

具有执行器饱和的切换 2-D 系统事件触发控制

骆茂森, 黄世沛

(温州大学 电气数字化设计技术国家地方联合工程实验室, 浙江 温州 325035)

摘要: 针对具有执行器饱和的切换 2-D 连续离散系统, 提出了一种基于多 Lyapunov 函数法的事件触发控制方案; 为了减少通信资源浪费和执行器的损耗, 提出了一种事件触发机制; 该触发机制考虑了执行器饱和特性, 只有当执行器未饱和, 且满足事件触发条件时, 控制器才会更新; 利用凸组合技术和多 Lyapunov 函数法, 提出了一种状态依赖的切换信号与状态反馈控制器的设计方法, 并对闭环系统的指数稳定性进行了分析, 利用线性矩阵不等式技术导出了控制器增益矩阵存在的充分条件; 利用 Darboux 方程的仿真算例验证了所提出的事件触发控制方案的有效性, 仿真结果表明了在所设计的控制方案下, 闭环系统的状态是指数收敛的, 同时还能减少通信资源的浪费。

关键词: 2-D 系统; 切换系统; 执行器饱和; 指数稳定; 事件触发控制

Event-triggered Control of Switched 2-D Systems with Actuator Saturation

LUO Maosen, HUANG Shippei

(National-Local Joint Engineering Laboratory for Digitalize Electrical Design Technology, Wenzhou University, Wenzhou 325035, China)

Abstract: Aimed at switched 2-D continuous-discrete systems with actuator saturation, An event-triggered control scheme based on the multi-Lyapunov function. is proposed. In order to reduce the waste of communication resources and loss of actuators, an event-triggered mechanism is proposed. The saturation characteristic of the actuator is considered in the event-triggered mechanism. The controller is updated only when the actuator is not saturated and the event-triggered condition is satisfied. The convex combination technique and multi-Lyapunov function method are used to propose a state dependent switching signal and state feedback controller, and analyze the exponential stability of the closed-loop system. Then the sufficient conditions for the existence of the controller gains are derived by using the linear matrix inequality technology. The effectiveness of the proposed event-triggered control scheme is verified by a simulation example about the Darboux equation, the simulation results show that the proposed control method can make the state of the closed-loop system exponentially convergent, and reduce the waste of communication resource at the same time.

Keywords: 2-D systems; switched systems; actuator saturation; exponential stability; event-triggered control

0 引言

随着现代工业、社会经济和计算机技术的快速发展, 越来越多的系统和信号需要用多维、多变量的思想来描述。多维系统在数字图像处理、卫星天气云图分析^[1]、地震多发区监测数据等方面有着极其重要的应用。这些深厚的工程物理背景使得二维系统 (two dimensional, 2-D) 的研究方兴未艾, 成为控制理论的重要研究领域之一。2-D 系统是指状态具有两个独立变量的系统, 包括 2-D 连续系统、2-D 离散系统和 2-D 连续离散系统。2-D 连续离散系统包括连续动力学和离散动力学, 这两种动力学相互影响。此类系统在实践中有广泛的应用, 如长臂采煤^[2]、车辆排水^[3]、运河灌溉^[4]和其他实际工程领域。

在 2-D 系统的研究过程中发现此类系统容易受到突然变化的影响, 此类现象可以用切换系统来描述。切换系统

是一种重要的混杂系统, 它是由一组动态连续或者是动态离散时间子系统和一条决定子系统之间如何进行切换的切换规则组成^[5]。近年来切换 2-D 系统也引起了国内外学者的广泛关注, 且取得了一些初步的成果。例如, 文献 [6] 使用平均驻留时间方法建立了切换 2-D 离散系统的指数稳定性准则, 并设计了状态反馈控制器。文献 [7] 使用多重 Lyapunov 函数方法和平均驻留时间方法, 建立了切换连续非线性系统的渐近稳定性和指数稳定性准则。文献 [8] 通过应用模式相关持续驻留时间切换方法, 提出了一种适用于切换 2-D 离散系统的准时间相关滤波方法。文献 [9] 旨在研究 Roesser 模型中具有时变时滞的 2-D 切换正非线性系统的稳定性。文献 [10] 提出了一类具有多面体不确定参数和脉冲的 2-D 切换正系统的异步控制问题。

在很多实际控制系统中, 执行器饱和是最为普遍的非线性现象之一, 这是因为在系统实际运行的过程中, 由于

收稿日期: 2022-10-21; 修回日期: 2022-12-08。

基金项目: 浙江省自然科学基金项目 (LY22F030008)。

作者简介: 骆茂森 (1998-), 男, 浙江杭州人, 硕士, 主要从事 2-D 系统方向的研究。

通讯作者: 黄世沛 (1989-), 男, 浙江温州人, 博士, 副教授, 主要从事 2-D 系统、切换系统方向的研究。

引用格式: 骆茂森, 黄世沛. 具有执行器饱和的切换 2-D 系统事件触发控制[J]. 计算机测量与控制, 2023, 31(7): 112-121.

执行器元件受到自身物理限制, 其输出值往往都是有一定界限的, 而不可能趋于无限大。如果不考虑执行器的这一限制就对系统进行设计, 会导致系统得不到期望的输出值甚至会酿成重大的事故。近些年, 关于具有执行器饱和的 2-D 系统也引起了越来越多学者的研究, 例如文献 [11] 研究由 Fornasini-Marchesini 型状态空间方程表示的具有执行器饱和的离散二维切换时滞系统的状态反馈 H_∞ 镇定。文献 [12] 研究了一类控制输入饱和的 2-D 离散时间切换时滞系统的状态反馈 H_∞ 问题。文献 [13] 介绍了一种通过模糊控制设计来处理具有执行器饱和的二维模糊系统 H_∞ 控制问题。文献 [14] 研究了带有时变延迟和执行器饱和的二维 delta 算子系统的镇定问题。

需要指出的是, 上述关于 2-D 系统的研究均是基于连续时间控制的, 这样的控制策略会使执行器频繁更新, 并导致不必要的资源浪费和执行器的损耗。有研究指出事件触发控制^[15]既能保持系统的稳定性, 还能够弥补传统连续时间控制下造成的有限通信资源浪费的不足。文献 [16] 研究由 Roesser 模型描述的 2-D 离散系统的事件触发控制。文献 [17] 针对具有干扰的离散 2-D Roesser 系统, 提出了一种事件触发滑模控制 (SMC) 策略。文献 [18] 研究了由 Fornasini-Marchesini 模型描述的 2-D 系统的事件触发滑模控制问题。文献 [19] 提出了 Fornasini-Marchesini 型切换 2-D 离散系统的事件触发控制方案。然而, 到目前为止, 具有执行器饱和的切换 2-D 连续离散系统的事件触发控制问题还未被研究。

基于上述分析, 本文将研究具有执行器饱和的切换 2-D 连续离散系统的事件触发控制问题。为了减少通信资源浪费和执行器的损耗, 本文提出了一种用于执行器饱和且含有多参数矩阵的事件触发机制。利用凸组合技术将饱和非线性控制器转化为一组凸包内的线性控制器组合。利用多 Lyapunov 函数法设计了一种依赖于触发时刻状态的切换信号, 并导出了状态反馈控制器存在的充分条件, 以保证闭环系统的指数稳定性。

符号说明: 在本文中, R^n 表示 n 维欧几里得空间, $R^{n \times n}$ 表示的是 $n \times n$ 维欧几里得空间, 矩阵中的星号 * 表示的是由对称引起的项, $\|\cdot\|$ 表示的是欧几里得范数。

1 预备知识

1.1 基本定义

定义 1^[20]: 考虑以下系统:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^h(t,k)}{\partial t} \\ x^v(t,k+1) \end{pmatrix} = f_{\sigma(t,k)}(x^h, x^v) \quad (1)$$

其中: x^h 和 x^v 分别表示系统的水平和垂直状态, $\sigma(t,k)$ 为在集合 $\bar{N} = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ 中取值的切换信号, N 为子系统的个数。 $f_i(x^h, x^v)$, $i \in \bar{N}$, 为满足 $f_i(0,0)$ 的非线性光滑函数。给定两个正定函数 $V_1(x^h)$ 和 $V_2(x^v)$, 若存在有界的正常数 $\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2 < \infty$ 满足以下条件, 则称系统的初始条件是 L_V 和 L_∞ 有界的。

$$\|x_0^h(\cdot)\|_V = \sum_{k=0}^{\infty} V_1(x_0^h(k)) \leq \xi_1 \quad (2)$$

$$\|x_0^v(\cdot)\|_V = \int_0^{\infty} V_2(x_0^v(t)) dt \leq \xi_2$$

$$\|x_0^h(\cdot)\|_\infty = \sup_{k \geq 0} |x_0^h(k)| \leq \zeta_1 \quad (3)$$

$$\|x_0^v(\cdot)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |x_0^v(t)| \leq \zeta_2$$

