

一种拟 Laguerre 控制器设计

杨启文, 曾韵之, 胡兴燕, 薛云灿

(河海大学 物联网工程学院, 江苏 常州 213022)

摘要: 拉盖尔 (Laguerre) 级数是一类 L_2 空间上的正交级数, 具有很好的函数逼近能力, 目前在自动控制领域用于连续动态过程建模以及数字控制器设计; 为了拓展拉盖尔级数在连续控制器设计方面的应用范围, 文章将 0 型拉盖尔级数型传递函数模型, 改进为 1 型拟拉盖尔级数型传递函数模型, 提出了一种具有积分行为的拟拉盖尔控制器; 比较了拟拉盖尔控制器与工业常用 PID 控制器的频域特点; 通过将拟拉盖尔控制系统模型和期望模型的麦克劳林 (Maclaurin) 展开, 给出了拟拉盖尔控制器参数的整定规则; 在三类不同被控对象的仿真实验中, 将拟拉盖尔控制器和 PID 控制器的系统逼近性能以及抗扰性能进行了对比研究; 结果表明, 拟拉盖尔控制器只需要三阶展开项, 即可获得高于 PID 控制器的系统逼近能力和抗扰能力, 具有较好的应用前景。

关键词: Laguerre 级数; 正交多项式; 模型逼近; Maclaurin 展开; PID 控制

Design of A Quasi-Laguerre Controller

YANG Qiwen, ZENG Yunzhi, HU Xingyan, XUE Yuncan

(College of Internet of Things Engineering, HOHAI University, Changzhou 213022, China)

Abstract: The Laguerre series is a kind of orthogonal series in L_2 space, which has good function approximation ability. It is currently used in the field of automatic control for continuous dynamic process modeling and digital controller design. In order to expand the application range of Laguerre series in continuous controller design, the type 0 Laguerre series transfer function model is improved to the type 1 quasi-Laguerre series transfer function model in this paper, and a quasi-Laguerre series controller with integral behavior is proposed. Subsequently the frequency domain characteristics of the quasi-Laguerre controller and the PID controller commonly used in industry are studied comparably. By expanding the quasi-Laguerre control system model and the desired model using the Maclaurin series, the tuning formula of the parameters of the pseudo-Laguerre controller is given. In the simulation experiments on three types of controlled plants, the system approximation performance and disturbance-objection performance of the quasi-Laguerre controller and the PID controller are compared. The results show that the quasi-Laguerre controller with a third-order expansion term outperforms the PID controller on both the system approximation performance and disturbance-objection performance. This will lead to a good application prospect for the proposed controller.

Keywords: Laguerre series; orthogonal polynomial; model approximation; Maclaurin expansion; PID control

0 引言

正交级数, 如勒让德 (Legendre) 级数、帕德 (Pade) 级数、傅里叶 (Fourier), 在函数逼近或拟合方面有着显著的优点^[1-2]。正交级数虽然在理论上能够带来趋近于零的逼近误差, 但作为控制器模型在自动控制系统中却不如 PID 控制器应用广泛。

拉盖尔 (Laguerre) 级数是一类 $L_2 (R^+)$ 上的正交级数。1932 年 Lee 首次将其应用于瞬态问题研究^[3], 1956 年 Wiener 提出了连续时间内的 Laguerre 级数, 并将其应用于系统识别^[4]。由于拉盖尔正交级数包含了系统阶次以及时延信息^[5], 因此在系统建模时, 只需要根据误差精度选择合适的展开项, 无需关注系统的真实模型结构, 这使得拉盖尔级数在系统建模与辨识时^[6-7], 十分便利。

当前, 将拉盖尔级数作为控制器使用时, 仅局限于离

散时间形式^[8-9]: 使用简单的 p 步超前预测控制律来预测过程响应, 从而尽可能快地达到期望值^[10-13]。在大规模、复杂系统中, 每个子系统利用正交拉盖尔网络, 实现分散预测控制^[14]。也有学者将拉盖尔级数与工业中广泛使用的 PID 相结合, 既保留了对时延和结构变化不敏感的拉盖尔函数模型特性, 又结合分数阶 PID 控制的优点, 实现基于拉盖尔模型的分数阶 PID 预测控制^[15]。

考虑到拉盖尔级数在逼近方面的优势以及在连续时间控制器研究方面的不足, 本文提出一种连续时间的拟拉盖尔控制器模型及其参数整定规则, 并与工业过程中广泛使用的 PID 控制器进行对比研究, 比较拟拉盖尔控制器与 PID 控制器在模型逼近和抗干扰方面的性能, 为工业过程控制提供新型控制器模型。

1 拉盖尔级数

对于任意函数 $f(x)$, 可以用如下的拉盖尔级数形式进

收稿日期: 2021-08-18; 修回日期: 2021-09-24。

作者简介: 杨启文 (1969-), 男, 湖北黄冈人, 博士, 副教授, 主要从事工业过程建模与控制、智能优化等方向的研究。

薛云灿 (1965-), 男, 江苏常州人, 博士, 教授, 主要从事工业过程建模、系统优化等方向的研究。

引用格式: 杨启文, 曾韵之, 胡兴燕, 等. 一种拟 Laguerre 控制器设计[J]. 计算机测量与控制, 2021, 29(11): 76-83.

