目标函数 (19) 中  $N$  为预测时域,  $L = T_{mi} + N$ , 设定值  $y^s \in R^p, u_{mi} \in R^{mT_{mi}}, y_{mi} \in R^{pT_{mi}}$  权重矩阵  $R \in R^{m \times m} > 0, Q \in R^{p \times p} > 0, \|\cdot\|_Q^2 = (\cdot)^T Q (\cdot)$ 。  $[H_L(u^d)^T \ H_L(y^d)^T]^T$  是由采样长度为  $T$  的系统采样数据  $\{u_k^d, y_k^d\}_{k=0}^{T-1}$  构成的如式 (10) 的 Hankel 矩阵,  $U \subseteq R^m$  和  $Y \subseteq R^p$  分别为输入和输出的可行域。对于目标函数 (19), 其唯一决策变量为  $\alpha \in R^{T-L+1}$ 。

通过求解优化问题 (19) 可以得到对系统下一步采取的控制决策。

为了提升算法效率, 减少迭代次数, 采用多步滚动时域优化策略, 一次预测多个未来值, 其具体步骤如下。

步骤 1: 采样  $T$  对连续的系统输入输出数据构建如式 (18) 的系统非参数模型作为目标函数的约束条件, 设置控制器基本参数如预测时域  $N$ , 权重矩阵  $Q, R$  等。

步骤 2: 在  $t$  时刻, 求解目标函数得到最优决策变量  $\alpha^*$ 。

步骤 3: 计算最优输入序列  $u^* = H_L(u^d)\alpha^*$ 。

步骤 4: 选取滚动步长为  $n < N$ , 对系统施加控制量  $(u(t), u(t+1), \dots, u(t+n)) = (u_0^*, u_1^*, \dots, u_n^*)$ , 其中  $u_q^*, q = 1, \dots, n$  为步骤 3 中所求最优输入序列  $u^*$  的前  $n$  个值。

步骤 5: 令  $t = t + n$ , 更新目标函数约束中的  $u_{mi}$  和  $y_{mi}$  为新测量得的  $T_{mi}$  对输入输出数据。

步骤 6: 返回步骤 2 直到预测结束。

### 3.3 鲁棒性改进

对于系统测量数据中存在有界加性高斯噪声的系统, 其输入输出测量信号模型为:

$$\begin{cases} u(k) = \bar{u}(k) + v(k) \\ y(k) = \bar{y}(k) + z(k) \end{cases} \quad (20)$$

式 (20) 中的  $v(k) \in R^m, z(k) \in R^p$  为符合正态分布的有界加性高斯噪声。加入噪声扰动后如式 (18) 的约束条件将变得难以满足, 此时对 (19) 进行以下改进。

松弛变量常被用于支持向量机 SVM (support vector machines), 通过允许一些数据样本不满足硬间隔约束条件, 可以防止 SVM 分类器过拟合, 避免模型过于复杂, 降低模型对噪声点的敏感性。L2 正则项则可以约束松弛变量, 同时可以使目标函数的求解变得稳定和快速。

引入松弛变量可以保证约束的满足, L2 正则项则可以保证变量不产生过大的变化, 改进后的目标函数如式 (21):

$$\begin{aligned} \min_{\bar{u}, \bar{y}, \alpha} \sum_{i=0}^{N-1} \|\bar{u}_i(t)\|_2^2 + \|\bar{y}_i(t) - y^s\|_2^2 + \lambda_u \|\alpha\|_2^2 + \\ \lambda_u \|\epsilon_u\|_2^2 + \lambda_y \|\epsilon_y\|_2^2 \\ \text{s. t. } \begin{bmatrix} \bar{u} + \epsilon_u \\ \bar{y} + \epsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_L(u^d) \\ H_L(y^d) \end{bmatrix} \alpha, \\ \bar{u}_i(t) \in U, \forall i \in \{0, \dots, N-1\}, \\ \bar{y}_i(t) \in Y, \forall i \in \{0, \dots, N-1\} \end{aligned} \quad (21)$$