式 (2) 中, $V_1(x_0^h(k))$ 与 $V_2(x_0^v(t))$ 分别是关于初始状态 $x_0^h(k)$ 与 $x_0^v(t)$ 的正定函数, 表示 $x_0^h(k)$ 与 $x_0^v(t)$ 不为 0 时, 这两个函数是正的, 当且仅当 $x_0^h(k)$ 与 $x_0^v(t)$ 为 0, 才为 0。式 (2) 表明了 $V_1(x_0^h(k))$ 的无穷项求和是有界的, $V_2(x_0^v(t))$ 从 0 到无穷的积分也是有界的。那么也意味着当 t 与 k 趋于无穷时, $x_0^h(k)$ 与 $x_0^v(t)$ 必须为 0。式 (3) 表明初始状态 $x_0^h(k)$ 与 $x_0^v(t)$ 始终是有界的。本文所考虑的切换 2-D 系统, 其初始条件都是满足定义 1 所描述的性质。该初始条件将会在系统稳定性证明里用到。

定义 2: 考虑系统 (1), 如果对于 L_V 和 L_∞ 有界的初始条件, 存在正常数 η_1 和 $\eta_2 < 1$, 以及 λ_1 和 $\lambda_2 < \infty$, 满足 $|x^h(t,k)| \leq \lambda_1 e^{-\eta_1 t} \eta_2^k$ 和 $|x^v(t,k)| \leq \lambda_2 e^{-\eta_2 t} \eta_2^k$, 则称该系统是指数稳定的。

定义 2 给出系统 (1) 指数稳定的定义。从定义中可看出, 系统要具有指数稳定性, 需要满足 L_V 和 L_∞ 有界的初始条件。由于系统状态 $x^h(t,k)$ 与 $x^v(t,k)$ 是关于 t 与 k 的二元函数, 定义 2 中的指数稳定性性质要求系统状态在 t 与 k 方向都是指数衰减的。

1.2 基本引理

引理 1: 系统 (1) 有着 L_V 和 L_∞ 初始有界, 如果存在正常数 $a_{i,1}, a_{i,2}, b_{i,1}, b_{i,2}$ 以及 $a_{i,1} > b_{i,2}$ 和 $a_{i,2} > b_{i,1}$, $i \in \bar{N}$ 和正定函数 $V_{i,1}(x^h)$ 和 $V_{i,2}(x^v)$ 满足以下条件:

$$\frac{\partial V_{i,1}(x^h)}{\partial t} \leq -a_{i,1} V_{i,1}(x^h) + b_{i,1} V_{i,2}(x^v) \quad (4)$$

$$\Delta V_{i,2}(x^v) \leq -a_{i,2} V_{i,2}(x^v) + b_{i,2} V_{i,1}(x^h) \quad (5)$$

则子系统 i 是指数稳定的。

证明: 通过文献 [21] 中定理 3 的证明思路, 即可得到引理 1。

引理 1 给出了 2-D 连续-离散系统满足指数稳定性的充分条件, 该引理将在下文中用于系统的稳定性证明。值得注意的是, 式 (4) 意味着能量函数 $V_{i,1}(x^h)$ 在 t 方向上是输入状态稳定的, 其衰减的速率取决于 $a_{i,1}$ 的大小, 式 (5) 意味着能量函数 $V_{i,2}(x^v)$ 在 k 方向上是输入状态稳定的, 其衰减的速率取决于 $a_{i,2}$ 的大小。通过调节 $a_{i,1}$ 和 $a_{i,2}$ 的大小可以调节系统衰减的速率。此外, 把式 (4) 和式 (5) 两式相加, 可以得到:

$$\text{div}V(x) = \frac{\partial V_{i,1}(x^h)}{\partial t} + \Delta V_{i,2}(x^v) \leq$$

$$-(a_{i,1} - b_{i,2})V_{i,1}(x^h) - (a_{i,2} - b_{i,1})V_{i,2}(x^v)$$

在上述式子中, $\text{div}V(x)$ 称为散度。在满足 $a_{i,1} > b_{i,2}$ 和 $a_{i,2} > b_{i,1}$ 的前提下, 上式可保证 2-D 连续离散系统是指数稳定的。

引理 2^[22] (Schur 补引理) 矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}$ 和 $S_{11} = S_{11}^T, S_{22} = S_{22}^T$, 其中 S_{11}, S_{12} 和 S_{22} 是适当维数的矩阵, 则下列几个条件等价:

- 1) $S < 0$;
- 2) $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
- 3) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12}^T S_{22}^{-1} S_{12} < 0$.

引理 2 又称为 Schur 补引理, 经常用于矩阵的等价变换, 将非线性矩阵不等式转换成可求解的线性矩阵不等式。

引理 3^[23] (状态反馈下的凸组合表示): 给定 $F \in R^{m \times n}, H \in R^{m \times n}$, 对于所有状态 $x \in \mathcal{L}(H) = \{x \in R^n : |h_s x| \leq 1, s = 1, 2, \dots, m\}$, 有 $\text{sat}(Fx) \in \text{co}\{(E_j F + E_j H)x, j = 1, 2, \dots, 2^m\}$, 其中 h_j 为矩阵 H 的第 j 行, $\text{co}(\cdot)$ 表示凸包。

引理 3 在很多文献中都有应用, 利用其来处理具有执行器饱和和系统线性化的问题, 其应用原理是将执行器饱和函数用凸组合的形式来描述, 可以将难以处理的饱和和执行器转化成可以进行处理的线性化形式。该引理会在下文中用于处理本文研究的切换 2-D 连续离散系统的执行器饱和问题。

2 问题描述

2.1 系统介绍

本文考虑的具有执行器饱和的切换 2-D 连续离散系统如下所示:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t, k)}{\partial t} \\ x^v(t, k+1) \end{bmatrix} = A_{\sigma(t, k)} \begin{bmatrix} x^h(t, k) \\ x^v(t, k) \end{bmatrix} + B_{\sigma(t, k)} \text{sat}(u(t, k)) \quad (6)$$

其中: $x^h(t, k) \in R^{n_1}$ 和 $x^v(t, k) \in R^{n_2}$ 分别表示系统的水平和垂直状态, $x(t, k) = \begin{bmatrix} x^h(t, k) \\ x^v(t, k) \end{bmatrix}$ 表示维度为 $n = n_1 + n_2$ 的全局状态, $\sigma(t, k)$ 为在集合 \bar{N} 中取值的切换信号。 $u(t, k) \in R^m$ 是系统的控制输入, 经过执行器作用于被控对象。 $\text{sat}(u(t))$ 是饱和函数, 具体定义如下:

$$\text{sat}(u(t)) = [\text{sat}(u_1(t)), \text{sat}(u_2(t)), \dots, \text{sat}(u_m(t))]^T$$

$$\text{sat}(u_i(t)) = \begin{cases} u_{\max}, & u_i(t) > u_{\max} \\ u(t), & -u_{\max} \leq u_i(t) \leq u_{\max} \\ -u_{\max}, & u_i(t) < -u_{\max} \end{cases}$$

其中: $u_{\max} > 0$ 表示控制输入的最大幅值。不失一般性, 本文取 $u_{\max} = 1$ 。

矩阵 A_i 和 $B_i (i \in \bar{N})$ 有以下形式:

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{i,11} & A_{i,12} \\ A_{i,21} & A_{i,22} \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} B_{i,1} \\ B_{i,2} \end{bmatrix},$$

$$A_{i,11} \in R^{n_1 \times n_1}, A_{i,12} \in R^{n_1 \times n_2}, A_{i,21} \in R^{n_2 \times n_1},$$

$$A_{i,22} \in R^{n_2 \times n_2}, B_{i,1} \in R^{n_1 \times m} \text{ 和 } B_{i,2} \in R^{n_2 \times m}$$

系统 (6) 包含水平状态和垂直状态, 它们都是关于 t 与 k 的二元函数, 有两个维度, 且一个维度是连续变量, 另一个维度是离散的变量, 这与通常的一维 (1-D) 系统是不同的。进一步地, 系统中又有切换信号的存在, 并且考虑

了在实际中可能会出现执行器饱和的状况, 所以系统 (6) 被称为具有执行器饱和的切换 2-D 连续离散系统, 该系统是一类重要的混杂系统, 关于它在实际工程领域中的应用在引言中已做介绍。Roesser 模型是常见的 2-D 系统模型, 本文主要针对切换 2-D 连续离散 Roesser 模型展开讨论。由于系统的复杂结构, 以及执行器饱和的存在, 该系统的稳定性分析与控制器设计具有一定的困难。如引言中所述, 事件触发控制既能保持系统的稳定性, 还能够弥补传统连续时间控制下造成的有限通信资源浪费的不足, 而该问题还未被研究。因此, 本文主要讨论该模型在执行器饱和和状态下的指数稳定性和事件触发控制器设计问题。

2.2 事件触发条件的选取

对于系统 (6), 采用传统的时间触发方案来确定在每一个时刻的传输系统状态可能会导致执行器的损耗和通信通道的冗余。其次, 为了充分利用执行器饱和的性质, 进一步节约资源, 本文设计了一种考虑到饱和和特性的事件触发控制方案。

首先设系统上一时刻的传输状态为 $x^h(t_g, k_l), x^v(t_g, k_l) (g, l \in \mathbb{N})$, 那么, 只有当以下条件满足时才能传输当前状态:

$$\begin{cases} e_1^{hT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^h e_1^h(t, k) \geq \delta_{\sigma(t, k)} (\partial x^{hT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^h x^h(t, k) + (1 - \partial) x^{hT}(t_g, k_l) \varphi_{\sigma(t, k)}^h x^h(t_g, k_l)) \\ e_1^{vT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^v e_1^v(t, k) \geq \delta_{\sigma(t, k)} (\partial x^{vT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^v x^v(t, k) + (1 - \partial) x^{vT}(t_g, k_l) \varphi_{\sigma(t, k)}^v x^v(t_g, k_l)) \end{cases}$$