行表示^[16]:

$$f(t) \approx f_N(t) = \sum_{n=1}^N C_n L_n(t) \quad (1)$$

式中, $L_n(x)$ 是由罗德里格公式推导得到多项式序列, C_n 为拉盖尔系数:

$$\begin{cases} L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \\ C_n = \int_0^\infty f(x) L_n(x) dx \end{cases}$$

拉盖尔级数的逼近精度随着展开项的增加而提高, 当展开项趋近于无穷大时, 逼近误差可以趋近于 0, 即:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f(t) - f_N(t)\| = 0$$

由于存在如下关系:

$$(L_m(x), L_n(x)) = \int_0^\infty L_m(x) L_n(x) e^{-x} dx = \begin{cases} 0, & (m \neq n) \\ (n!)^2, & (m = n) \end{cases}$$

因此, 拉盖尔多项式序列 $L_n(t)$ 构成了 $L_2(R^+)$ 函数空间上一组完备的归一化正交基。

对于连续时间过程, 拉盖尔级数通常定义为^[17-18]:

$$L_n(t) = \sqrt{2p} \frac{e^{pt}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^{n-1} e^{-2pt}) \quad (2)$$

其中: p 为时间比例因子, $t \in [0, \infty)$ 为时间变量。将式 (2) 进行拉普拉斯变换, 便可得到式 (3) 所示的复数域拉盖尔级数:

$$L_n(s) = \sqrt{2p} \frac{(s-p)^{n-1}}{(s+p)^n} \quad (3)$$

复数域的拉盖尔级数形式, 为构建动态系统输入/输出关系的传递函数模型提供了可能。

2 拟拉盖尔控制器模型

在经典控制理论中, 通常将零初始条件下系统输出与输入的拉普拉斯变换之比, 定义为一个线性系统的传递函数模型。根据式 (3) 所示的复数域拉盖尔级数, 一个线性定常连续系统的传递函数模型可定义为:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sqrt{2p}}{s+p} \sum_{n=1}^N C_n \left(\frac{s-p}{s+p} \right)^{n-1} \quad (4)$$

式中, $U(s)$ 和 $Y(s)$ 分别是系统输入和输出的拉普拉斯变换, p 和 C_n 为待定参数。由于拉盖尔级数的正交性, 在工程应用中, 式 (4) 模型的建模精度, 可通过增加其展开项得到提高, 无需了解被控对象更多的结构和时延信息。其方框图如图 1 所示。

在式 (4) 所示拉盖尔级数型传递函数模型中, 由于 $p \neq 0$, 因此标准拉盖尔级数型传递函数是一个 0 型环节, 无法描述含积分器环节的动态过程。0 型环节的缺点是无法获得足够高的低频增益, 如果将其作为控制器应用于反馈控制系统中时, 那么当被控对象无积分特性时, 必然会导致系统存在稳态误差。

为解决式 (4) 拉盖尔级数型传递函数的不足, 同时又尽可能保留拉盖尔级数的基本特性, 最直接的做法是在拉盖尔传递函数模型中串接一个积分器。但这种处理方式, 会增加控制器的阶次和相角滞后, 对系统的稳定裕度和快

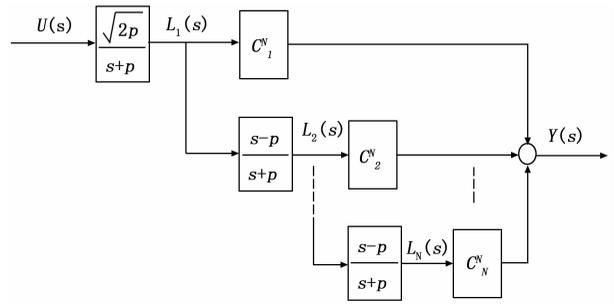


图 1 复数域拉盖尔模型

速响应性不利。

本文对式 (4) 所示拉盖尔级数型传递函数模型进行改进: 将其中的惯性环节 $\sqrt{2p}/(s+p)$, 用一个积分环节 $1/s$ 代替。这样, 就得到一种拟拉盖尔级数的控制器模型, 称之为拟拉盖尔控制器。该控制器模型如下:

$$G_L^N(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^N C_n \left(\frac{s-p}{s+p} \right)^{n-1} \quad (5)$$

