

自主车辆队列控制系统的稳定性分析

朱 旭, 魏 婧, 岳忠亮

(长安大学 电子与控制工程学院, 西安 710064)

摘要: 车辆队列控制可提升交通容量与安全性、降低燃油消耗, 但车辆通信过程中时延不可避免; 为此, 针对含通信时延的车辆队列系统, 开展内部稳定性和队列稳定性分析研究; 首先, 利用矩阵相似变换, 将高维车辆队列闭环控制系统降维拆分为若干等价的低维子系统, 极大地降低了内部稳定性分析的解析难度和运算量; 在此基础上, 利用直接法求解了车辆队列子系统特征方程的临界虚根, 从而推导了准确的时延边界, 获得了车辆队列系统内部稳定的充要条件; 然后, 为了保证干扰沿车辆队列向后传播时不扩散, 通过频域分析车辆间误差传递函数, 给出了系统的队列稳定性条件, 以及时延和控制器参数的指导原则; 最后, 通过仿真验证了所提稳定性分析方法的有效性。

关键词: 车辆队列; 通信时延; 内部稳定; 队列稳定; 直接法; 时延边界

Stability Analysis of Autonomous Vehicle Platoon Control System

ZHU Xu, WEI Jing, YUE Zhongliang

(School of Electronic and Control Engineering, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: Vehicle platoon controls can increase traffic capacity and safety and reduce fuel consumption, but time delay is inevitable in the process of vehicle communication. Therefore, aimed at the system of communication delay vehicle platoon, the internal stability and platoon stability are studied. Firstly, the closed-loop control system of high-dimensional vehicle platoon is divided into several equivalent low-dimensional subsystems by the matrix similarity transformation, which greatly reduces the analytical difficulty and computational complexity of internal stability analysis. On this basis, the direct method is used to solve the critical virtual root of the vehicle platoon subsystems, so the accurate delay boundary is deduced accordingly, and the sufficient and necessary condition for the internal stability of the system is obtained. Then, in order to ensure the disturbance is not amplified in the process of propagation along the vehicle platoon, the platoon stability condition of the vehicle platoon system is given by analyzing the error transfer function along the vehicles, and the guiding principle of delay and controller parameter are given. Finally, the effectiveness of the proposed stability analysis method is verified by the simulation.

Keywords: vehicle platoon; communication delay; internal stability; platoon stability; direct method; delay boundary

0 引言

自主车辆队列控制是智能交通领域的研究热点, 利用车—车通信 (V2V, vehicle to vehicle)、车—基础设施通信 (V2I, vehicle to infrastructure) 等方式进行信息交互, 进而通过车辆间的协作控制实现队列行驶, 可以提高道路容量, 降低燃油消耗, 增强行车安全性^[1-3]。

车辆队列控制主要分为两类: 自适应巡航控制 (ACC, adaptive cruise control) 和协作自适应巡航控制 (CACC, cooperative adaptive cruise control); ACC 通过车载雷达等传感器测量与相邻车的相对距离与速度, 但难以获取相邻车的加速度; CACC 则利用车—车通信、车—基础设施通信等获取他车 (包括但不限于相邻车辆) 的状态信息, 可

以有效利用他车的加速度信息, 实现更好的车辆队列控制效果^[4-5]。

由于网络通信环境和通信带宽的限制, 车辆队列通信过程中往往存在通信时延^[6]。通信时延会导致车辆队列系统稳定裕度急剧下降, 甚至引发系统不稳定^[7-9]。因此, 含时延的车辆队列系统稳定性分析成了目前的研究热点。Li 等^[10]设计了一种含时延的车辆队列控制器, 分析了时延对系统暂态和稳态性能的影响。Oliveir 等^[11]针对含通信时延的车辆队列, 提出了一种可补偿时延并抑制稳态误差的控制方法。Khalifa 等^[12]考虑通信时延, 设计了基于观测器的车辆队列控制方法。

车辆队列系统稳定性包括内部稳定性和队列稳定性,

收稿日期: 2022-07-01; 修回日期: 2022-08-02。

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62003054); 陕西省重点研发计划项目 (2020GY113); 中央高校基本科研业务费资助项目 (300102320109); 大学生创新创业计划项目 (1516270788540502016)。

作者简介: 朱 旭 (1987-), 男, 山东烟台人, 副教授, 主要从事智能网联车辆队列控制方向的研究。

通讯作者: 魏 婧 (1998-), 女, 陕西宝鸡人, 硕士研究生, 主要从事智能网联车辆队列控制方向的研究。

引用格式: 朱 旭, 魏 婧, 岳忠亮. 自主车辆队列控制系统的稳定性分析[J]. 计算机测量与控制, 2023, 31(2): 122-128.

当且仅当其闭环系统的所有特征根实部均为负数时,内部稳定^[13]。而时延影响下的内部稳定性分析,无法通过求解系统特征方程的全部根实现;原因在于,其特征方程为超越方程,有无穷多个特征根。再者,队列稳定性是指,干扰不会沿车辆队列向后扩散^[13]。研究表明,时延会削弱队列稳定性,并压制控制参数的可调范围^[14]。Ploeg等^[15]针对存在不确定通信时延的车辆队列,设计了一种鲁棒控制器,并对内部稳定性与队列稳定性进行了分析。Liu等^[16]考虑输入时延的影响,设计了一种含时延的车辆队列控制器,并分析了队列稳定性条件。Guo等^[17]针对通信中断和时延影响下的异构车辆队列,提出了一种基于滑模控制的CACC与ACC切换控制策略,以保证系统稳态性能和队列稳定性。