其中: $e_1^h(t, k) = x^h(t, k) - x^h(t_g, k_l), e_1^v(t, k) = x^v(t, k) - x^v(t_g, k_l), t \in [t_g, t_{g+1}), k \in [k_l, k_{l+1})$ 表示系统误差矩阵, $\varphi_i^h \in R^{n_1}$ 和 $\varphi_i^v \in R^{n_2}$ 是权重矩阵, 会在后面的推导中给出。 $\delta_i \in [0, 1), i \in \bar{N}$ 表示为事件触发的阈值。所有的传输状态序列 $x^h(t_g, k_l), x^v(t_g, k_l)$ 只是整个状态序列 $x^h(t, k), x^v(t, k)$ 的一部分。

其次, 考虑到执行器饱和的性质, 定义即将到来的水平瞬时 t_{g+1} 和垂直瞬间 k_{l+1} 如下:

$$t_{g+1} = t_g + \min_{\tau} \{ \tau = t - t_g \mid e_1^{hT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^h e_1^h(t, k) \geq \delta_{\sigma(t, k)} (\partial x^{hT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^h x^h(t, k) + (1 - \partial) x^{hT}(t_g, k_l) \varphi_{\sigma(t, k)}^h x^h(t_g, k_l)) \} \wedge \{ \text{sat}(u(t)) - u(t) = 0 \} \quad (7)$$

$$k_{l+1} = k_l + \min_{\tau} \{ \tau = k - k_l \mid e_1^{vT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^v e_1^v(t, k) \geq \delta_{\sigma(t, k)} (\partial x^{vT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^v x^v(t, k) + (1 - \partial) x^{vT}(t_g, k_l) \varphi_{\sigma(t, k)}^v x^v(t_g, k_l)) \} \wedge \{ \text{sat}(u(t)) - u(t) = 0 \} \quad (8)$$

其中: $\partial \in [0, 1]$ 。

值得指出的是, 式 (7) 和 (8) 中的事件触发条件是借鉴了文献 [24] 中给出的关于 2-D 离散系统的一个事件触发条件, 与之类似的是, 所有的传输状态都是整个系统传输序列 $(x^h(t, k), x^v(t, k))$ 的一部分, 这种处理使得事件触发控制在原有的基础上更加减少了信号的传输, 使得同时在通信通道进行传输的信号量大大减少, 进一步节约了通信资源以及减少了执行器的损耗。

本文所构造的事件触发条件与文献 [24] 中的又有所不同, 权重矩阵 φ_i^h 和 φ_i^v , 以及事件触发的阈值 δ_i 是依赖于子系统的, 意味着不同的子系统具有不同的事件触发条件, 这使得本文构造的事件触发条件更加灵活多变。当第 i 个子系统激活时, 只需判断第 i 个子系统的触发条件是否满足即可。若所有的子系统的权重矩阵与事件触发的阈值都取成一样时, 不同的子系统, 其事件触发条件就变成一样了。

此外, 通过引入参数 ϑ 使得整个触发条件比文献 [24] 中的更加一般, 通过选择合适的 ϑ 和 $\delta_i (i \in \bar{N})$, 可以进一步地减少事件触发的次数, 降低通信通道的冗余。当 $\vartheta = 1$ 并且子系统的个数为 1 时, 事件触发条件式 (7) 和 (8) 就退化成文献 [24] 中所给出的事件触发条件。

在判断事件触发条件的基础上, 当执行器达到饱和状态时, 如果满足了事件触发的条件, 本应该有一次新的触发, 然而此时得到的作用于下一个时间区间的控制量仍然是上一时刻饱和状态的值。因此, 在构造事件触发方案时考虑了饱和特性的条件 $\{sat(u(t)) - u(t) = 0\}$, 只有当执行器处在未饱和状态, 且满足事件触发的条件时, 才可以进行新的触发, 对系统进行这样的处理可以在事件触发的基础上进一步减少触发的次数, 从而减少执行器的损耗和通信资源的浪费。

2.3 控制器的设计

在设计的事件触发机制下, 状态反馈控制器可以设计为:

$$u(t, k) = K_{\sigma(t, k)} \begin{pmatrix} x^h(t_g, k) \\ x^v(t, k_l) \end{pmatrix} = K_{\sigma(t, k)} \begin{pmatrix} x^h(t, k) - e_1^h(t, k) \\ x^v(t, k) - e_1^v(t, k) \end{pmatrix}, t \in [t_g, t_{g+1}), k \in [k_l, k_{l+1})$$

其中: $K_i = (K_{i,1}, K_{i,2}), i \in \bar{N}$, 是系统的反馈增益, 将在后面确定。状态反馈控制器中使用的状态量始终是 $x^h(t_g, k_l), x^v(t_g, k_l) (g, l \in \mathbb{N})$, 只有当下一个满足条件的事件被触发之后, 取这一时刻的 $x^h(t_{g+1}, k), x^v(t, k_{l+1})$ 重新进行计算, 并且进行数据的传输, 这也就充分说明了利用事件触发控制可以有效地减少通信通道的堵塞, 节约资源。

本文使用的事件触发控制方案不同于传统的时间触发控制方案, 本小节中设计的控制器是使用状态 $x^h(t_g, k_l)$ 和 $x^v(t_g, k_l)$ 这意味着系统控制输入只在触发时刻更新, 这既可以降低控制器与执行器之间的通信频率, 又可以减轻执行器的磨损。

图 1 给出了在事件触发控制下的闭环系统的结构图, 其中 $u(t, k)$ 作为执行器的输入, $sat(u(t, k))$ 作为执行器的饱和输出。触发条件满足时, 事件发生器将当前时刻的状态量 $x^h(t_g, k_l)$ 与 $x^v(t_g, k_l)$ 传输至状态反馈控制器, 由于零阶保持器的作用, 在两个连续的事件发生的区间 $t \in [t_g, t_{g+1})$ 与 $k \in [k_l, k_{l+1})$ 内, 控制器将沿用上一个触发时刻的状态量, 从而可以降低通信通道的拥堵和减少资源的浪费。

对于一个正定矩阵 $P \in R^{n \times n}$ 和一个标量 $\delta > 0$, 定义椭球体 $\Omega(P, \delta)$ 如下:

$$\Omega(P, \delta) = \{x(t, k) \in R^n : x(t, k)^T P x(t, k) \leq \delta\}$$

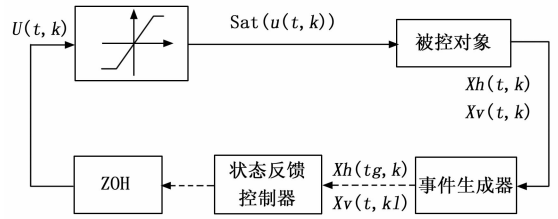


图 1 事件触发控制下的闭环系统结构图

当 $x(t, k) \in L(H_{\sigma(t, k)})$ 时, 根据引理 3 就可以得出:

$$sat(K_{\sigma(t, k)} x) \in co \left\{ (E_p K_{\sigma(t, k)} + E_p^- H_{\sigma(t, k)}) x, \right. \\ \left. p = 1, 2, \dots, 2^m \right\} \quad (9)$$

结合系统 (6) 和状态反馈控制器, 在 $t \in [t_g, t_{g+1}), k \in [k_l, k_{l+1})$ 内, 将 (9) 代入系统 (6), 由引理 3 可以得到如下系统:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^h(t, k)}{\partial t} \\ x^v(t, k+1) \end{bmatrix} = A_{\sigma(t, k)} \begin{bmatrix} x^h(t, k) \\ x^v(t, k) \end{bmatrix} + B_{\sigma(t, k)} (E_p K_{\sigma(t, k)} + E_p^- H_{\sigma(t, k)}) \cdot \begin{pmatrix} x^h(t, k) - e_1^h(t, k) \\ x^v(t, k) - e_1^v(t, k) \end{pmatrix} \quad (10)$$

本文利用状态反馈下的凸组合表示方法处理了系统方程出现执行器饱和的情况, 将系统 (6) 表示成系统 (10), 使得接下来的处理就与执行器没有发生饱和时的系统的处理方法一致。