式 (21) 中  $\epsilon_u$  和  $\epsilon_y$  (当且仅当噪声为 0 时  $\epsilon_u = \epsilon_y = 0$ ) 分别为输入和输出的辅助松弛变量 (其中的元素均大于 0),  $\lambda_u > 0, \lambda_y > 0$  和  $\lambda_\alpha > 0$  为惩罚因子, 其值根据噪声大小选取。由于预测轨迹根据由含噪声数据的 Hankel 矩阵乘以  $\alpha$  得到, 在目标函数中加入  $\|\alpha\|_2^2$ , 通过选择尽可能小的  $\|\alpha\|_2^2$  可以隐式降低噪声的影响。采取多步滚动时域优化算法步骤和上文所述相同, 这里不再赘述。

## 4 仿真实验

### 4.1 实验数据的采集

为了验证算法的有效性, 采用一个典型的多输入多输出的四容水箱系统作为实验对象, 并对该四容水箱的跟踪控制问题进行仿真验证。

根据四容水箱的工作原理, 建立对象的非线性机理模型为式 (22)<sup>[18]</sup>。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gx_1} + \frac{a_3}{A_1} \sqrt{2gx_3} + \frac{\gamma_1}{A_1} u_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gx_2} + \frac{a_4}{A_2} \sqrt{2gx_4} + \frac{\gamma_2}{A_2} u_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gx_3} + \frac{(1-\gamma_2)}{A_3} u_2 \\ \frac{dx_4}{dt} = -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gx_4} + \frac{(1-\gamma_1)}{A_4} u_1 \end{cases} \quad (22)$$

在平衡点 (数据见表 1) 处对式 (22) 进行线性化处理, 四容水箱系统的输入为水泵电压  $u = [u_1 \ u_2]^T$ , 状态为水箱液位高度  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ , 输出为水箱 1 和水箱 2 的液位高度  $y = [y_1 \ y_2]^T$ 。水箱选取参数和初始条件如表 1 所示<sup>[19]</sup>。

表 1 四容水箱系统相关参数

序号	主要参数	单位	参数值
1	$A_1, A_3$	$\text{cm}^2$	50.27
2	$A_2, A_4$	$\text{cm}^2$	28.27
3	$a_1$	$\text{cm}^2$	0.233
4	$a_2$	$\text{cm}^2$	0.242
5	$a_3$	$\text{cm}^2$	0.127
6	$a_4$	$\text{cm}^2$	0.127
7	$g$	$\text{cm}^2/\text{s}$	981
8	$\gamma_1, \gamma_2$		0.4
9	$(h_1^0, h_2^0)$	m	(0.65, 0.77)
10	$(h_3^0, h_4^0)$	m	(0.79, 1.16)
11	$(v_1^0, v_2^0)$	V	(1, 1)
12	$U$	V	-3 ~ 3
13	$Y$	m	-10 ~ 10

输入选取范围在  $[-3, 3]$  之间的随机激励信号, 系统初始状态设置为零初始状态。对于四容水箱, 输入和输出维度  $m = 2, p = 2$ , 状态维度  $n = 4$ 。选取初始数据序列长度  $T_{mi} = 4$ , 预测时域  $N = 40, L = T_{mi} + N = 44$ , 根据定理 1 的要求采样数据序列长度需要满足  $T > (m+1)(L+n) - 1 = 143$ , 因此选择采样数据点个数为  $T = 150$ , 采样间隔选取为 0.1 s, 总采样时间为 15 s。采样输入输出数据序列为  $U(k) = [u_1(k), u_2(k)]$  和  $Y(k) = [y_1(k), y_2(k)]$ , 采样数据如图 3。

### 4.2 算法仿真验证

为了验证所提方法的有效性, 先考虑测量数据中不含噪声的情况。选择  $y^s = [0.65 \ 0.77]^T$  为参考轨迹。控制器参数选择为  $N = 40$ , 即预测时间为 4 s, 初始轨迹长度  $T_{mi} = 4$ , 权重矩阵  $Q = 10 I_p, R = 0.1 I_m$ , 其中  $I_m$  和  $I_p$  是二阶单位矩阵。