目前含时延的车辆队列系统稳定性研究主要分为两类:时域方法(Lyapunov-Krasovskii法^[18]和Lyapunov-Razumikhin法^[19]等)和频域方法(奈奎斯特判据^[20]、Rekasius代换法^[21]、直接法^[22]、域分解法^[23]等)。时域方法具有保守性,无法获取精确的时延边界^[24]。Fiengo等^[25]考虑时变通信时延下的车辆队列控制问题,利用Lyapunov-Krasovskii方法分析了系统的渐近稳定性。频域方法可以获取精确的时延边界,得到系统稳定的充要条件。Li等^[26]考虑通信时延,设计了一种异构车辆队列控制方法,并给出了系统稳定时的时延边界。其中,时延域(τ)分解法按照系统不稳定根数量对时延参数空间进行划分。直接法是 τ 分解法的一种实现手段,利用时延系统特征根的共轭对称性,迭代消去了超越方程中的指数项,将原来的超越方程用多项式的方式等价表示,从而求解出原系统的临界虚根^[27]。

鉴于此,本文考虑CACC情况下的前车—领航车跟随式(PLF, predecessor-leader following)通信拓扑,针对含有通信时延的车辆队列系统,进行内部稳定性分析和队列稳定性分析,主要贡献包括:

1) 针对含通信时延的车辆队列系统,给出了内部稳定的充要条件,以及求解准确的稳定性时延边界的方法。具体地,利用矩阵相似变换,将高维车辆队列闭环控制系统降维拆分为若干等价的低维子系统,极大地降低了稳定性分析的解析难度和运算量;并在此基础上,利用直接法求解了车辆队列子系统的临界虚根。

2) 通过频域分析车间误差传递函数,给出了含通信时延的车辆队列系统的队列稳定性条件,以及时延和控制器参数的指导原则。

1 问题描述

1.1 车辆的纵向动力学模型

考虑由1辆领航车(编号记为0)和 N 辆跟随车(编号记为1~ N)组成的车辆队列。车辆队列沿直线行驶,第 i 辆车的纵向动力学模型为:

$$\begin{cases} \dot{p}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = a_i(t) \\ T\dot{a}_i(t) + a_i(t) = u_i(t) \end{cases}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, N\} \quad (1)$$

其中: $p_i(t)$ 、 $v_i(t)$ 、 $a_i(t)$ 分别为第 i 辆车的位置、速度、加速度, T 为车辆动力系统的时延常数, $u_i(t)$ 为控制输入。令 $x_i(t) = [p_i(t), v_i(t), a_i(t)]^T$,则第 i 辆车的纵向动力学模型可以写为状态空间表达式:

$$\dot{x}_i(t) = \mathbf{A}x_i(t) + \mathbf{B}u_i(t) \quad (2)$$

其中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{T} \end{bmatrix}$$

考虑同构自主车辆队列,即所有车辆模型的惯性常数 T 相等,所有车辆的状态矩阵 $\mathbf{A}$ 与输入矩阵 $\mathbf{B}$ 相等。

1.2 车辆队列的通信拓扑

车辆队列的通信拓扑采用CACC中的一种常用拓扑—PLF拓扑,如图1所示。在PLF拓扑中,车辆可以利用激光雷达等传感器感知相邻车辆和领航车的位置、速度信息,并通过V2V和V2I通信获取相邻车辆和领航车的加速度信息。

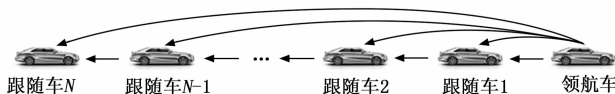


图1 前车—领航车跟随式(PLF)拓扑

将每辆车视作节点,车辆间的信息流拓扑结构可以用有向图 $\mathcal{G} = \{v, \epsilon\}$ 来表示,其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 为节点的集合(所有跟随车的集合), $\epsilon = \{v_i, v_j\} \in V \times V: v_i \leftarrow v_j$ 表示边的集合, v_i 为第 i 辆跟随车,每条边代表两辆跟随车之间的信息传递。由于领航车的存在,所以考虑用增广有向图 $\tilde{\mathcal{G}} = \{\tilde{V}, \tilde{\epsilon}\}$ 来描述领航车与跟随车之间的信息传递,其中 $\tilde{V} = \{v_0, v_1, \dots, v_N\}$ 代表领航车与跟随车的节点集合, $\tilde{\epsilon} = \{(v_i, v_j) \in \tilde{V} \times \tilde{V}: v_i \leftarrow v_j\}$ 为边的集合,包含领航车与跟随车之间的信息传递。PLF拓扑下增广有向图所描述的车辆间的信息传递形式,可用以下邻接矩阵矩阵表示:

$$\mathbf{A}_N = [a_{ij}]_{N \times N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中: $a_{ij} = 1$ 表示第 i 辆车可以接收到第 j 辆车的状态信息;否则, $a_{ij} = 0$ 。入度矩阵 $\mathbf{D} = \text{diag}\{deg_1, deg_2, \dots, deg_N\}$, $deg_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ 。牵引矩阵用来描述跟随车与领航车之间的通信关系,定义为 $\mathbf{P} = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$,PLF拓扑时所有跟随车均可以接收到领航车的信息, $p_i = 1, i = 2, 3, \dots, N$ 。扩展拉普拉斯矩阵定义为 $\mathcal{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A} + \mathbf{P}$,对于PLF拓扑, $\mathcal{L}$ 的特征值为 $\lambda_i = 2, i = 1, 2, 3, \dots, N-1$, $\lambda_N = 1$ 。