比较式 (4) 和式 (5) 可知, 当展开项 N 的阶次相同时, 拟拉盖尔控制器模型没有增加系统模型阶次, 但相角增加了 $\theta = \arctg(\omega/p) - 0.5\pi$; 如果式 (4) 模型中采用串接积分器的方式, 控制器的阶次不但会增加一阶, 而且相角会增加 -0.5π , 不利于提高系统的相角裕量。

3 拟拉盖尔控制器频率特性

拉盖尔级数的展开项越多, 逼近精度越高。但过高的控制器阶次, 一方面会带来性能冗余, 另一方面也会导致参数整定和工程实现复杂。因此, 大多数情况下, 控制器的阶次尽可能低。

基于上述因素, 本文仅讨论展开项 N 为 2 和 3 时的拟拉盖尔控制器 (即 $G_L^2(s)$ 和 $G_L^3(s)$) 特性, 并与工业控制系统中广泛使用的 PID 控制器:

$$G_{PID}(s) = K_p + K_i \frac{1}{s} + K_d s = K \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s} \quad (6)$$

进行频域特性比较。

由式 (5) 知, 当系统展开阶次 N 为 2 和 3 时, 拟拉盖尔控制器模型可改写为如式 (7) 所示形式:

$$\begin{cases} G_L^2(s) = K_1 \frac{\tau_{11}s + 1}{s(Ts + 1)} \\ G_L^3(s) = K_2 \frac{(\tau_{21}s + 1)(\tau_{22}s + 1)}{s(Ts + 1)^2} \end{cases} \quad (7)$$

其中:

$$\begin{cases} K_1 = c_1^2 - c_2^2 \\ \tau_{11} = (c_1^2 + c_2^2)/K_1 p \\ K_2 = c_1^3 - c_2^3 + c_3^3 \\ \tau_{21} = (c_1^3 + c_2^3 + c_3^3)/(c_1^3 - c_3^3 - \sqrt{(c_2^3)^2 - 4c_1^3 c_3^3}) p \\ \tau_{22} = (c_1^3 + c_2^3 + c_3^3)/(c_1^3 - c_3^3 + \sqrt{(c_2^3)^2 - 4c_1^3 c_3^3}) p \\ T = 1/p \end{cases}$$

基于式 (6) 和式 (7) 的控制器模型, 可计算出 PID 控制器和拟拉盖尔控制器的频域增益:

$$\begin{cases} A_{PID}(\omega) = 20\lg \frac{K}{\omega} \sqrt{(\tau_1\omega)^2 + 1} \sqrt{(\tau_2\omega)^2 + 1} \\ A_L^2(\omega) = 20\lg \frac{K_1}{\omega} \frac{\sqrt{(\tau_{11}\omega)^2 + 1}}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}} \\ A_L^3(\omega) = 20\lg \frac{K_2}{\omega} \frac{\sqrt{(\tau_{21}\omega)^2 + 1} \sqrt{(\tau_{22}\omega)^2 + 1}}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}} \end{cases}$$

其幅频渐近特性如图 2 所示。

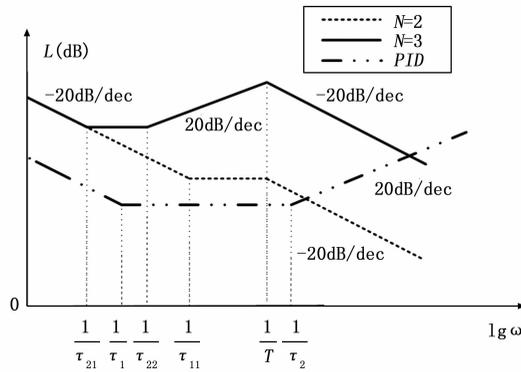


图 2 PID 控制器和拟拉盖尔控制器幅频渐近特性

从低频增益特性上看，两种控制器模型都具有无穷大的低频增益和 -20 (dB/dec) 的低频斜率，可以实现位移无静差控制。但二者的高频增益却相差很大：

$$\begin{cases} A_{PID}(\omega) |_{\omega \rightarrow \infty} = +\infty \\ A_L^2(\omega) |_{\omega \rightarrow \infty} = -\infty \\ A_L^3(\omega) |_{\omega \rightarrow \infty} = -\infty \end{cases}$$

PID 控制器增益随着频率的升高而趋近于无穷大，拟拉盖尔控制器随着频率的升高而趋近于无穷小。由于干扰信号一般具有较高的频率成分，从抗干扰角度考虑，控制器高频增益过大，不利于抑制高频干扰。因此，从幅频特性上看，拟拉盖尔控制器理论上比 PID 控制器具有更好的高频抗扰性能。