3 主要结果

3.1 稳定性分析

在本小节中, 我们首先考虑系统 (10) 的稳定性, 以下定理给出了系统 (10) 指数稳定的一个充分条件。

定理 1: 系统 (10) 在 L_V 和 L_∞ 初始有界的条件下, 在给定正常数 $\delta_i \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq 1, a_{i,1}, a_{i,2}, b_{i,1}, b_{i,2}$ 以及 $a_{i,1} > b_{i,2}$ 和 $a_{i,2} > b_{i,1}$ 的情况下, 如果存在正定矩阵 $P_i^h \in R^n, P_i^v \in R^n, \varphi_i^h \in R^n, \varphi_i^v \in R^n$ 和矩阵 $K_{i,1}, K_{i,2}, H_{i,1}, H_{i,2}, i \in \bar{N}, p = 1, 2, \dots, 2^m$ 满足以下条件 (其中 $He(X) = X + X^T$):

$$\bar{\Omega}_{i,1} = \begin{bmatrix} \Omega_{i,11} & \Omega_{i,12} & \Xi_{i,1} & O_{i,1} \\ * & -b_{i,1} P_i^v + \delta_i \varphi_i^v & 0 & \gamma_{i,1} \\ * & * & \Gamma_{i,1} & 0 \\ * & * & * & \Gamma_{i,2} \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

$$\bar{\Omega}_{i,2} = \begin{bmatrix} D_{i,1} & 0 & N_{i,1} & 0 & L_{i,1} \\ * & M_{i,2} & 0 & (\vartheta - 1) \delta_i \varphi_i^v & L_{i,2} \\ * & * & \Gamma_{i,1} & 0 & \Delta_{i,1} \\ * & * & * & \Gamma_{i,2} & \Delta_{i,2} \\ * & * & * & * & (-P_i^v)^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

$$\Omega(P_i, 1) \subset L(H_i), i \in \bar{N} \quad (13)$$

其中:

$$H_i = (H_{i,1}, H_{i,2}),$$

$$P_i = diag\{P_i^h, P_i^v\},$$

$$\Xi_{i,1} = -P_i^h B_{i,1} (E_p K_{i,1} + E_p^- H_{i,1}) - \delta_i \varphi_i^h (1 - \vartheta),$$

$$\begin{aligned}
 N_{i,1} &= -(1 - \partial)\delta_i^h \varphi_i^h, \\
 \Gamma_{i,1} &= ((1 - \partial)\delta_i^v - 1)\varphi_i^h, \\
 \Gamma_{i,2} &= ((1 - \partial)\delta_i^v - 1)\varphi_i^v, O_{i,1} = -P_i^h B_{i,1}(E_\rho K_{i,2} + \\
 E_{\bar{\rho}} H_{i,2}), \\
 \gamma_{i,1} &= -\delta_i^v \varphi_i^v (1 - \partial), \\
 \Omega_{i,11} &= A_{i,11}^T P_i^h + P_i^h A_{i,11} + a_{i,1} P_i^h + \delta_i^h \varphi_i^h + He\{P_i^h B_{i,1}(E_\rho K_{i,1} \\
 + E_{\bar{\rho}} H_{i,1})\}, \\
 \Omega_{i,12} &= P_i^h A_{i,12} + P_i^h B_{i,1}(E_\rho K_{i,2} + E_{\bar{\rho}} H_{i,2}), \\
 D_{i,1} &= -b_{i,2} P_i^h + \delta_i^h \varphi_i^h, \\
 M_{i,2} &= -(1 - a_{i,2})P_i^v + \delta_i^v \varphi_i^v, \\
 O_{i,1} &= -P_i^h B_{i,1}(E_\rho F_i + E_{\bar{\rho}} H_i), \\
 L_{i,2} &= (A_{i,22} + B_{i,2}(E_\rho K_{i,2} + E_{\bar{\rho}} H_{i,2}))^T, \\
 L_{i,1} &= (A_{i,21} + B_{i,2}(E_\rho K_{i,1} + E_{\bar{\rho}} H_{i,1}))^T, \\
 \Delta_{i,1} &= (-B_{i,2}(E_\rho K_{i,1} + E_{\bar{\rho}} H_{i,1}))^T, \\
 \Delta_{i,2} &= (-B_{i,2}(E_\rho F_{i,2} + E_{\bar{\rho}} H_{i,2}))^T.
 \end{aligned}$$

则该系统在事件触发条件 (7) 和 (8), 切换信号 (14) 以及满足 $\max_{i \in \bar{N}} \{\lambda_{\max}\{P_i\}\} \|x\|^2 \leq 1$ 的初始状态下是指数稳定的。

$$\sigma(t, k) = \begin{cases} \arg \min_{i \in \bar{N}} \{x^h(t, k)^T P_i^h x^h(t, k) + \\ x^v(t, k)^T P_i^v x^v(t, k)\}, t = t_g, k = k_l, \\ \sigma(t_g, k_l) \quad \text{others} \end{cases} \quad (14)$$

证明: 当 $x(t, k) \in \bigcap_{i=1}^N \Omega(P_i, 1)$, 可以从式(13) 得到 $x(t, k) \in L(H_i), i \in \bar{N}$, 然后从引理 3 可以得到如下证明过程。

构造如下的 Lyapunov 函数:

$$V(t, k) = V_1(t, k) + V_2(t, k)$$

其中:

$$\begin{aligned}
 V_{i,1}(t, k) &= x^h(t, k)^T P_{\sigma(t, k)}^h x^h(t, k) \\
 V_{i,2}(t, k) &= x^v(t, k)^T P_{\sigma(t, k)}^v x^v(t, k)
 \end{aligned}$$

假设在 $t \in [t_g, t_{g+1}), k \in [k_l, k_{l+1})$ 时, 子系统 i 被激活, i. e., $\sigma(t, k) = i$ 。

当 $t \in [t_g, t_{g+1})$ 时, 对 $V_{i,1}(t, k)$ 沿着系统方程的轨迹对时间 t 进行求导可得:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(t, k) + a_{i,1} V_1(t, k) - b_{i,1} V_2(t, k) &= \\
 \frac{\partial V_1(t, k)}{\partial t} + a_{i,1} V_1(t, k) - b_{i,1} V_2(t, k) &= \\
 x^h(t, k)^T (A_{i,11}^T P_i^h + P_i^h A_{i,11} + a_1 P_i^h) x^h(t, k) + \\
 2x^h(t, k)^T (P_i^h A_{i,12} + P_i^h B_{i,1} K_{i,2}) x^v(t, k) - \\
 b_{i,1} x^v(t, k)^T P_i^v x^v(t, k) + \\
 He\{x^h(t, k)^T P_i^h B_{i,1} K_i (E_\rho F + E_{\bar{\rho}} H) (x^h(t, k) - e^h(t, k))\} + \\
 He\{x^h(t, k)^T P_i^h B_i K_i (E_\rho F + E_{\bar{\rho}} H) (x^v(t, k) - e^v(t, k))\}
 \end{aligned}$$

上述式子可以写成如下的矩阵形式:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(t, k) + a_{i,1} V_1(t, k) - b_{i,1} V_2(t, k) &= \\
 \varphi(t, k)^T \bar{\Omega}_{i,1} \varphi(t, k) \quad (15)
 \end{aligned}$$

其中:

$$\varphi(t, k) = [x^h(t, k)^T \quad x^v(t, k)^T \quad e_1^h(t, k)^T \quad e_1^v(t, k)^T]^T$$

$$\Omega_{i,1} = \begin{bmatrix} \Omega_{i,11} & \Omega_{i,12} & \Xi_{i,1} & O_{i,1} \\ * & -b_{i,1} P_i^v & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix}$$

当 $k \in [k_l, k_{l+1})$ 时, 对 $V_{i,2}(t, k)$ 沿着系统方程的轨迹对时间 k 进行求差分可得:

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{i,2}(t, k) + a_{i,2} V_{i,2}(t, k) - b_{i,2} V_{i,1}(t, k) &= \\
 V_{i,2}(t, k+1) - V_{i,2}(t, k) + a_{i,2} V_{i,2}(t, k) - b_{i,2} V_{i,1}(t, k) &= \\
 [A_{i,21}^h x^h(t, k) + A_{i,22}^v x^v(t, k)]^T P_i^v * \\
 [A_{i,21}^h x^h(t, k) + A_{i,22}^v x^v(t, k)] - b_{i,2} x^h(t, k)^T P_i^h x^h(t, k) - \\
 (1 - a_{i,2}) x^v(t, k)^T P_i^v x^v(t, k) + \\
 He\{P_i^v B_i K_i (E_j F + E_j H) (x^h(t, k) - e^h(t, k))\} + \\
 He\{P_i^v B_i K_i (E_j F + E_j H) (x^v(t, k) - e^v(t, k))\}
 \end{aligned}$$

同样的, 上述式子可以表示成如下的矩阵形式:

$$\Delta V_{i,2}(t, k) + a_{i,2} V_{i,2}(t, k) - b_{i,2} V_{i,1}(t, k) = \varphi(t, k)^T \bar{\Omega}_{i,2} \varphi(t, k) \quad (16)$$

其中:

$$\begin{aligned}
 \bar{\Omega}_{i,2} &= \begin{bmatrix} b_{i,2} P_i^h & 0 & 0 & 0 \\ * & -(1 - a_{i,2}) P_i^v & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} + \\
 &\begin{bmatrix} Q_{i,1} \\ Q_{i,2} \\ \Delta_{i,1} \\ \Delta_{i,2} \end{bmatrix} P_i^v \begin{bmatrix} Q_{i,1} \\ Q_{i,2} \\ \Delta_{i,1} \\ \Delta_{i,2} \end{bmatrix}^T
 \end{aligned}$$