1.3 分布式控制器

车辆队列的间距策略采用固定间距策略,以增加道路容量^[28]。相应的车辆队列控制目标为:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} \|p_i(t) - p_0(t) + i \times d_0\| = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \|v_i(t) - v_0(t)\| = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \|a_i(t) - a_0(t)\| = 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\|\cdot\|$ 表示取二范数, d_0 为相邻两车的期望车间距。

定义第 i 辆车的误差状态量为 $\bar{x}_i = [\bar{p}_i, \bar{v}_i, \bar{a}_i]^T$, 其中 $\bar{p}_i = p_i - p_0 + i \times d_0$, $\bar{v}_i = v_i - v_0$, $\bar{a}_i = a_i - a_0$ 。考虑通过 V2V 和 V2I 通信获取相邻车辆和领航车的加速度信息时存在通信时延, 设计第 i 辆车的分布式控制器为:

$$u_i(t) = -\mathbf{K}_1 \sum_{j=0}^N a_{ij} [\bar{x}_i(t) - \bar{x}_j(t)] - \mathbf{K}_2 \sum_{j=0}^N a_{ij} [\bar{x}_i(t-\tau) - \bar{x}_j(t-\tau)] \quad (4)$$

其中: $\mathbf{K}_1 = [k_p, k_v, 0]$, $\mathbf{K}_2 = [0, 0, k_a]$; $k_p > 0$, $k_v > 0$, $k_a > 0$ 分别为车辆分布式控制器的位置、速度、加速度控制增益。

1.4 车辆队列的闭环动力学模型

将式 (4) 代入式 (2) 中, 得状态空间表达式为:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\mathbf{X}(t) - [\mathcal{L} \otimes (\mathbf{B}\mathbf{K}_1)]\mathbf{X}(t) - [\mathcal{L} \otimes (\mathbf{B}\mathbf{K}_2)]\mathbf{X}(t-\tau) \quad (5)$$

定义车辆队列的状态误差向量 $\mathbf{X} = [\bar{x}_1^T, \bar{x}_2^T, \dots, \bar{x}_N^T]^T$, 则车辆队列系统的闭环形式为:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_i(t) &= \mathbf{A}\bar{x}_i(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}_1 \sum_{j=0}^N a_{ij} [\bar{x}_i(t) - \bar{x}_j(t)] - \\ &\quad \mathbf{B}\mathbf{K}_2 \sum_{j=0}^N a_{ij} [\bar{x}_i(t-\tau) - \bar{x}_j(t-\tau)] \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $\mathbf{I}_N$ 表示 N 维单位阵, $\otimes$ 表示 Kronecker 积。至此, 建立了基于比例-时延控制器 (4) 的车辆队列控制系统 (6)。

整个车辆队列闭环控制系统 (6) 的特征方程为:

$$CE(s, \tau) = \det(s\mathbf{I}_{3N} - \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} + [\mathcal{L} \otimes (\mathbf{B}\mathbf{K}_1)] + [\mathcal{L} \otimes (\mathbf{B}\mathbf{K}_2)]e^{-s\tau}) \quad (7)$$

其中: $\mathbf{I}_{3N}$ 为 $3N$ 阶单位阵。

值得注意的是, 该车辆队列控制系统是一个 $3N$ 阶的准多项式, 不展开其具体表达式, 只对其特征加以描述。该特征方程包含指数项 $e^{-s\tau}$, 因此该闭环控制系统的稳定性分析问题属于 NP 难问题。随着车辆队列中车辆数目的增加, 车辆队列系统的特征方程将变为一个高阶问题, 对其特征方程进行稳定性分析将变得更加困难。为此, 需将整个自主车辆队列控制闭环系统分解为多个子系统, 降低系统阶次, 避免高阶方程求解问题。接下来, 使用克罗内克积的相关性质将车辆队列控制系统解耦为若干子系统, 分析所有子系统的稳定性与分析原车辆队列系统的稳定性等价。

由代数图论相关定义可知, $\mathcal{L}$ 为实数矩阵。定义对角矩

阵 $\mathbf{A}$, 非奇异变换矩阵 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 满足如下相似变换: $\mathbf{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\} = \mathbf{R}^{-1} \mathcal{L} \mathbf{R}$, 令 $\xi(t) = [\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_N^T]^T \in \mathbb{R}^{3N \times 1}$ 且 $\xi_i \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, 满足 $\xi(t) = (\mathbf{R}^{-1} \otimes \mathbf{I}_3)\mathbf{X}(t)$, 则式 (6) 可表示为:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\xi(t) - [\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B}\mathbf{K}_1)]\xi(t) - \\ &\quad [\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B}\mathbf{K}_2)]\xi(t-\tau) \end{aligned} \quad (8)$$

由于 $\mathbf{I}_N$ 和 $\mathbf{A}$ 都是对角矩阵, 所以系统状态方程 (8) 可“分解”为若干个低阶子系统:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i(t) &= \mathbf{A}\xi_i(t) - \lambda_i \mathbf{B}\mathbf{K}_1 \xi_i(t) - \\ &\quad \lambda_i \mathbf{B}\mathbf{K}_2 \xi_i(t-\tau) \end{aligned} \quad (9)$$

至此, 建立了基于分布式控制器的车辆队列系统 (6), 并将其解耦为若干个子系统 (9)。分析车辆队列系统 (6) 的稳定性与分析所有子系统的稳定性等价。接下来, 基于子系统 (9) 对车辆队列系统 (6) 进行稳定性分析。