在影响系统瞬态性能和稳定性的中频段，PID 控制器和 $G_L^2(s)$ 控制器均有两个转折频率，而 $G_L^3(s)$ 控制器则有三个转折频率，多了一个可调节的自由度，因而理论上可以获得比 PID 和 $G_L^2(s)$ 控制器更好的动态性能。

两种控制器的相频特性如式 (8) 所示：

$$\begin{cases} \theta_{PID}(\omega) = \arctan(\tau_1\omega) + \arctan(\tau_2\omega) - 0.5\pi \\ \theta_L^2(\omega) = \arctan(\tau_{11}\omega) - \arctan(T\omega) - 0.5\pi \\ \theta_L^3(\omega) = \arctan(\tau_{21}\omega) + \arctan(\tau_{22}\omega) - 2\arctan(T\omega) - 0.5\pi \end{cases} \quad (8)$$

在 $\omega \in (0, +\infty)$ 的频段，PID 控制器的相角范围为：

$$\theta_{PID}(\omega) \in (-0.5\pi, 0.5\pi)$$

$G_L^2(s)$ 控制器的相角范围为：

$$\theta_L^2(\omega) \in$$

$$\begin{cases} \left(-0.5\pi, \arctan \frac{\tau_{11}}{\sqrt{\tau_{11}T}} - \arctan \frac{T}{\sqrt{\tau_{11}T}} - 0.5\pi\right), \tau_{11} > T \\ \left(\arctan \frac{\tau_{11}}{\sqrt{\tau_{11}T}} - \arctan \frac{T}{\sqrt{\tau_{11}T}} - 0.5\pi, -0.5\pi\right), \tau_{11} < T \end{cases}$$

而 $G_L^3(s)$ 控制器的相角范围与 $G_L^2(s)$ 控制器的相角范围相似，取决于 τ_{21} 、 τ_{22} 和 T 这三个参数之间的关系，其表达式比 $\theta_L^2(s)$ 更为复杂。但无论 $G_L^2(s)$ 和 $G_L^3(s)$ 控制器中的参数如何选择，其最大相角均小于 0 度。因此，PID 控制器理论上可以获得比拟拉盖尔控制器更高的相角裕度。

4 拟拉盖尔控制器参数整定

基于性能指标的设计方法，是控制系统的一种常见设计方法，这类方法可以让待设计的控制系统逼近期望的系统性能。

期望的系统性能，可以是时域的调节时间和超调量^[19]，也可以是频域增益^[20]或稳定裕度^[21]，还可以是综合反映时域和频域性能的期望模型^[22]。本文基于模型逼近技术^[22-24]，分别给出 PID 控制器的参数整定公式和拟拉盖尔控制器参数的整定公式，便于在相同设计方法下，比较两种控制器的不同性能。

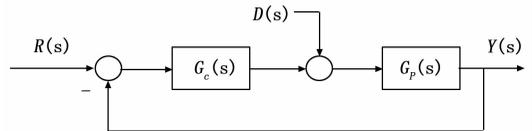


图 3 控制系统典型结构图

设如图 3 所示典型结构的控制系统中， $G_c(s)$ 是控制器模型， $G_p(s)$ 为被控对象模型， $R(s)$ 、 $D(s)$ 和 $Y(s)$ 分别为系统输入、扰动输入和系统输出。

根据如图所示系统结构，可以得到闭环系统的数学模型：

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

若给定的系统期望模型为 $\hat{\Phi}(s)$ ，则当系统模型 $\Phi(s)$ 与系统期望模型 $\hat{\Phi}(s)$ 的各阶麦克劳林展开项分别相等时：

$$\begin{cases} \Phi^{(1)}(0) = \hat{\Phi}^{(1)}(0) \\ \Phi^{(2)}(0) = \hat{\Phi}^{(2)}(0) \\ \vdots \\ \Phi^{(k)}(0) = \hat{\Phi}^{(k)}(0) \end{cases} \quad (9)$$

便可利用前 k 个等式关系，推导 k 个控制器参数的计算公式。

对于式 (6) 所示 PID 控制器，按照式 (9) 所示等式条件，将前三项方程联立求解，可得到 K_p 、 K_i 、 K_d 的整定公式：

$$\begin{cases} K_p = -\frac{\hat{\Phi}^{(2)}(0)[G_p(0)K_i]^2 + 2K_iG_p^{(1)}(0) + 2}{2G_p(0)} \\ K_i = -\frac{1}{\hat{\Phi}^{(1)}(0)G_p(0)} \\ K_d = \frac{K_i[K_iG_p^{(1)}(0) + 2]G_p^{(1)}(0) + 1}{K_i(G_p(0))^2} - \frac{KG_p^{(2)}(0) + 2K_iG_p^{(1)}(0)}{2G_p(0)} + \frac{2K_p}{K_iG_p(0)} + \frac{K_p^2}{K_i} + \frac{1}{6}K_i^2\hat{\Phi}^{(3)}(0)G_p(0) \end{cases} \quad (10)$$