为了证明所提算法的优越性, 将文中所提方法与文献 [20] 中提出的基于数据驱动的子空间预测控制 (data-driven subspace predictive control, DDSPC) 方法进行比较。先证明 DDSPC 算法的有效性: 同时给辨识模型和实际模型相

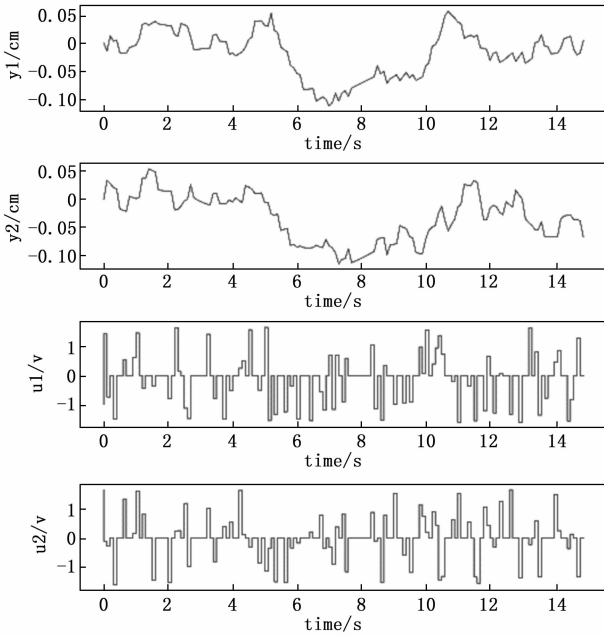


图 3 不含噪声的采样数据

同的激励信号, 将两者产生的响应进行对比, 结果如图 4 所示。

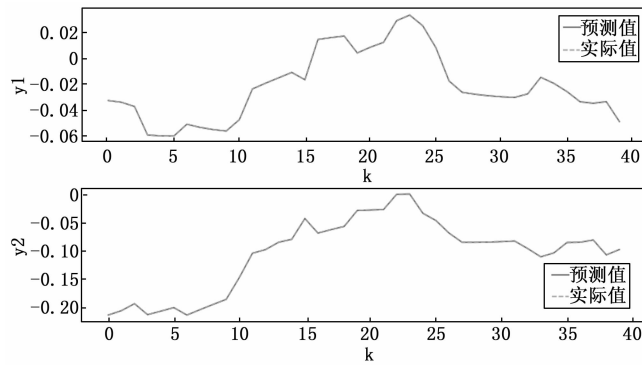


图 4 DDSPC 真实值和估计值响应曲线

如图 4 中仿真结果所示, 虚线表示实际四容水箱模型在激励信号下的输出响应, 实线表示根据子空间辨识得到的模型在相同激励信号下的输出响应, 两条曲线重合, 表示根据 DDSPC 方法得到的辨识模型能够精确匹配实际四容水箱系统模型。

基于 DDSPC 方法有效的情况下, 将文中所提算法和 DDSPC 算法进行仿真比较, 仿真结果如图 5 和图 6 所示。

如图 5 和图 6 所示, 对于四容水箱系统无噪声的情况, 文中所提方法和 DDSPC 都有较好的控制效果, 但是文中所提方法跟踪精度更高, 过渡时间更短, 超调量更小, 具有更好的动态性能。

### 4.3 鲁棒性检验

为了验证改进后算法的鲁棒性, 在四容水箱的每个测量输入输出数据中都添加一个大小在  $(-10^{-3}, 10^3)$  之间的随机高斯噪声模拟扰动, 增加完噪声后的采样数据如图 7