2 车辆队列系统的稳定性分析

2.1 内部稳定性分析

车辆队列闭环动力学子系统 (9) 的特征方程为:

$$f_i = \det(s\mathbf{I}_3 - \mathbf{A} + \lambda_i \mathbf{B}\mathbf{K}_1 + \lambda_i \mathbf{B}\mathbf{K}_2 e^{-s\tau}) = s^3 + \frac{s^2}{T} + \frac{\lambda_i k_a s^2 e^{-s\tau}}{T} + \frac{\lambda_i k_v s}{T} + \frac{\lambda_i k_p}{T} = 0 \quad (10)$$

首先, 为了便于分析车辆队列系统内部稳定性, 假设车辆队列系统 (6) 在 $\tau = 0$ 处 Hurwitz 稳定性, 也称为车辆队列初始稳定。初始稳定性条件如下:

引理 1: 车辆队列系统 (6) 在 $\tau = 0$ 处稳定, 当且仅当:

$$k_v > \frac{k_p T}{\lambda_i k_a + 1} \quad (11)$$

证明: 由 τ 分解法可知, 完全稳定性分析首先要求解不含时延时, 子系统 (9) 的不稳定根个数。不含时延 ($\tau=0$) 的子系统特征方程为:

$$f_i(s) = s^3 + \frac{\lambda_i k_a + 1}{T} s^2 + \frac{\lambda_i k_v}{T} s + \frac{\lambda_i k_p}{T} = 0 \quad (12)$$

由 Routh-Hurwitz 稳定判据可得 Routh 表如下:

s^3	1	$\frac{\lambda_i k_v}{T}$
s^2	$\frac{\lambda_i k_a + 1}{T}$	$\frac{\lambda_i k_p}{T}$
s^1	$\frac{\lambda_i k_v (\lambda_i k_a + 1) - \lambda_i k_p T}{T(\lambda_i k_a + 1)}$	
s^0	$\frac{\lambda_i k_p}{T}$	

若闭环子系统 (9) 渐近稳定, 则 Routh 表第一列元素全为正数, 得到闭环子系统 (9) Hurwitz 稳定的条件为式 (11)。

接下来, 通过 τ 分解法分析车辆队列系统 (6) $\tau > 0$ 时的完全稳定性。由于根轨迹随时延连续变化, 当且仅当其闭环系统的所有特征根实部均为负数时, 内部稳定。车辆队列系统的稳定性切换只能发生在系统纯虚根对应的时延

处。因此,基于 τ 分解法的车辆队列系统(6)完全稳定性分析包含两部分:第一是计算系统纯虚根,用来确定时延参数空间的边界;第二是分析临界时延处根轨迹的渐近行为。

首先,利用“直接法”求解系统纯虚根,“直接法”利用时延系统特征方程纯虚根的共轭对称特性 $|e^{-\tau\omega}| = |e^{\tau\omega}|$,将准多项式转化为一般多项式等价表示。

为了方便,设子系统特征方程(10)为:

$$f(s, \tau) = a_0(s) + a_1(s)e^{-\tau s} = 0 \quad (13)$$

$$\text{其中: } a_0(s) = s^3 + \frac{s^2}{T} + \frac{\lambda_i k_v s}{T} + \frac{\lambda_i k_p}{T}, a_1(s) = -\frac{\lambda_i k_a s^2}{T}.$$

假设 $s = \omega i$ 是特征方程(10)的一个纯虚根,根据共轭对称性可知, $s = -\omega i$ 也是特征方程(10)的一个纯虚根,式(10)满足如下方程组:

$$\begin{cases} a_0(\omega i) + a_1(\omega i)e^{-\tau\omega i} = 0 \\ a_0(-\omega i) + a_1(-\omega i)e^{\tau\omega i} = 0 \end{cases}$$

消去指数项 $e^{-\tau\omega i}$ 和 $e^{\tau\omega i}$,得:

$$\begin{aligned} W(\omega^2) &= \omega^6 + \left(\frac{1}{T^2} - \frac{2\lambda_i k_v}{T} - \frac{\lambda_i^2 k_a^2}{T^2}\right)\omega^4 + \\ &\quad \left(\frac{\lambda_i^2 k_v^2 - 2\lambda_i k_p}{T^2}\right)\omega^2 + \frac{\lambda_i^2 k_p^2}{T^2} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

多项式(14)与车辆队列子系统特征方程(10)具有相同的纯虚根,求解多项式(14)可得车辆队列系统的临界虚根 ω 。

将求解得到的 ω 代入到式(13)中可得 $e^{-\tau\omega i} = \frac{-a_0(\omega)}{a_1(\omega)}$,根据相角条件,以及时延环节的频率周期性,可得:

$$\begin{aligned} \tau_k &= \frac{\angle -a_0(\omega) - \angle a_1(\omega) + 2k\pi}{\omega}, k \in N \\ \tau_0 &= \min\{\tau_k \geq 0\} \end{aligned} \quad (15)$$

进一步推导可得:

$$\begin{cases} \tau_k = \frac{-\arctan \frac{\lambda_i k_v \omega - \omega^3 T}{\lambda_i k_p - \omega^2} + (\frac{4k-1}{2})\pi}{\omega} \\ \tau_0 = \min\{\tau_k \geq 0\}, k \in N \end{cases} \quad (16)$$

求解式(16)可得纯虚根对应的(无穷个)临界时延

τ_k 。

第二步,分析子系统(9)的纯虚根在对应临界时延处的渐近行为。时延系统的穿越频率 ωi 关于临界时延 $\tau_k, k = 0, 1, 2, \dots, p$ 的变化率,称之为根趋势RT:

$$RT \Big|_{s=\omega i}^{\tau_k} = \text{sgn} \left[\text{Re} \left(\frac{\partial s}{\partial \tau_k} \Big|_{s=\omega i} \right) \right] \quad (17)$$