对于拟拉盖尔控制器, 式 (9) 为一组非线性方程, 难以得到控制器参数的显示表达式。但如果将参数 G_n^N 表示为 p 的函数, 那么求解难度大为降低, 容易得到以 p 为自变量的 G_n^N 显示表达。

基于上述处理思想, 二阶拟拉盖尔控制器参数表达式为:

$$\begin{cases} C_1^2 = C_2^2 - \frac{1}{\hat{\Phi}^{(1)}(0)G_p(0)} \\ C_2^2 = \frac{\hat{\Phi}^{(1)}(0)G_p^{(1)}(0) - \left((\hat{\Phi}^{(2)}(0))^2 - \frac{1}{2}\hat{\Phi}^{(1)}(0) \right) G_p(0)}{4(\hat{\Phi}^{(1)}(0)G_p(0))^2} p \end{cases} \quad (11)$$

三阶拟拉盖尔控制器参数表达式如下:

$$\begin{cases} C_1^3 = C_3^3 - \frac{2p(\hat{\Phi}^{(1)}(0))^2 G_p(0) + 4\hat{\Phi}^{(1)}(0)G_p(0) - p\hat{\Phi}^{(2)}(0)G_p(0) - 2pG_p^{(1)}(0)\hat{\Phi}^{(1)}(0)}{4(\hat{\Phi}^{(1)}(0)G_p(0))^2} \\ C_2^3 = 2C_3^3 - \frac{2(\hat{\Phi}^{(1)}(0))^2 G_p(0) - G_p(0)\hat{\Phi}^{(2)}(0) - 2\hat{\Phi}^{(1)}(0)G_p^{(1)}(0)}{4(\hat{\Phi}^{(1)}(0)G_p(0))^2} p \\ C_3^3 = \frac{(G_p^{(1)}(0)(\hat{\Phi}^{(1)}(0))^2 p + X/2)G_p(0) - (G_p^{(1)}(0))^2 \hat{\Phi}^{(1)}(0) p}{4(\hat{\Phi}^{(1)}(0))^2 (G_p(0))^3} p - \frac{(\hat{\Phi}^{(1)}(0))^3 - (\hat{\Phi}^{(3)}(0)p/6 + \hat{\Phi}^{(2)}(0)/2)\hat{\Phi}^{(1)}(0) + (\hat{\Phi}^{(2)}(0))^2/4}{4(\hat{\Phi}^{(1)}(0))^3 G_p(0)} p \end{cases} \quad (12)$$

其中:

$$X = (G_p^{(2)}(0)p + 2G_p^{(1)}(0)\hat{\Phi}^{(1)}(0) - G_p^{(1)}(0)\hat{\Phi}^{(2)}(0))p$$

由于式 (11) 和 (12) 未给出参数 p 的选择原则, 导致 p 为一自由参数。文献[25]表明, 在大多数情况下, 参数 p 对系统性能影响不大, 一般情况下可以根据先验知识预设一个固定值, 并建议取 $p=25$ 。

5 仿真研究

为了研究拟拉盖尔控制器的跟踪性能和抗干扰性能, 并与 PID 控制器进行比较, 本文选择三类不同的被控对象 (低阶时滞对象、高阶无时滞对象以及非最小相位对象):

$$\begin{cases} G_{p1}(s) = \frac{4e^{-2s}}{5s+2} \\ G_{p2}(s) = \frac{1}{s^3+5s^2+5s+1} \\ G_{p3}(s) = \frac{1-s}{(1+s)^2(2+s)} \end{cases}$$

这三类被控对象所对应的期望系统分别设置为:

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_1(s) = \frac{1}{s+1}e^{-2s} \\ \hat{\Phi}_2(s) = \frac{1}{s^2+s+1} \\ \hat{\Phi}_3(s) = \frac{0.3^2}{s^2+2 \times 0.8 \times 0.3s+0.3^2}e^{-1.64s} \end{cases}$$

5.1 逼近度比较

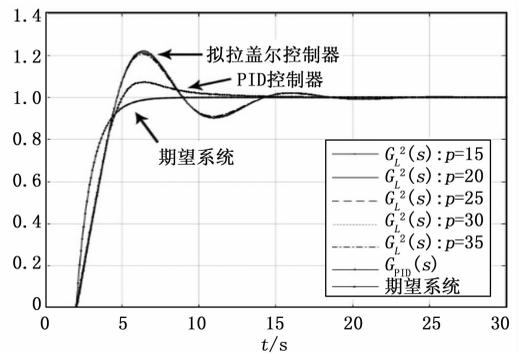
本节主要考察在阶跃信号作用下, 拟拉盖尔控制系统

与 PID 控制系统对期望系统的逼近能力。

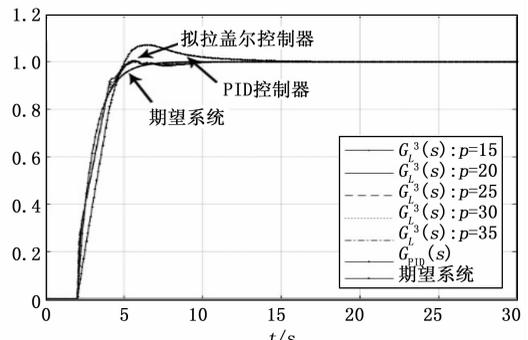
对于低阶时滞对象 $G_{p1}(s)$, 利用公式 (10) ~ (12), 计算可得三个控制器参数如下所示:

$$\begin{cases} G_{PID}(s):(K_p, K_i, K_d) = \left(\frac{19}{36}, \frac{1}{6}, \frac{5}{18} \right) \\ G_L^2(s):(C_1^2, C_2^2) = \left(\frac{1}{6} + \frac{19}{72}p, \frac{19}{72}p \right) \\ G_L^3(s):(C_1^3, C_2^3, C_3^3) = \left(\frac{1}{6} + \frac{19}{48}p + \frac{5}{72}p^2, \frac{19}{36}p + \frac{5}{36}p^2, \frac{19}{144}p + \frac{5}{72}p^2 \right) \end{cases}$$

图 4 是期望系统和三种控制系统, 在不同 p 值的情况下的单位阶跃响应曲线。从图 4 (a) 和图 4 (b) 可以看出, 对于拟拉盖尔控制器 $G_L^2(s)$ 或 $G_L^3(s)$, 将参数 p 在 [15, 35] 之间改变, 但系统输出的变化很小, 5 种 p 值的拟拉盖尔控制系统输出曲线几乎重合。



(a) $G_L^2(s)$ 与 GPID(s)



(b) $G_L^3(s)$ 与 GPID(s)

图 4 参数 p 对系统逼近度的影响

图 4 (a) 和图 4 (b) 的另一个特征是: 期望系统、PID 控制系统和两种不同阶次拟拉盖尔控制系统的阶跃响应曲线存在明显的差别。 $G_L^2(s)$ 控制系统的单位阶跃响应曲线与期望曲线差异最大; 而 $G_L^3(s)$ 控制系统的单位阶跃响应曲线几乎与期望系统的单位阶跃响应曲线重合。PID 控制系统的单位阶跃响应, 介于 $G_L^2(s)$ 和 $G_L^3(s)$ 两个控制系统之间。这说明拉盖尔级数展开项的增加, 有利于提升系统对期望系统的逼近能力。

为了能量化系统逼近度, 将控制系统与期望系统时域响应的偏差绝对值进行积分 (IAE), 作为控制系统逼近度

的衡量指标:

$$J_{IAE} = \int_0^{\infty} |y(t) - \hat{y}(t)| dt \quad (13)$$

式中, $y(t)$ 为控制系统的输出, $\hat{y}(t)$ 为期望系统的输出。

根据式 (13) 定义的逼近度性能指标, 可以得到拟拉盖尔控制系统在不同 p 值下的系统逼近度指标值。由表 1 可以看出, 不论 $G_L^2(s)$ 控制系统还是 $G_L^3(s)$ 控制系统, 逼近度数值均随着 p 的增大而减小, 也就是说, p 值增大, 在一定程度上有利于提高系统逼近度。

表 1 拟拉盖尔控制器与 PID 控制器的逼近度比较

控制器	$p=15$	$p=20$	$p=25$	$p=30$	$p=35$
$G_L^2(s)$	1.4532	1.407	1.3712	1.3507	1.3361
$G_L^3(s)$	0.1814	0.1727	0.1684	0.1659	0.1648
$G_{PID}(s)$	0.7015				

表 2 是 $p=25$ 时三种控制系统的综合性能, 从表格中的数据可以看出, $G_L^3(s)$ 控制系统在时域性能及逼近度上均有上佳表现, 而 $G_L^2(s)$ 逼近度、调节时间和超调量都最差, 上升时间和峰值时间略好于 PID 控制系统。

表 2 拟拉盖尔控制器与 PID 控制器的综合性能比较

控制器	上升时间 /s	峰值时间 /s	调节时间 /s	超调量 /%	J_{IAE}
期望系统	2.20	11.905	5.00	0.00	0
$G_L^2(s)$	2.06	6.34	13.56	20.97	1.3712
$G_L^3(s)$	1.97	12.4	4.69	0.06	0.1684
$G_{PID}(s)$	2.21	6.46	7.85	7.26	0.7015