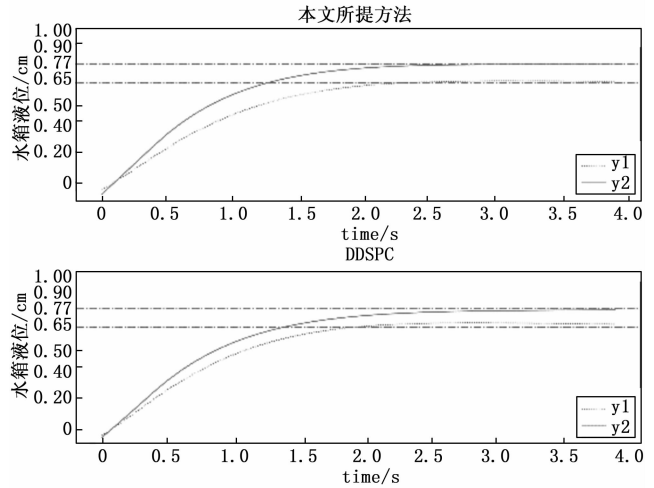


图 5 本文方法与 DDSPC 方法跟踪控制对比

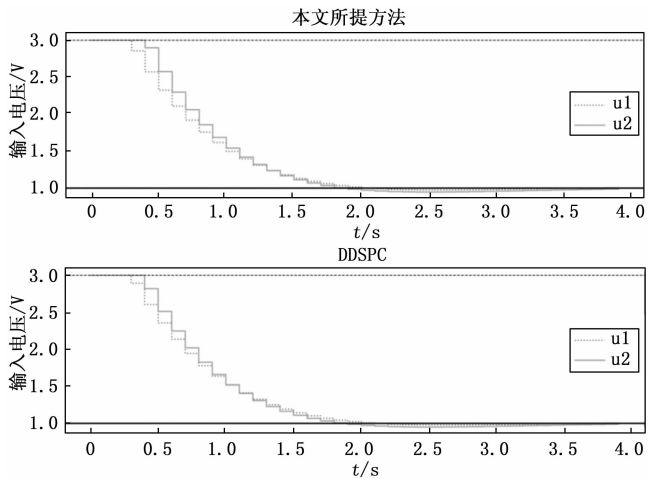


图 6 本文方法和 DDSPC 控制输入变化曲线

所示。

控制器参数选择为  $Q = 15 I_2, R = 0.1 I_2, \lambda_u = \lambda_y = 10^{-4}, \lambda_w = 1$ 。参考轨迹设定值为  $[0 \ 0]^T$ , 系统初始状态随机生成。为了便于观察, 只展示水箱 2 的液位变化情况。分别比较了文中算法改进前后, 改进后算法和 DDSPC 算法的预测输出和真实响应曲线, 仿真结果如图 8 和图 9 所示。

如图 8 中仿真结果所示, 当系统含有测量噪声时, 改进前的方案跟踪精度降低, 不再能完成控制任务。引入松弛变量和 L2 正则项改进后, 真实响应和预测值之间的偏差显著减小, 跟踪效果大大增强。