其中:Re表示取实数部分,sgn表示符号函数。由根趋势的定义可知,当纯虚特征根 ωi 穿越虚轴时, $RT = +1$ 表示纯虚根从复平面左半平面穿越到右半平面,不稳定根增加2个;反之, $RT = -1$ 表示纯虚根从右半平面穿越到左半平面,不稳定根减少2个。

重复上述求解含通信时延的车辆队列系统时延边界的

方法,从 $\tau = 0$ 时开始计算,获取所有子系统的时延边界,并对所有子系统的稳定区间取交集,即可求得整个车辆队列系统(6)的稳定性时延边界,获得整个车辆队列的内部稳定性条件。

针对车辆队列闭环控制系统(6),上述分析给出了完全稳定性分析基本思路,总结其完全稳定性分析算法流程如下:

- 1) 将车辆队列系统(6)等效拆解为 N 个子系统(9);
- 2) 利用“直接法”求纯虚根 ωi ;
- 3) 利用相角条件与时延的频率周期性,计算核心时延与衍生时延;
- 4) 利用式(17)计算根趋势;
- 5) 基于 τ 分解方法,从 $\tau = 0$ 开始计算,在整个时延域获取子系统的时延边界;
- 6) 对所有子系统重复步骤2)~7),获取所有子系统在时延域的时延边界;
- 7) 对所有子系统的稳定区间取交集,进而获取到整个车辆队列系统的时延边界,即得到整个车辆队列系统稳定的充分必要条件。

2.2 队列稳定性分析

在PLF拓扑下,研究车辆队列系统(6)的队列稳定性,首先定义车辆队列的跟车误差为:

$$e_i = \gamma_i - \gamma_{i-1} + d_0 \quad (18)$$

将式(18)代入车辆队列的闭环动力学模型(1)中得到:

$$\begin{aligned} T\ddot{e}_i(t) + \ddot{e}_i(t) &= -k_p[2e_i(t) - e_{i-1}(t)] - \\ &\quad k_v[2\dot{e}_i(t) - \dot{e}_{i-1}(t)] - k_a[2\ddot{e}_i(t - \tau) - \ddot{e}_{i-1}(t - \tau)] \end{aligned} \quad (19)$$

对式(19)中的误差项 e_i 作拉式变换,得:

$$\begin{aligned} (k_p + k_v s + k_a s^2 e^{-\tau s})E_{i-1}(s) &= \\ (Ts^3 + s^2 + 2k_p + 2k_v s + 2k_a s^2 e^{-\tau s})E_i(s) \end{aligned} \quad (20)$$

其中: $E_i(s)$ 为状态误差 e_i 的拉氏变换。

队列稳定性是干扰不会沿车辆队列向后扩散。为了推导队列稳定条件,假设作用在领航车上扰动的频率为 ω 。将 $s = j\omega$ 代入式(20)中,由式(20)得到车辆队列的误差传递函数:

$$\frac{E_i(j\omega)}{E_{i-1}(j\omega)} = \frac{k_p + k_v s + k_a s^2 e^{-\tau s}}{Ts^3 + s^2 + 2k_p + 2k_v s + 2k_a s^2 e^{-\tau s}} \quad (21)$$

根据队列稳定性判定条件 $\|E_i(j\omega)/E_{i-1}(j\omega)\|_{\infty} \leq 1$,推导系统队列稳定的充分条件如下^[28]:

定理1:在PLF拓扑下,当车辆参数 T 、分布式控制器的增益 k_p, k_v, k_a ,以及通信时延 τ 满足如下不等式时,车辆队列控制系统(6)队列稳定。

$$\begin{cases} \tau \leq \frac{T}{4k_a} \\ \tau \leq \frac{1 + 3k_a^2 - 4k_a - 4k_v T}{6k_v k_a} \\ T \leq \left(\frac{1 + 3k_a^2 - 4k_a}{4k_v} \right) \\ k_a \in \left(0, \frac{1}{3} \right) \cup (1, +\infty) \end{cases} \quad (22)$$

证明：欲使得 $\|E_i(j\omega)/E_{i-1}(j\omega)\|_\infty \leq 1$ 成立，只需：
 $|E_{i-1}(j\omega)|^2 - |E_i(j\omega)|^2 = T^2\omega^6 + 4Tk_a\omega^5\sin(\tau\omega) +$
 $(1 + 3k_a^2 - 4k_a - 4k_vT - 6k_kk_a\omega^3\sin(\tau\omega) +$
 $(3k_v^2 - 4k_p - 6k_pk_a\cos(\tau\omega))\omega^2 + 3k_p^2) \geq 0$ (23)
又因为 $\pm \sin(\tau\omega) \geq -\tau\omega, \pm \cos(\tau\omega) \geq -1$ ，式 (23) 可放缩为：

$$(T^2 - 4Tk_a\tau)\omega^6 + (1 + 3k_a^2 - 4k_a - 4k_vT - 6k_kk_a\tau)\omega^4 + (3k_v^2 - 4k_p + 6k_pk_a)\omega^2 + 3k_p^2 \geq 0$$
 (24)

式中， ω 均是偶次项，只有当每项系数均为正数的时候，式 (24) 成立。即：

$$\begin{cases} T^2 - 4Tk_a\tau \geq 0 \\ 1 + 3k_a^2 - 4k_a - 4k_vT - 6k_kk_a\tau \geq 0 \\ 3k_v^2 - 4k_p + 6k_pk_a \geq 0 \end{cases}$$
 (25)