对于高阶无时滞对象 $G_{p2}(s)$, 利用公式 (10) ~ (12) 计算得到的三种控制器参数 ($p=25$) 如下:

$$\begin{cases} G_{PID}(s): & (K_p, K_i, K_d) = (4, 1, 1) \\ G_L^2(s): & (C_1^2, C_2^2) = (51, 50) \\ G_L^3(s): & (C_1^3, C_2^3, C_3^3) = (232.25, 412.5, 181.25) \end{cases}$$

图 5 为三种控制系统在阶跃响应作用下的曲线, 三者的区别十分明显。

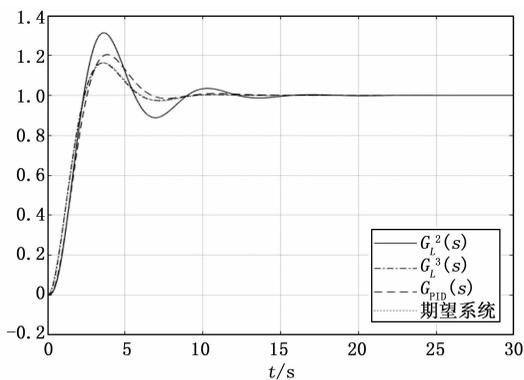


图 5 高阶无时滞系统阶跃响应

表 3 给出了三种控制系统的综合性能。由表中数据可以看出, $G_L^3(s)$ 控制系统能够更接近期望系统的响应, 与

期望系统的响应曲线几乎完全重合, 其次是 PID 控制系统, 逼近性能最差的是 $G_L^2(s)$ 控制系统。

表 3 拟拉盖尔控制器与 PID 控制器的综合性能比较

控制器	上升时间 /s	峰值时间 /s	调节时间 /s	超调量 /%	J_{IAE}
期望系统	1.64	3.63	2.27	16.3033	0
$G_L^2(s)$	1.44	3.64	2.25	31.3761	0.7482
$G_L^3(s)$	1.58	3.57	2.24	16.289	0.0446
$G_{PID}(s)$	1.71	4.09	3.7	17.06	0.5691

采用上述同样的方法, 得到非最小相位对象 $G_{p3}(s)$ 的三种控制器参数 ($p=25$) 如下:

$$\begin{cases} G_{PID}(s): & (K_p, K_i, K_d) = (0.1318, 0.2868, 0.0997) \\ G_L^2(s): & (C_1^2, C_2^2) = (1.9341, 1.6473) \\ G_L^3(s): & (C_1^3, C_2^3, C_3^3) = (18.7054, 35.1899, 16.7713) \end{cases}$$

如图 6 所示为三种控制系统与期望系统的曲线, 四个系统的输出几乎重合。表 4 给出了三种控制系统在逼近度方面的微小差别。可以看出 $G_L^3(s)$ 控制系统和 PID 控制系统的输出更加接近期望系统的输出, $G_L^2(s)$ 控制系统就略差一点。

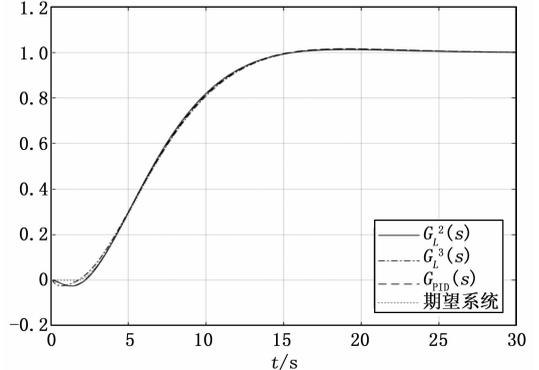


图 6 非最小相位系统阶跃响应

表 4 拟拉盖尔控制器与 PID 控制器综合性能比较

控制器	上升时间 /s	峰值时间 /s	调节时间 /s	超调量 /%	J_{IAE}
期望系统	8.24	19.09	12.96	1.4211	0
$G_L^2(s)$	8.11	19.12	12.88	1.1716	0.1353
$G_L^3(s)$	8.45	19.25	13.05	1.41	0.0934
$G_{PID}(s)$	8.43	19.24	13.04	1.4133	0.0809

上面三例分别给出了三种控制器在三类不同类型被控对象上的控制效果及其与期望系统阶跃响应的差别。为了能对三种控制器的逼近性能综合排序, 将三种控制器在三类被控对象上逼近能力的独立排序结果列入表 5 中, 然后计算各自排序均值, 作为三种控制器逼近能力的得分。分值越小, 逼近能力越强。

从表 5 数据可以看出, $G_L^3(s)$ 控制器系统的平均排序为 1.333, 具有最好的期望逼近度; 排名第二的是 PID 控制

器, 平均排序为 1.667; 逼近能力最差的是 $G_L^2(s)$ 控制系统。

表 5 拟拉盖尔控制器和 PID 控制器逼近度排序

控制器	$G_{p1}(s)$	$G_{p2}(s)$	$G_{p3}(s)$	平均排序
$G_L^2(s)$	3	3	3	3
$G_L^3(s)$	1	1	2	1.333
$G_{PID}(s)$	2	2	1	1.667