如图 9 中仿真结果所示, 与 DDSPC 方法相比, 本文所提改进后算法跟踪精度更高, 能更好的贴合参考轨迹, 且系统的抖振更小。

为了进一步验证改进后算法的鲁棒性, 将前述噪声扩大十倍后加入系统测量数据再进行仿真实验, 控制器参数选择和之前保持一致, 仿真结果如图 10 和 11 所示。

如图 10 中仿真结果所示, 在将随机噪声范围扩大十倍后, 改进前算法对系统的控制效果进一步变差, 系统响应

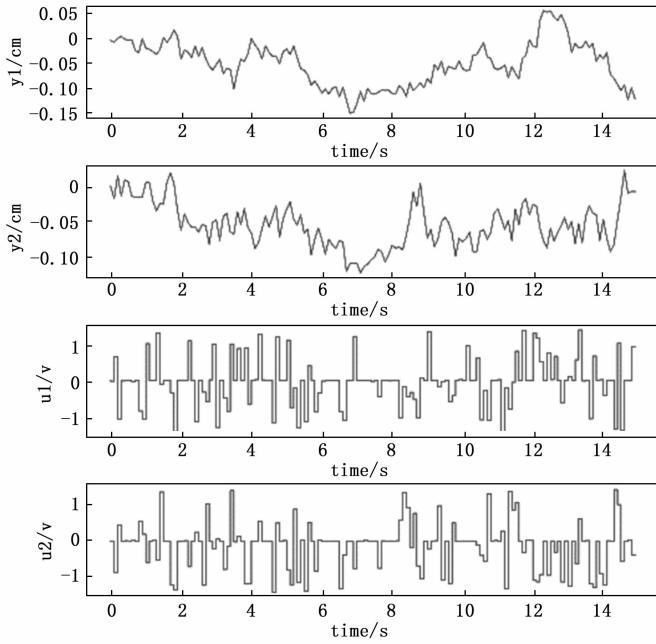


图 7 含噪声的采样数据

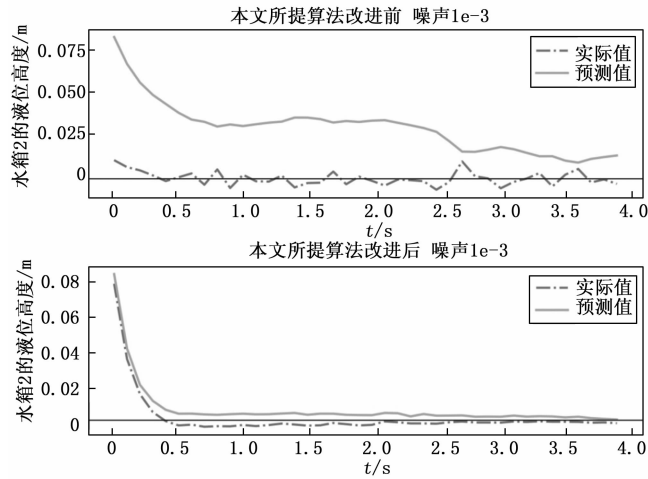


图 8 噪声情况下改进前后方法对比

抖动变大,且系统无法收敛到平衡点,改进后算法有效抑制了噪声扰动,控制效果远优于改进前。如图 11 所示,将噪声扩大后,DDSPC 算法的预测输出和实际响应产生了较大偏离,表明此时子空间预测模型和实际模型严重失配,跟踪效果进一步降低,本文所提改进后算法比 DDSPC 算法抗噪声扰动能力更强。为了更直观显示文中所提方法的抑制扰动能力,提出以下指标衡量抗干扰能力,其值越小表示抗干扰能力越强:

$$K = \frac{\text{噪声情况下输出累计误差和}}{\text{无噪声情况下输出累计误差和}} = \frac{\sum_{t=0}^{k=T-1} \|\tilde{y}_{\text{true}}(t) - \tilde{y}_{\text{pre}}(t)\|_2}{\sum_{t=0}^{k=T-1} \|y_{\text{true}}(t) - y_{\text{pre}}(t)\|_2} \quad (23)$$