故当式 (25) 成立时，车辆队列控制系统 (6) 队列稳定。结合 $\tau \geq 0$ 和 $T > 0$ ，分析式 (25) 可得时延和控制器参数的指导原则如式 (22) 所示，即车辆队列系统满足队列稳定性，时延和控制器参数须得满足式 (22)，证明完毕。

3 数值仿真

为了验证所给出的车辆队列系统 (6) 稳定性分析方法的有效性，进行数值仿真。考虑包括 1 辆领航车和 5 辆跟车组成的车辆队列，进行 2 组仿真实验。第 1 组实验验证内部稳定性分析方法的正确性；第 2 组实验验证车辆队列系统的队列稳定性条件的正确性。选取 PLF 型信息流拓扑，考虑式 (11) 和式 (22)，设置车辆动力系统的时延常数 $T = 1.5$ ，分布式控制器增益 $k_p = 1, k_v = 2, k_a = 3$ ，车间距为 $d_0 = 20$ m。在不含通信时延的情形下 ($\tau = 0$)，满足 Hurwitz 稳定条件。

3.1 实验 1：验证内部稳定性分析方法的正确性

PLF 型信息流拓扑的矩阵特征值分别为 2、2、2、2、1，可将车辆队列控制系统 (6) 分解为 2 个闭环子系统，分别对每个子系统按照 3.1 小节所述分析方法进行完全稳定性分析，首先将车辆队列系统 (6) 等效拆解为 N 个子系统 (9)；利用“直接法”求纯虚根 ωi ；利用相角条件与时延的频率周期性，计算核心时延与衍生时延；利用式 (17) 计算根趋势；对所有子系统重复上述步骤，获取所有子系统的穿越频率、核心时延以及根趋势，以上计算结果如表 1 所示。

表 1 车辆队列子系统的穿越频率、临界时延以及根趋势

特征值	穿越频率/(rad/s)	核心时延/s	根趋势
$\lambda_{1,2,3,4} = 2$	4.541 6	0.379 1	+1
	0.673 1	3.233 4	-1
$\lambda_5 = 1$	2.462 4	0.752 5	+1
	0.601 2	3.659 9	-1

下面按照 τ 分解策略，从 $\tau = 0$ 开始计算，在整个时延

域获取子系统的时延边界，对所有子系统的稳定区间取交集，进而获取到整个车辆队列系统的时延边界，仿真结果如图 2 所示，图 2 中分别绘制了车辆队列系统和所有子系统不稳定根数目在时延域 $\tau \in [0 \text{ s}, 10 \text{ s}]$ 内的详细变化情况，能够展示稳定性分析的详细过程。

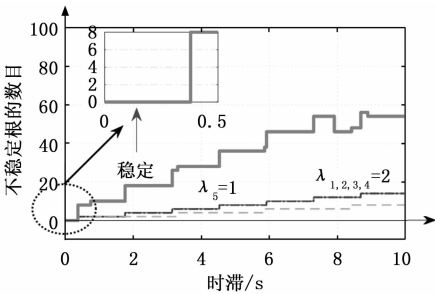


图 2 车辆队列不稳定根数目

在图 2 中，用细线（包括实线、虚线）标记每个子系统的的核心时延边界，用粗实线标记整个车辆队列系统的不稳定根数目关于时延的变化情况，并且在子图中绘制了整个车辆队列系统在时延区间 $[0 \text{ s}, 0.5 \text{ s}]$ 的局部放大图。从图 2 可以看出，仅仅在时延区间 $[0 \text{ s}, 0.379 1 \text{ s}]$ 内，存在车辆队列系统不稳定根个数等于零的情形 ($NU = 0$)，则车辆队列系统的时延边界为： $\tau = 0.379 1 \text{ s}$ ，此外，可以发现，在 $\tau > 0.379 1 \text{ s}$ 时，无法恢复到稳定状态，这是因为对比子系统根趋势为 -1 的情况，根趋势为 +1 时的核心时延较小，衍生时延的周期间隔也小。

为了验证上述车辆队列系统时延边界的正确性，选取 3 个时延， $\tau = 0.34 \text{ s}, \tau = 0.379 1 \text{ s}, \tau = 0.4 \text{ s}$ ，在这 3 个时延处，分别绘制车辆队列系统在 0~150 s 的位置误差、速度误差。考虑到队列稳定性影响，车辆队列控制器输出限制为 $-5 \leq u \leq 5$ 。仿真结果如图 3 和图 4 所示。图 3 是车辆队列分别在 3 个不同时延处的位置误差，图 4 为车辆队列分别在 3 个不同时延处的速度误差。

从图 3 (a)、图 4 (a) 可以看出，当 $\tau = 0.34 \text{ s}$ 时车辆队列位置、速度误差曲线收敛，系统稳定；从图 3 (b)、图 4 (b) 可以看出，当 $\tau = 0.379 1 \text{ s}$ 时位置、速度误差曲线等幅振荡，属于临界稳定；从图 3 (c)、图 4 (c) 可以看出，当 $\tau = 0.4 \text{ s}$ 时位置、速度误差曲线发散，系统不稳定。故可得车辆队列系统稳定性时延边界为： $\tau = 0.379 1 \text{ s}$ ，内部稳定性分析方法得以验证。