加入事件触发条件之后, 我们可以得到:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_{i,1}(t, k)}{\partial t} + a_{i,1} V_{i,1}(t, k) - b_{i,1} V_{i,1}(t, k) &\leq \\
 \bar{\omega}(t, k)^T \bar{\Omega}_{i,1} \bar{\omega}(t, k) - e_1^{hT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^h e_1^h(t, k) + \\
 \delta_{\sigma(t, k)} (\partial x^{hT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^h x^h(t, k) + \\
 (1 - \partial) x^{hT}(t_g, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^h x^h(t_g, k)) - \\
 e_1^{vT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^v e_1^v(t, k) + \\
 \delta_{\sigma(t, k)} (\partial x^{vT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^v x^v(t, k) + \\
 (1 - \partial) x^{vT}(t, k_l) \varphi_{\sigma(t, k)}^v x^v(t, k_l)) = \\
 \varphi(t, k)^T \bar{\Omega}_{i,1} \varphi(t, k) \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{i,2}(t, k) + a_{i,2} V_{i,2}(t, k) - b_{i,2} V_{i,1}(t, k) &\leq \\
 \bar{\omega}(t, k)^T \bar{\Omega}_{i,2} \bar{\omega}(t, k) - e_1^{hT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^h e_1^h(t, k) + \\
 \delta_{\sigma(t, k)} (\partial x^{hT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^h x^h(t, k) + \\
 (1 - \partial) x^{hT}(t_g, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^h x^h(t_g, k)) - \\
 e_1^{vT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^v e_1^v(t, k) + \\
 \delta_{\sigma(t, k)} (\partial x^{vT}(t, k) \varphi_{\sigma(t, k)}^v x^v(t, k) + \\
 (1 - \partial) x^{vT}(t, k_l) \varphi_{\sigma(t, k)}^v x^v(t, k_l)) = \\
 \varphi(t, k)^T \bar{\Omega}_{i,2} \varphi(t, k) \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中:

$$\bar{\Omega}_{i,1} = \begin{bmatrix} \Omega_{i,11} & \Omega_{i,12} & \Xi_{i,1} & O_{i,1} \\ * & -b_{i,1} P_i^v + \partial \delta_i^v \varphi_i^v & 0 & \gamma_{i,1} \\ * & * & \Gamma_{i,1} & 0 \\ * & * & * & \Gamma_{i,2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\bar{\Omega}_{i,2} = \begin{bmatrix} D_{i,1} & 0 & N_{i,1} & 0 & L_{i,1} \\ * & M_{i,2} & 0 & (\partial - 1)\delta_i^v \varphi_i^v & L_{i,2} \\ * & * & \Gamma_{i,1} & 0 & \Delta_{i,1} \\ * & * & * & \Gamma_{i,2} & \Delta_{i,2} \\ * & * & * & * & (-\varphi_i^v)^{-1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

从式 (11) 和 (12), 我们可以得到 $\bar{\Omega}_{i,1} < 0$ 和 $\bar{\Omega}_{i,2} < 0$, 这就说明了:

$$\frac{\partial V_{i,1}(x^h)}{\partial t} \leq -a_{i,1}V_{i,1}(x^h) + b_{i,1}V_{i,2}(x^v),$$

$$\Delta V_{i,2}(x^v) \leq -a_{i,2}V_{i,2}(x^v) + b_{i,2}V_{i,1}(x^h)$$

即可通过引理 1 得到子系统在事件触发条件式 (7) 和 (8) 的前提下是指数稳定的。

如果 $\max_{i \in N} \{\lambda_{\max}\{P_i\}\} \|x\|^2 \leq 1$, 那么对于所有的子系统有 $x(t, k)^T P_i x(t, k) \leq 1$, 因此 $x(t, k)$ 从 $\max_{i \in N} \{\lambda_{\max}\{P_i\}\} \|x\|^2 \leq 1$ 开始的所有轨迹将保留在 $\bigcap_{i=1}^N \Omega(P_i, 1)$ 。根据切换信号 (14), Lyapunov 函数在切换时刻 (t_g, k_l) 不会有能量的增加, 因此通过切换系统的理论可知, 闭环系统 (10) 是指数稳定的, 证明完毕。

(13) 给出了只有在 (13) 所示的这个收敛域中, 才可以利用引理 3 对系统饱和执行器部分利用凸组合的形式进行处理。不等式 (11) 和 (12) 保证了系统 (10) 满足引理 1 中条件 (4) 与 (5), 即系统 (10) 的第 i 个子系统是指数稳定的。(14) 给出了系统切换信号满足的条件, 它表明了切换发生在能量函数的最低处, 保证了在切换时刻系统的能量函数是非增的, 从而使得整个系统的能量函数是递减的, 以保证整个切换 2-D 系统的稳定性。(14) 也表明了切换系统只发生在触发时刻, 可减少切换频率, 从而进一步减少切换发生所需要的资源。

从定理 1 的推导过程中可以看出, 不等式 (11) 和 (12) 中的 P_i^h 和 P_i^v , 控制器的增益矩阵 K_i 以及事件触发条件的参数矩阵 φ_i^h 和 φ_i^v 都是未知且需要进行求解的变量, 所以不等式 (11) 和 (12) 中有两个变量直接相乘导致其是非线性的矩阵不等式, 所以在定理 2 中需要对其进行处理化成线性矩阵不等式, 才可以利用 MATLAB 中 LMI 工具箱对其进行求解。条件 (13) 也会在下文中化成线性矩阵不等式的形式, 便于接下来的求解。

3.2 事件触发控制器的设计

上一小节给出了闭环系统的指数稳定性条件, 然而定理 1 中给出的条件都是非线性矩阵不等式, 不利于求解。在本小节中, 将定理 1 中的非线性矩阵不等式转化成容易求解的线性矩阵不等式, 并给出控制器增益矩阵 K_i 和参数矩阵 φ_i^h 和 φ_i^v 的具体求解公式。

定理 2: 系统 (7) 在 L_V 和 L_∞ 初始有界的条件下, 在给定正常数 $\delta_i \leq 1, 0 \leq \partial \leq 1, a_{i,1}, a_{i,2}, b_{i,1}, b_{i,2}$ 以及 $a_{i,1} > b_{i,2}$ 和 $a_{i,2} > b_{i,1}$ 的情况下, 如果存在适维正定矩阵 $X_i^h, X_i^v, W_i^h, W_i^v$, 以及其他适维矩阵 Y_i^h, Y_i^v , 以及 Z_i^h 和 $Z_i^v, i \in \bar{N}, p =$

$1, 2, \dots, 2^m, s = 1, 2, \dots, m$, 且满足以下条件:

$$\hat{\Omega}_{i,1} = \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_{i,11} & \hat{\Omega}_{i,12} & \hat{\Xi}_{i,1} & \hat{O}_{i,1} \\ * & -b_{i,1}X_i^v + \delta_i^v W_i^v & 0 & \hat{\gamma}_{i,1} \\ * & * & \hat{\Gamma}_{i,1} & 0 \\ * & * & * & \hat{\Gamma}_{i,2} \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

$$\hat{\Omega}_{i,2} = \begin{bmatrix} \hat{D}_{i,1} & 0 & \hat{N}_{i,1} & 0 & \hat{L}_{i,1} \\ * & \hat{M}_{i,2} & 0 & (\partial - 1)\delta_i^v W_i^v & \hat{L}_{i,2} \\ * & * & \hat{\Gamma}_{i,1} & 0 & \hat{\Delta}_{i,1} \\ * & * & * & \hat{\Gamma}_{i,2} & \hat{\Delta}_{i,2} \\ * & * & * & * & -X_i^v \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} X_i^h & 0 & Z_{i,s}^{Th} \\ * & X_i^v & Z_{i,s}^{Tv} \\ * & * & 1 \end{bmatrix} > 0 \quad (23)$$

其中:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_{i,11} &= A_{i,11}^T X_i^h + X_i^h A_{i,11} + a_{i,1} X_i^h + \delta_i^h W_i^h + He\{B_{i,1}(E_\rho Y_i^h + E_\rho^- Z_i^h)\}, \\ \hat{\Omega}_{i,12} &= A_{i,12} X_i^v + B_{i,1}(E_\rho Y_i^v + E_\rho^- Z_i^v), \\ \hat{\Xi}_{i,1} &= -B_{i,1}(E_\rho Y_i^h + E_\rho^- Z_i^h) - (1 - \partial)\delta_i^h W_i^h, \\ \hat{\Gamma}_{i,1} &= ((1 - \partial)\delta_i^h - 1)W_i^h, \hat{\Gamma}_{i,2} = ((1 - \partial)\delta_i^v - 1)W_i^v, \\ \hat{O}_{i,1} &= -B_{i,1}(E_\rho Y_i^h + E_\rho^- Z_i^h), \\ \hat{\gamma}_{i,1} &= -\delta_i^v W_i^v(1 - \partial), \\ \hat{D}_{i,1} &= -b_{i,2} X_i^h + \delta_i^h W_i^h, \\ \hat{N}_{i,1} &= -(1 - \partial)\delta_i^h W_i^h, \\ \hat{M}_{i,2} &= -(1 - a_{i,2})X_i^v + \delta_i^v W_i^v, \\ \hat{L}_{i,2} &= (A_{i,22} X_i^v + B_{i,2}(E_\rho Y_i^v + E_\rho^- Z_i^v))^T, \\ \hat{L}_{i,1} &= (A_{i,21} X_i^h + B_{i,2}(E_\rho Y_i^h + E_\rho^- Z_i^h))^T, \\ \hat{\Delta}_{i,1} &= (-B_{i,2}(E_\rho Y_i^h + E_\rho^- Z_i^h))^T, \\ \hat{\Delta}_{i,2} &= (-B_{i,2}(E_\rho Y_i^v + E_\rho^- Z_i^v))^T, \\ Z_i^{hT} &= (Z_{i,1}^{hT}, \dots, Z_{i,m}^{hT}), Z_i^{vT} = (Z_{i,1}^{vT}, \dots, Z_{i,m}^{vT}) \end{aligned}$$