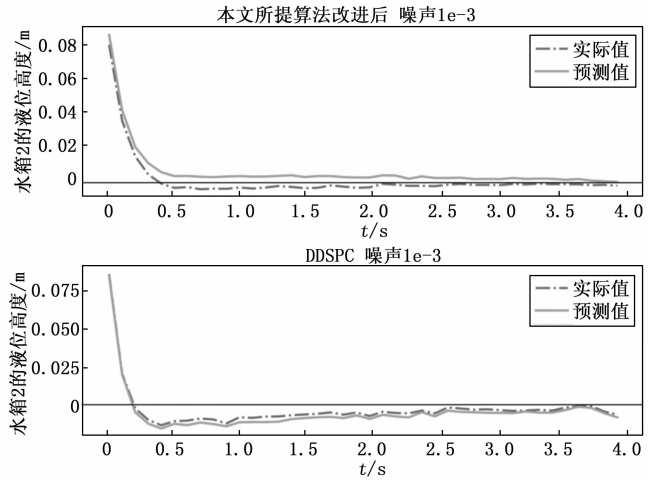


图 9 本文方法与 DDSPC 方法对比

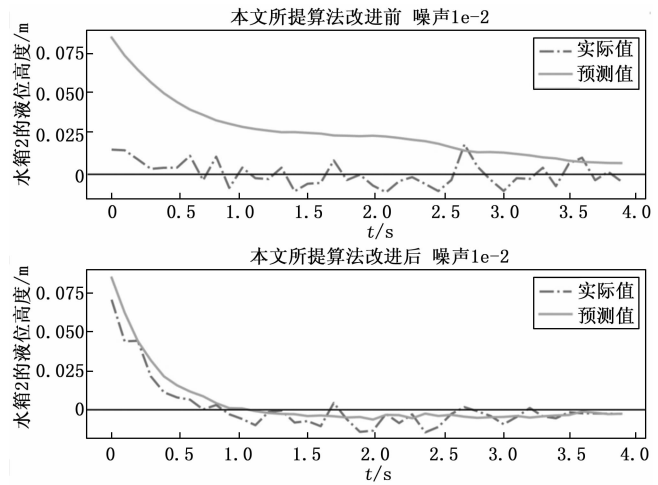


图 10 噪声放大后改进前后算法对比

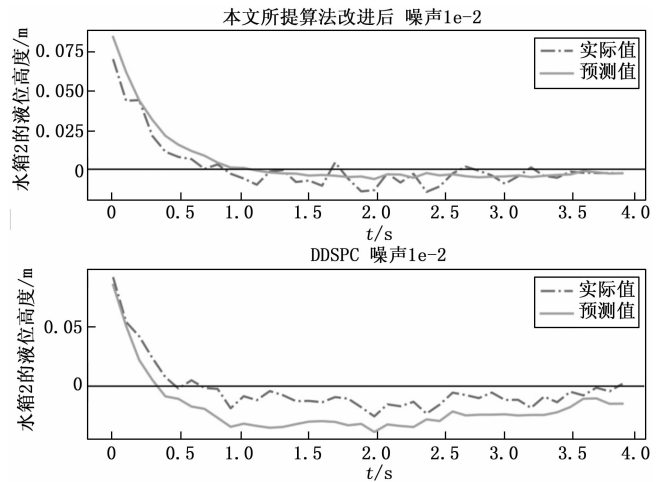


图 11 噪声放大后与 DDSPC 算法对比

分别计算噪声为 0.001 和 0.01 时本文所提改进后算法和 DDSPC 算法的  $K$  值,结果如下:

	噪声值 0.001	噪声值 0.01
本文所提算法	172.44	2 373.29
DDSPC	203.68	44 776.22

根据上述计算的  $K$  值, 在随机噪声较小时, 本文所提改进后算法仅是略优于 DDSPC 算法, 而在测量数据中含有的随机高斯噪声较大时, 本文所提算法的  $K$  值仅为 DDSPC 算法的 0.053 倍, 即在此指标下, 本文所提算法抗干扰能力是 DDSPC 算法的 20 倍, 远强于 DDSPC 算法。因此与 DDSPC 算法相比, 本文所提算法在改进后具有更强的鲁棒性。

综上所述, 文中所提的仅使用系统测量数据直接设计控制器的预测控制方法能有效实现对系统设定值的轨迹跟踪, 具有较好的控制品质的同时也具有较强的鲁棒性。

## 5 结束语

本文针对测量数据中含有随机噪声的模型未知 LTI 系统, 提出的将基于系统行为学理论的非参数模型和预测控制方法相结合的控制策略, 通过直接使用系统的测量数据设计控制器解决了传统模型预测控制中预测模型设计过程复杂、精确度低且缺乏通用性的问题, 同时充分考虑了有界加性高斯噪声对系统控制效果带来的影响, 通过在目标函数设计和其终端约束中引入辅助松弛变量和  $L_2$  正则项有效抑制了噪声带来的影响, 显著提升了算法的鲁棒性。通过将该算法应用于四容水箱系统并进行仿真验证, 仿真结果表明了该算法的有效性, 并与同样基于数据驱动的子空间预测控制方法相比较, 所提方法在具有更好动态性能的同时, 抗噪声干扰能力也提升了十余倍, 具有良好的控制品质和较强的鲁棒性。