3.2 实验 2：验证队列稳定性分析的正确性

考虑车辆队列系统 (6)， $\frac{T}{4k_a} = 0.125, \frac{(1 + 3k_a^2 - 4k_a - 4k_vT)}{6k_kk_a} \approx 0.111 1$ ，根据队列稳定性条件 (22)，选取时延 $\tau = 0.1 \in (0, 0.125) \cap (0, 0.111 1)$ 。按照定理 1，车辆队列系统满足队列稳定性。下面通过仿真分析车辆队列系统的队列稳定性。

由于领航车的加减速可以看成是车辆队列的干扰。设

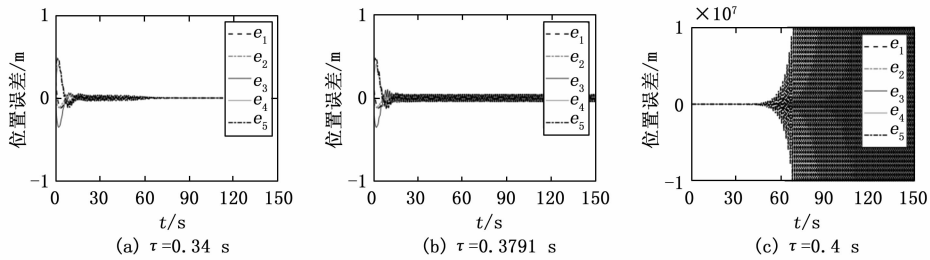


图3 实验1中车辆队列分别在3个不同时延处的位置误差

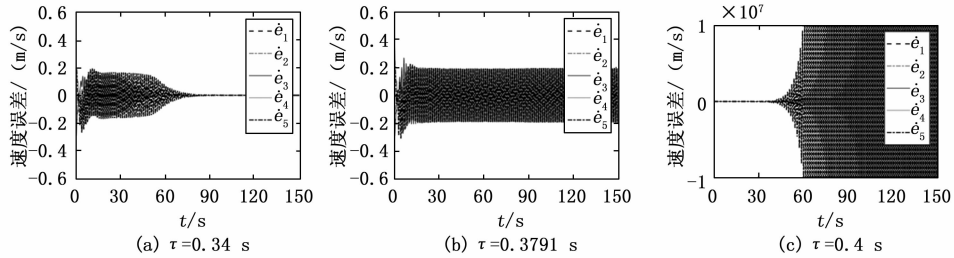


图4 实验1中车辆队列分别在3个不同时延处的速度误差

置领航车的加速度如下:

$$a_0(t) = \begin{cases} 0, & 0s \leq t < 20s \\ 2, & 20s \leq t < 23s \\ 0, & 23s \leq t < 77s \\ -1, & 77s \leq t < 80s \\ 0, & 80s \leq t < 120s \end{cases} \quad (26)$$

仿真结果如图5所示,图5(a)、(b)、(c)、(d)分别为车辆队列位置、速度、车辆间位置误差、车辆间速度误差图像。

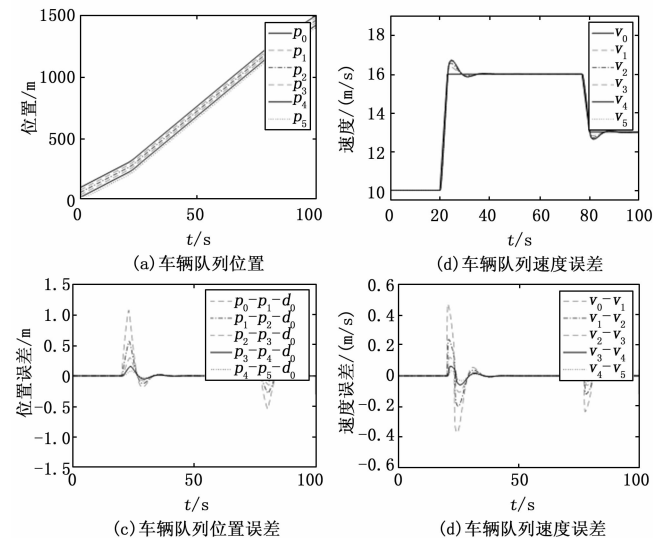


图5 实验2中车辆队列的状态与误差

在图5中,各种线标记了每个子系统的位置、速度、位置误差、速度误差。由仿真结果可知,在头车加速度受到扰动骤变的情况下,车辆状态最终趋于一致(如图5(a)、图5(b)所示),车辆队列间的位置误差和速度误差

在沿车辆队列向后传递时逐渐减小(如图5(c)、图5(d)所示),图5(a)中,未出现车辆碰撞情况。图5(b)中,各车速度受加速度骤变影响也会发生速度波动,之后迅速与头车保持一致,具有良好的跟踪性能;车辆队列的队列稳定性得到保证。因此,定理1提出的系统队列稳定性条件是正确有效的。

车辆队列控制可提升交通容量与安全性、降低燃油消耗。但由于网络通信环境和通信带宽的限制,车辆队列通信过程中往往存在通信时延。通信时延会导致车辆队列系统稳定裕度急剧下降,甚至引发系统不稳定。为此,本文考虑CACC情况下的PLF通信拓扑,针对含有通信时延的车辆队列系统,给出了内部稳定的充要条件,以及求解准确的时延边界的方法。具体地,利用矩阵相似变换,将高维车辆队列闭环控制系统降维拆分为若干等价的低维子系统;在此基础上,利用直接法迭代消去超越方程中的指数项,从而求解出系统的临界虚根;然后,根据相角条件和临界虚根的根趋势推导出了准确的时延边界。同时,为了保证扰动沿车辆队列传播过程中不被放大,给出了系统的队列稳定性条件,以及时延和控制器参数的指导原则。最后,通过两组仿真分别验证了所提内部稳定性和队列稳定性分析方法的有效性。

参考文献:

- [1] JIA D Y, LU K J, WANG J P, et al. A survey on platoon-based vehicular cyber-physical systems [J]. IEEE Communications Surveys and Tutorials, 2016, 18 (1): 263-284.
- [2] DARBHA S, KONDURI S, PAGILLA P R. Benefits of V2V communication for autonomous and connected vehicles [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2018, 20 (5): 1-10.