那么闭环系统在事件触发条件 (7) 和 (8), 如下的切换信号:

$$\sigma(t, k) = \begin{cases} \arg \min_{i \in N} \{x^h(t, k)^T (X_i^h)^{-1} x^h(t, k) + \\ x^v(t, k)^T (X_i^v)^{-1} x^v(t, k)\}, t = t_g, k = k_l, \\ \sigma(t_g, k_l) \quad \text{others} \end{cases}$$

以及满足 $\max_{i \in N} \{\lambda_{\max}\{X_i^{-1}\}\} \|x\|^2 \leq 1$ 的初始状态下是指数稳定的, 其中 $X_i^{-1} = \text{diag}\{(X_i^h)^{-1}, (X_i^v)^{-1}\}$, 控制器增益矩阵 K_i 与参数矩阵 φ_i^h 和 φ_i^v 求解如下:

$$K_i = [Y_i^h (X_i^h)^{-1}, Y_i^v (X_i^v)^{-1}],$$

$$\varphi_i^h = X_i^h W_i^h X_i^h, \varphi_i^v = X_i^v W_i^v X_i^v$$

证明: 令 $(P_i^h)^{-1} = X_i^h, (P_i^v)^{-1} = X_i^v, W_i^h = P_i^h \varphi_i^h P_i^h, W_i^v = P_i^v \varphi_i^v P_i^v, Y_i^h = K_{i,1} X_i^h, Y_i^v = K_{i,2} X_i^v, Z_{i,1}^h = h_{i,s} \cdot X_i^h, Z_{i,1}^v = h_{i,s} \cdot X_i^v, i \in \bar{N}$ 。

在不等式 (11) 的左右两边同乘以矩阵 $\text{diag}\{X_i^h, X_i^v, X_i^h, X_i^v\}$, 就可以由不等式 (11) 得到不等式 (21), 同理也可由不等式 (12) 得到不等式 (22), 由不等式 (13) 得到

不等式 (23), 证明完毕。

本文提出了具有执行器饱和的切换 2-D 连续离散系统的事件触发控制器设计方案。与连续时间控制方案相比, 该方案能够减少通信资源浪费和执行器的损耗。尽管已有相关文献研究了 2-D 系统的事件触发控制, 但是这些文献都只是针对 2-D 离散系统, 并且未涉及执行器饱和的情况。而本文所考虑的切换 2-D 连续离散同时具有连续动态与离散动态, 还考虑了执行器饱和, 其动态行为相比于 2-D 离散系统来说更加复杂, 稳定性分析与控制器设计更加困难。为此, 本文采用凸组合技术与多 Lyapunov 函数法提出了一种用于执行器饱和的切换 2-D 连续离散系统的事件触发控制方案。该方案包含了事件触发条件、状态反馈控制器与状态依赖的切换信号的设计, 且事件触发条件更一般, 不仅能保证闭环系统的指数稳定性, 还能进一步减少数据传输次数与切换频率。

在 3.2 节这一部分中, 主要解决的就是对于定理 1 中所给出的矩阵不等式 (11)、(12) 和 (13) 进行处理从而得到便于求解的线性矩阵不等式来进行仿真验证。对于矩阵不等式 (11)、(12) 来说, 直接对其利用 MATLAB 软件中 LMI 工具箱进行求解是不可行的, 可以从 (11)、(12) 明显地看出, 其中具有两个变量的直接相乘或者是变量的逆矩阵存在, 这就导致了该矩阵是非线性的, 所以这一部分的处理是在矩阵 (11) 左右两边同时乘上一对角阵 $\text{diag}\{X_i^h, X_i^v, X_i^h, X_i^v\}$, 在矩阵 (12) 的左右两边同时乘上对角矩阵 $\text{diag}\{X_i^h, X_i^v, X_i^h, X_i^v, I\}$, 经过这样的同乘变换之后, 可以使其中的参数矩阵 φ_i^h, φ_i^v 变成矩阵 W_i^h 和 W_i^v , 控制器增益 K_i 变成可以直接进行求解的矩阵 Y_i 。对于定理 1 中给出的条件 (13) 来说, 需要对其先用 Schur 补引理进行变换成一个矩阵不等式之后, 在对其用上述的线性化处理转化成一个可以求解的线性矩阵不等式。

按照上述处理之后才可以在接下来的仿真验证中利用 MATLAB 软件中的 LMI 工具箱或 feasp 求解器对定理 2 中的 3 个线性矩阵不等式进行求解判断。对于一个给定的切换 2-D 连续离散系统, 通过求解定理 2 中的线性矩阵不等式的可行解 X_i^h, X_i^v, Y_i, W_i^h 和 W_i^v , 从而求出控制器增益矩阵 K_i 与参数矩阵 φ_i^h 和 φ_i^v 。具体的计算步骤如下:

步骤 1: 给定系统参数矩阵和参数 $\delta_i, \partial, a_{i,1}, a_{i,2}, b_{i,1}, b_{i,2}$ 。

步骤 2: 求解线性矩阵不等式 (21) ~ (23), 得到可行解 $X_i^h, X_i^v, W_i^h, W_i^v, Y_i, Z_i^h$ 和 $Z_i^v, i \in \bar{N}$ 。

步骤 3: 求解控制器增益矩阵 K_i 与参数矩阵 φ_i^h 和 φ_i^v 。

4 仿真算例

为了验证本文所设计的控制方案的有效性, 本节将给出一个 Darboux 方程的仿真算例。

Darboux 方程可以描述气体吸收、水蒸汽加热和空气干燥的一些线性过程。该方程描述如下^[25]:

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x \partial t} = c_{1,\sigma(x,t)} \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} + c_{2,\sigma(x,t)} \frac{\partial s(x,t)}{\partial x} +$$

$$c_{0,\sigma(x,t)} s(x,t) + d_{\sigma(x,t)} f(x,t)$$

其中: $s(x,t)$ 是空间 $x \in [0, x_f]$ 和时间 $t \in [0, \infty)$ 处的未知函数, $u(x,t)$ 是给定的输入函数, $\sigma(t,k)$ 表示的是 $\{1, 2\}$ 中取值的在切换信号, $c_{0,i}, c_{1,i}, c_{2,i}$ 和 d_i 是实系数, 其中 $i = 1, 2$ 。

定义:

$$r(x,t) = \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} - c_2 s(x,t)$$

令

$$x^h(t,k) = s(k,t) = s(k\Delta x, t),$$

$$x^v(t,k) = r(k,t) = r(k\Delta x, t),$$

$$u(t,k) = f(k,t) = f(k\Delta x, t),$$

$$\frac{\partial r(x,t)}{\partial x} \approx \frac{r(k+1,t) - r(k,t)}{\Delta x},$$

$$\sigma(t,k) = \sigma(k\Delta x, t)$$

需要注意的是, 在文献 [25] 中, 是对 Darboux 方程经过处理之后, 将两个状态变量 r 和 s 均离散化处理之后得到的一个 2-D 离散系统方程, 本文借鉴了文献 [25] 的处理方法并加以变化, 继而通过上述的处理可以将 Darboux 方程其中的关于 x 方向上的变量离散化处理, 另外一个关于 t 方向上的变量依旧保留为连续的变量, 这样处理就可以得到一个由 Darboux 方程转变而来的切换 2-D 连续离散系统的方程。将 Darboux 方程中的元素定义成所需要的形式, 并考虑上述系统中会出现执行器饱和的情况, 则可将其写成系统 (6) 的形式, 其中:

$$A_{\sigma(t,k)} = \begin{bmatrix} c_{2,\sigma(t,k)} & 1 \\ q_{\sigma(t,k)} & 1 + c_{1,\sigma(t,k)} \Delta x \end{bmatrix},$$

$$q_{\sigma(t,k)} = (c_{1,\sigma(t,k)} c_{2,\sigma(t,k)} + c_{0,\sigma(t,k)}) \Delta x,$$

$$B_{\sigma(t,k)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta x d_{\sigma(t,k)} \end{bmatrix}$$

得到系统所需要的参数矩阵之后, 通过对于其中的变量进行赋值, 就可以得到仿真所需要的数值矩阵。

需要注意的是, 文献 [25] 也研究了 Darboux 方程, 但该文献没有考虑实际中存在切换以及执行器饱和的情况。而在本文中, 不仅考虑了执行器饱和的情况, 还考虑了切换现象的存在, 因此文献 [25] 所提出的控制器设计方案无法直接用于本文所研究的系统。为此, 将利用本文所提出的控制器设计方法进行控制器设计。