## 参考文献:

- [1] HOU Z S, WANG Z. From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective [J]. *Information Sciences*, 2013, 235 (67): 3–35.
- [2] 侯忠生, 许建新. 数据驱动控制理论及方法的回顾和展望 [J]. *自动化学报*, 2009, 35 (6): 650–667.
- [3] 刘 强, 卓 洁, 郎自强, 等. 数据驱动的工业过程运行监控与自优化研究展望 [J]. *自动化学报*, 2018, 44 (11): 1944–1956.
- [4] RODRIGUEZ J, GARCIA C, MORA A, et al. Latest advances of model predictive control in electrical drives—Part I: Basic concepts and advanced strategies [J]. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2021, 37 (4): 3927–3942.
- [5] 张永昌, 屈祈延, 杨海涛. 基于空间矢量调制的 Vienna 整流器无模型预测电流控制 [J]. *电工技术学报*, 2022, 37 (21): 5541–5547.
- [6] 王连杰, 朱远明, 钟伟民. 一种时滞系统的改进无模型自适应预测控制 [J]. *控制工程*, 2021, 28 (2): 382–387.
- [7] GAO S, LIU L, WANG H, et al. Data-driven model-free resilient speed control of an autonomous surface vehicle in the presence of actuator anomalies [J]. *ISA Transactions*, 2022 (17): 127.
- [8] HAYDARI A, YILMAZ Y. Deep reinforcement learning for intelligent transportation systems: A survey [J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2020, 23 (1): 11–32.
- [9] CARLET P G, FAVATO A, BOLOGNANI S, et al. Data-driven continuous-set predictive current control for synchronous motor drives [J]. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2022, 37 (6): 6637–6646.
- [10] SCHULZE J C, MITSOS A. Data-driven Nonlinear Model Reduction using Koopman Theory: Integrated Control Form and NMPC Case Study [J]. *IEEE Control Systems Letters*, 2022 (17): 147–157.
- [11] HU C, CAO Y, WU Z. Online machine learning modeling and predictive control of nonlinear systems with scheduled mode transitions [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2022 (18): 6324–6347.
- [12] FAVOREEL W, DE MOOR B, GEVERS M. SPC: Subspace predictive control [J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 1999, 32 (2): 4004–4009.
- [13] WEN S, CHEN J, QIN G, et al. An improved fuzzy model predictive control algorithm based on the force/position control structure of the five-degree of freedom redundant actuation parallel robot [J]. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2018, 15 (5): 1729–1738.
- [14] YANG L, LU J, XU Y, et al. Constrained robust model predictive control embedded with a new data-driven technique [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2020, 14 (16): 2395–2405.
- [15] JIANWANG H, RAMIREZ-MENDOZA R A, MORALES-MENENDEZ R. Introducing Dynamic Programming and Persistently Exciting into Data-Driven Model Predictive Control [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, 2021 (7): 1849–1862.
- [16] WILLEMS J C, RAPISARDA P, MARKOVSKY I, et al. A note on persistency of excitation [J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54 (4): 325–329.
- [17] MARKOVSKY I, WILLEMS J C, RAPISARDA P, et al. Algorithms for deterministic balanced subspace identification [J]. *Automatica*, 2005, 41 (5): 755–766.
- [18] CHAUDHARI V, TAMHANE B, KURODE S. Robust liquid level control of quadruple tank system—second order sliding mode approach [J]. *IFAC-PapersOnLine*, 2020, 53 (1): 7–12.
- [19] RAFF T, HUBER S, NAGY Z K, et al. Nonlinear model predictive control of a four tank system: An experimental stability study [C]. In *Proc. IEEE Int. Conf. Control Appl.*, 2006 (37): 237–246.
- [20] SEDGHIZADEH S, BEHESHTI S. Data-driven subspace predictive control: Stability and horizon tuning [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, 355 (15): 7509–7547.