- [3] LI S E, ZHENG Y, LI K, et al. Dynamical modeling and distributed control of connected and automated vehicles: Challenges and opportunities [J]. IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine, 2017, 9 (3): 46–58.
- [4] 吴光强, 张亮修, 刘兆勇, 等. 汽车自适应巡航控制系统研究现状与发展趋势 [J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2017 (4): 544–553.
- [5] GONG S, ZHOU A, PEETA S. Cooperative adaptive cruise control for a platoon of connected and autonomous vehicles considering dynamic information flow topology [J]. Transportation Research Record, 2019, 2673 (10): 185–198.
- [6] DEY K C, YAN L, WANG X, et al. A review of communication, driver characteristics, and controls aspects of cooperative adaptive cruise control (CACC) [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2015, 17 (2): 491–509.
- [7] RAHIMI R, ABDOLLAHI F, NAQSHI K. Time-varying formation control of a collaborative heterogeneous multi agent system [J]. Robotics and autonomous systems, 2014, 62 (12): 1799–1805.
- [8] NETO A A, MOZELLI L A, SOUZA F O. Control of air-ground convoy subject to communication time delay [J]. Computers & Electrical Engineering, 2019, 76: 213–224.
- [9] DALY J M, MA Y, WASLANDER S L. Coordinated landing of a quadrotor on a skid-steered ground vehicle in the presence of time delays [J]. Autonomous Robots, 2015, 38 (2): 179–191.
- [10] LI S, QIN X, ZHENG Y, et al. Distributed platoon control under topologies with complex eigenvalues: Stability analysis and controller synthesis [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2019, 27 (1): 206–220.
- [11] OLIVEIRA S F, TORRES L A, Mozelli L A, et al. Stability and formation error of homogeneous vehicular platoons with communication time delays [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2020, 21 (10): 4338–4349.
- [12] KHALIFA A, KERMORGANT O, DOMINGUEZ S, et al. Platooning of car-like vehicles in urban environments: An observer-based approach considering actuator dynamics and time delays [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2021, 22 (9): 5684–5696.
- [13] ZHENG Y, LI S E, WANG J, et al. Stability and scalability of homogeneous vehicular platoon: study on the influence of information flow topologies [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2015, 17 (1): 14–26.
- [14] ABOLFAZLI E, BESSELINK B, CHARALAMBOUS T. On time headway selection in platoons under the MPF topology in the presence of communication delays [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2021 (99): 1–14.
- [15] PLOEG J, XING H, NIJMEIJER H. Robust CACC in the presence of uncertain delays [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2022, 71 (4): 3507–3518.
- [16] LIU Y, GAO H, ZHAI C, et al. Internal stability and string stability of connected vehicle systems with time delays [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2021, 22 (10): 6162–6174.
- [17] GUO G, KANG J, LEI H, et al. Finite-time stabilization of a collection of connected vehicles subject to communication interruptions [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation, 2021, 20 (4): 101–109.
- [18] XU L, ZHUANG W, YIN G, et al. Energy-oriented cruising strategy design of vehicle platoon considering communication delay and disturbance [J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2019, 107: 34–53.
- [19] CHEN J, LIANG H, LI J, et al. Connected automated vehicle platoon control with input saturation and variable time headway strategy [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2020, 22 (8): 4929–4940.
- [20] SHI M, YU Y, XU Q. Delay-dependent consensus condition for a class of fractional-order linear multi-agent systems with input time-delay [J]. International Journal of Systems Science, 2019, 50 (4): 669–678.
- [21] ALMODARESI E, BOZORG M, TAGHIRAD H D. Stability domains of the delay and PID coefficients for general time-delay systems [J]. International Journal of Control, 2016, 89 (4): 783–792.
- [22] OLGAC N, SIPAHI R. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47 (5): 793–797.
- [23] LI X G, NICULESCU S I, CELA A. Complete stability for neutral time-delay systems: A unified frequency-sweeping approach [C] // Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference. IEEE, 2014: 6080–6085.
- [24] 李旭光, 张颖伟, 冯琳. 时延系统的完全稳定性研究综述 [J]. 控制与决策, 2018, 33 (7): 1153–1170.
- [25] FIENGO G, LUI D G, PETRILLO A, et al. Distributed leader-tracking adaptive control for high-order nonlinear Lipschitz multi-agent systems with multiple time-varying communication delays [J]. IEEE International Journal of Control, 2021, 94 (7): 1880–1892.
- [26] 李永福, 何昌鹏, 朱浩, 等. 通信延时环境下异质网联车辆队列非线性纵向控制 [J]. 自动化学报, 2021, 47 (12): 2841–2856.
- [27] WALTON K, MARSHALL J E. Direct method for TDS stability analysis [J]. Proc. of IEE, Part D: Control Theory and Applications, 1987, 134 (2): 101–107.
- [28] CHEHARDOLI H, HOMAEINEZHAD M R, GHASEMI A. Control design and stability analysis of homogeneous traffic flow under time delay: a new spacing policy [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, 2019, 233 (3): 622–635.