Darboux 方程系统参数设为:

$$c_{0,1} = 0.5, c_{0,2} = 0.5, c_{1,1} = 0.3,$$

$$c_{1,2} = 0.2, c_{2,1} = -0.6, c_{2,2} = -0.61,$$

$$d_1 = d_2 = 0.05, \Delta x = 0.5 (N = 2)$$

从而可以得出系统矩阵如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.6 & 1 \\ 0.16 & 1.15 \end{bmatrix}, B_1 = [0 \quad 0.05]^T,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.61 & 1 \\ 0.1587 & 1.15 \end{bmatrix}, B_2 = [0 \quad 0.05]^T$$

本次仿真实验的控制目标是设计事件触发条件 (7) 和

(8), 控制器 $u(t, k)$ 与切换信号 $\sigma(t, k)$, 使得闭环系统的状态是指数收敛的。

选取如下的设计参数:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= a_{1,2} = 0.25, a_{2,1} = a_{2,2} = 0.47, \\ b_{1,1} &= b_{1,2} = 0.16, b_{2,1} = b_{2,2} = 0.14, \\ \delta_1^h &= \delta_2^h = 0.025, \delta_1^v = \delta_2^v = 0.025, \\ \varrho &= 0.51 \end{aligned}$$

求解定理 2 中的线性矩阵不等式, 可以得到可行解如下所示:

$$\begin{aligned} X_1^h &= 0.016\ 9, X_2^h = 0.017\ 2, \\ X_1^v &= 0.001\ 8, X_2^v = 0.001\ 8, \\ Y_1^h &= -0.024\ 6, Y_2^h = -0.026\ 5, \\ Y_1^v &= -0.041\ 2, Y_2^v = -0.040\ 3, \\ W_1^h &= 0.002\ 0, W_2^h = 0.002\ 2, \\ W_1^v &= 0.038\ 0, W_2^v = 0.031\ 2 \end{aligned}$$

进而可以得到:

$$\begin{aligned} \phi_1^h &= 6.846\ 2, \phi_1^v = 1.153\ 5 \times 10^4, \\ \phi_2^h &= 7.509\ 4, \phi_2^v = 9.817\ 0 \times 10^3, \\ K_1^h &= -1.456\ 7, K_1^v = -22.714\ 9, \\ K_2^h &= -1.534\ 3, K_2^v = -22.604\ 0 \end{aligned}$$

系统初始状态取为 $x^h(0, k) = 0.6, k = 1, 2, x^h(0, k) = 0, k \geq 3, x^v(t, 0) = 0.24, t \leq 0.1, x^v(t, 0) = 0, t > 0.1$, 图 2 与图 3 分别给出了闭环系统水平状态和垂直状态的轨迹图。从图中可以看出, 所考虑系统的水平状态和垂直状态均可以收敛到零。图 4 和图 5 给出了系统控制输入和切换信号的演化曲线。图 6 给出了系统的事件触发序列和事件触发次数。从图中可以看出闭环系统只发生了 748 次触发, 说明信号只传输了 748 次, 并且切换信号都是发生在触发时刻上, 可以避免切换次数的频繁发生。控制输入的幅值也都没有超过最大值 1。仿真结果可以表明, 本文所提出的事件触发控制方案在执行器存在饱和情况下, 不仅能够很好的保证闭环系统的稳定性, 还能有效地利用系统的通信资源, 从而避免不必要的浪费。从而表明本文所提出的控制设计方案的可行性与有效性。

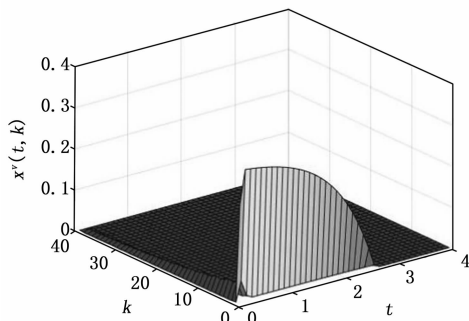


图 3 $\varrho = 0.51$ 时状态 $x^v(t, k)$ 的轨迹

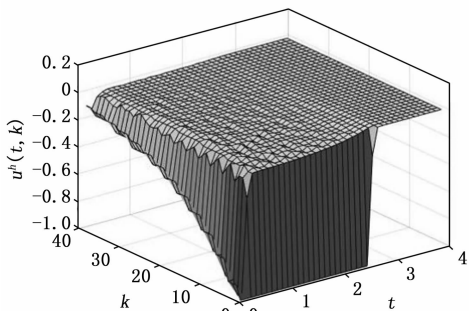


图 4 控制输入 $u^h(t, k)$ 的演化曲线

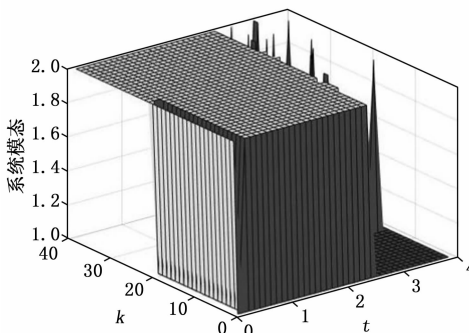


图 5 切换信号

触发次数: 748

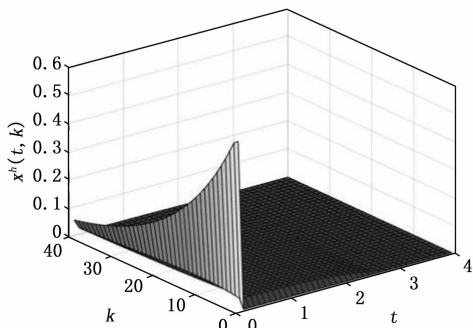


图 2 $\varrho = 0.51$ 时状态 $x^h(t, k)$ 的轨迹

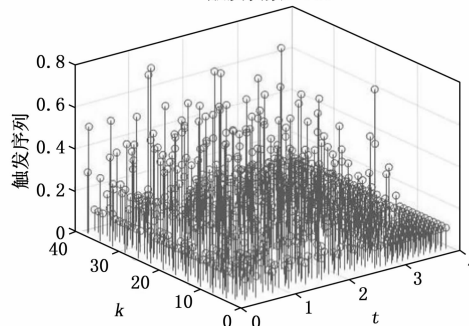


图 6 $\varrho = 0.51$ 时的事件触发序列和事件触发次数

此外, 我们还研究了参数 ϱ 的不同取值对于该算例的可行解的影响。通过仿真求解, 我们得知只有当 $\varrho \geq 0.51$ 时系统才有可行解, 可见 ϱ 的取值对于该系统的可行解有

比较大的影响。表 1 给出了 ϱ 取不同值时与触发次数之间的关系。图 7 和图 8 给出了 $\varrho = 1$ 时闭环系统水平状态和垂直状态的轨迹图, 可以看出和 $\varrho = 0.51$ 时系统的状态轨迹图差别不大。图 9 给出了 $\varrho = 1$ 时系统的事件触发序列和事件触发次数。从表 1、图 6 与图 9 可以看出, $\varrho = 0.51$

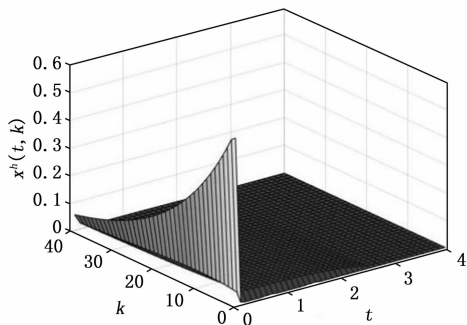


图 7 $\vartheta = 1$ 时状态 $x^h(t, k)$ 的轨迹

时的触发次数是最少的，当 ϑ 越来越大，触发次数逐渐变多。特别的，当 $\vartheta = 1$ 时，也就是本文所提出的事件触发条件 (7) 和 (8) 就退化成文献 [24] 中所给出的事件触发条件时，触发次数是最多，可见本文所提出的事件触发控制的效果是优于文献 [24] 中所提出的事件触发控制的，在保证相近的系统性能时，可以进一步减少事件触发的次数，从而进一步减少通信通道的冗余和降低执行器的损耗，由此说明了本文所提方法的优越性。

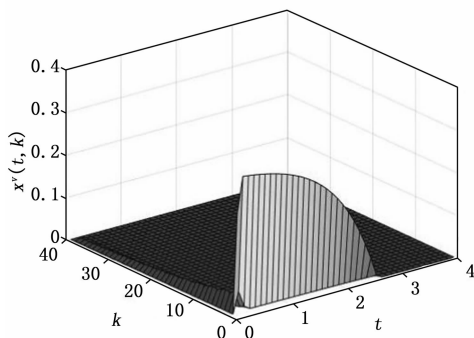


图 8 $\vartheta = 1$ 时状态 $x^v(t, k)$ 的轨迹

触发次数: 982

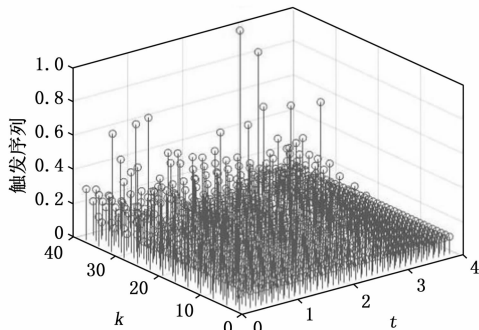


图 9 $\vartheta = 1$ 时的事件触发序列和事件触发次数

表 1 ϑ 的取值与触发次数之间的关系

ϑ 的取值	0.51	0.6	0.7	0.8	0.9	1
触发次数	748	762	813	851	944	982

5 结束语

本文针对具有执行器饱和的切换 2-D 连续离散系统，提出了一种事件触发控制方案。利用凸组合技术将饱和非

线性表示成一组凸包的线性组合，采用多 Lyapunov 函数法设计了一种考虑到系统饱和和特性的事件触发机制和与之相关的状态依赖切换信号以及状态反馈控制器，并以线性矩阵不等式的形式给出了控制器增益矩阵和事件触发参数矩阵存在的充分条件。本文所提出的控制方案在保证闭环系统指数稳定的同时，可进一步减少通信资源浪费和执行器的损耗。最后通过一个仿真算例验证了本文所提出的控制方案的有效性与其优越性。在未来的工作中，将重点研究具有执行器饱和的切换 2-D 连续离散系统的事件触发动态输出反馈控制问题，以及该系统存在传输时延或网络攻击的事件触发控制设计问题。

参考文献:

- [1] BOUDELLIOUA M. A canonical matrix representation of 2-D linear discrete systems [J]. Journal of King Abdulaziz University-Engineering Sciences, 1999, 11 (2): 81 - 89.
- [2] SMYTH K J. Computer aided analysis for linear repetitive processes [J]. University of Strathclyde, 1992: 14 - 15.
- [3] FORNASINI E, VALCHER M E. Recent developments in 2-D positive system theory [J]. Applied Mathematics and Computer Science, 1997, 7 (4): 713 - 735.
- [4] LI Y, CANTONI M, WEYER E. On water-level error propagation in controlled irrigation channels [C] // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2006: 2101 - 2106.
- [5] LI G, WEI X. Weighted H_∞ model reduction for linear switched systems with time-varying delay [J]. Automatica, 2008, 45 (1): 186 - 193.
- [6] XIANG Z, HUANG S. Stability analysis and stabilization of discrete-time 2-D switched systems [J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2013, 32 (1): 401 - 414.
- [7] HUANG S, XIANG Z. Stability analysis of two-dimensional switched non-linear continuous-time systems [J]. IET Control Theory and Applications, 2016, 10 (6): 724 - 729.
- [8] FAN Y, WANG M, FU H et al. Quasi-time-dependent H_∞ filtering of discrete-time 2-D switched systems with mode-dependent persistent dwell-time [J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2021, 40 (12): 5886 - 5912.
- [9] WANG J, LIANG J, QIU J. Asynchronous l_1 control for 2-D switched positive systems with parametric uncertainties and impulses [J]. 2020, 37: 100887.
- [10] TIAN D, LIU S, WANG W. Global exponential stability of 2-D switched positive nonlinear systems described by the Roesser model [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29 (7): 2272 - 2282.
- [11] GHOUS I, XIANG Z, Karimi H R. State feedback H_∞ control for 2-D switched delay systems with actuator saturation in the second FM model [J], Circuits, Systems, and Signal Processing, 2015, 34 (7): 2167 - 2192.
- [12] GHOUS I, XIANG Z. H_∞ stabilization of 2-D discrete switched delayed systems represented by the Roesser model

- subject to actuator saturation [J], Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2015, 37 (10): 1242 - 1253.
- [13] GAO J, WANG W. H_∞ control for 2-D fuzzy FMII system with actuator saturation [C] // Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference, 2014, 4435 - 4439.
- [14] PENG D, ZHANG T, YANG H. Stabilization for two-dimensional delta operator systems with time-varying delays and actuator saturation [J]. Advances in Difference Equations, 2018, 2018 (1): 1 - 19.
- [15] 高永峰. 非线性控制系统的事件触发机制设计 [D]. 大连: 大连理工大学, 2017.
- [16] WANG J, DU X, DING D. Event-triggered control of two-dimensional discrete-time systems in Roesser model [C] // Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference, 2014, 5851 - 5856.
- [17] YANG R, LI L. Observer-based finite-region dissipative control for 2-D continuous-discrete systems over networks [J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357 (16): 11974 - 11995.
- [18] LI L, YANG R, FENG Z et al. Event-triggered dissipative control for 2-D switched systems [J]. Information Sciences, 2022, 589: 802 - 812.
- ***
(上接第 111 页)
- [8] 徐 岩, 刘婧妍, 张诗杭, 等. 基于遗传算法的直流配电网线路故障定位方法 [J]. 太阳能学报, 2020, 41 (12): 1 - 8.
- [9] 王 辉, 陈佳宁, 金 雪, 等. 基于 ReliefF 的时频联合特征及随机森林的配电网电缆故障识别方法 [J]. 南京师范大学学报 (工程技术版), 2020, 20 (2): 50 - 57.
- [10] 刘炳南, 黄沂平, 方国标. 基于一维卷积神经网络的配电网高阻接地故障识别 [J]. 电器与能效管理技术, 2020, 594 (9): 107 - 111.
- [11] 李 伦, 李棕让, 曹兴华, 等. 基于精英蜂群算法的配电网故障恢复方法 [J]. 青岛大学学报 (工程技术版), 2020, 35 (4): 23 - 28, 42.
- [12] 陶维青, 肖松庆, 李 林, 等. 基于双精英蚁群算法的配电网故障区段定位 [J]. 合肥工业大学学报 (自然科学版), 2020, 43 (12): 48 - 54.
- [13] 韩 俊, 谢珍建, 黄 河, 等. 基于停电损失计算与成本分析的配电网单元制供电网格可靠性规划 [J]. 陕西电力, 2020, 48 (1): 63 - 68, 117.
- [14] 李 宇, 杨柳林. 基于卷积神经网络的配电网单相接地故障识别 [J]. 电气工程学报, 2020, 15 (3): 33 - 41.
- [15] 郭壮志, 陈 涛, 徐其兴, 等. 配电网故障区段定位的互补松弛约束新模型与算法 [J]. 电力自动化设备, 2020, 40 (5): 129 - 136.
- [16] 方 鑫, 殷 俊, 蒋 苏等. 基于等距 K-means 和 apriori 算法的配电网故障规律挖掘方法 [J]. 智慧电力, 2020, 48 (10): 105 - 110, 131.
- [17] 张 顺, 文承毅, 何礼鹏, 等. 一种基于典型接线模式的城市复杂中压配电网的可靠性评估算法 [J]. 四川电力技术, 2020, 43 (4): 23 - 26, 86.
- [18] KNAPP A, NEBEL L J, NITSCHKE M, et al. Controlling [19] YANG R, YU Y. Event-triggered control of discrete-time 2-D switched Fornasini-Marchesini systems [J]. European Journal of Control, 2019, 48: 42 - 51.
- [20] KNORN S, MIDDLETON R H. Two-dimension analysis of string stability of nonlinear vehicle strings, in: 52nd IEEE Conference on Decision and Control, 2013, 5864 - 5869.
- [21] KNORN S, MIDDLETON R H. Asymptotic and exponential stability of nonlinear two-dimensional continuous-discrete Roesser models [J]. Systems & Control Letters, 2016, 93: 35 - 42.
- [22] BOYD S, GHAOUI L, FERON E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory [J], Studies in Applied and Numerical Mathematics, 1994, 86 (12): 2473 - 2474.
- [23] HU T, LIN Z. Control systems with actuator saturation: analysis and design [M]. Germany: Springer Science Business Media, 2001: 9 - 10.
- [24] YANG R, ZHENG W, YU Y. Event-triggered sliding mode control of discrete-time two-dimensional systems in Roesser model. Automatica (Oxford), 2020, 114: 108813.
- [25] KACZOREK T. Two-dimensional linear system [M]. Berlin: Springer, 1985.
- ***
line defects in wrinkling: a pathway towards hierarchical wrinkling structures [J]. Soft Matter, 2021, 17 (21): 5384 - 5392.
- [19] FAHIM S R, SARKER S K, MUYEEN S M, et al. A deep learning based intelligent approach in detection and classification of transmission line faults [J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2021, 133 (12): 1 - 11.
- [20] RAI P, LONDHE N D, RAJ R. Fault classification in power system distribution network integrated with distributed generators using CNN [J]. Electric Power Systems Research, 2021, 192 (3): 1 - 9.
- [21] WANG J, ZHANG Y. Traveling wave propagation characteristic-based lcc-mmc hybrid hvdc transmission line fault location method [J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2021, 37 (1): 208 - 218.
- [22] GHASHGHAEI S, AKHBARI M. Fault detection and classification of an HVDC transmission line using a heterogenous multi-machine learning algorithm [J]. IET Generation, Transmission & Distribution, 2021, 15 (16): 2319 - 2332.
- [23] SABER A, ZEINELDIN H H, EL-FOULY T H M, et al. A new fault location scheme for parallel transmission lines using one-terminal data [J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2022, 135 (2): 1 - 8.
- [24] YE D, XIE F, HAO Z. A novel identification scheme of lightning disturbance in HVDC transmission lines based on CEEMD-HHT [J]. CPSS Transactions on Power Electronics and Applications, 2021, 6 (2): 145 - 154.
- [25] ZHAO Z, QI H, QI Y, et al. Detection method based on automatic visual shape clustering for pin-missing defect in transmission lines [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2020, 69 (9): 6080 - 6091.