5.2 抗扰性能比较

控制系统在实际工作的过程中, 不可避免地会受到外部信号的干扰, 例如风对悬吊物的随机影响、牵引过程中的负载突加和突减等。本文仅研究单位阶跃干扰为 $D(t) = 1(t)$ 和正弦干扰 $D(t) = \sin(2000\pi t)$ 时, 三种控制系统对于干扰的抑制能力。

为了能量化系统的抗扰性能, 仍采用 IAE 指标作为评价标准。

图 7 是低阶时滞对象 $G_{p1}(s)$ 的扰动响应过程。在阶跃干扰作用下, $G_L^3(s)$ 控制系统和 $G_{PID}(s)$ 控制系统的抗扰性能非常相近, 但在正弦干扰作用下, PID 控制器的抗扰性能最差 (抗扰性能指标 IAE 如表 6 所示)。

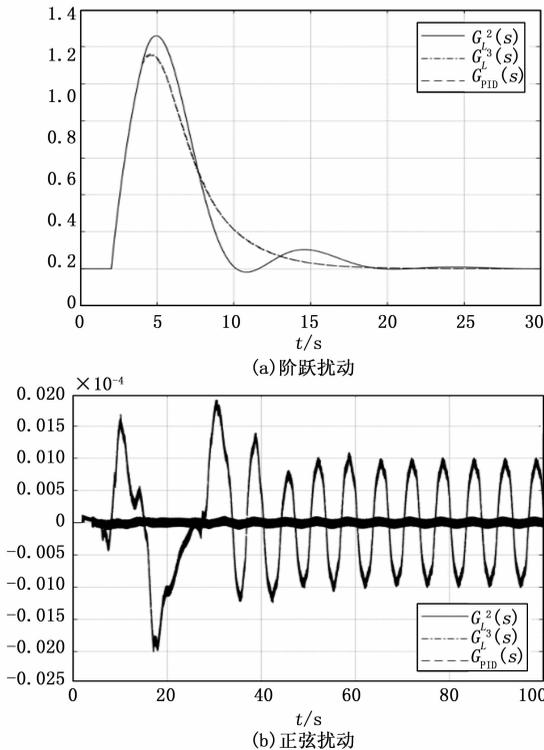


图 7 时滞对象 $G_{p1}(s)$ 的扰动响应

表 6 抗扰性能 J_{IAE}

	$G_L^2(s)$	$G_L^3(s)$	$G_{PID}(s)$
阶跃 J_{IAE}	6.0603	6.0000	6.0000
正弦 J_{IAE}	4.7527×10^{-2}	4.7498×10^{-2}	6.5793×10^{-1}

跃干扰下, $G_L^2(s)$ 控制系统的抗扰指标最好, $G_L^3(s)$ 控制系统和 G_{PID} 控制系统的抗扰指标几乎相等。但在正弦干扰下, $G_L^2(s)$ 控制系统的抗扰指标最差, $G_L^3(s)$ 控制系统的抗扰指标最好, G_{PID} 控制系统的抗扰指标稍差于 $G_L^3(s)$ 控制系统 (抗扰性能 IAE 数据如表 7 所示)。

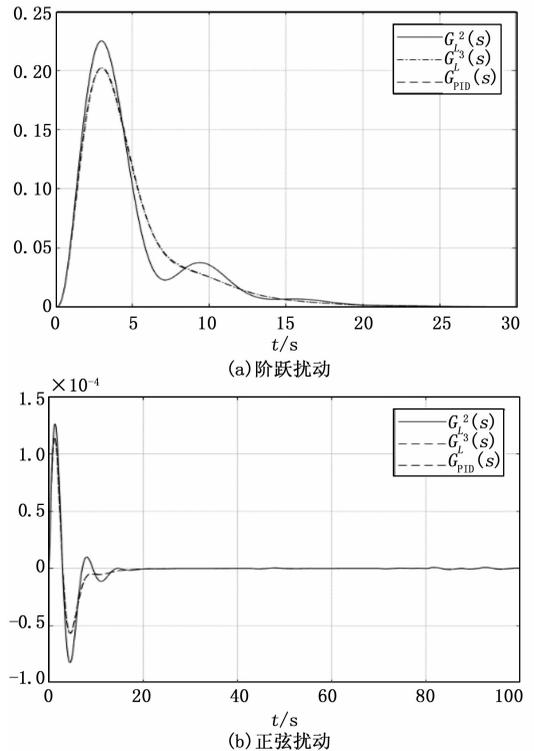


图 8 高阶无时滞对象 $G_{p2}(s)$ 的扰动响应

表 7 抗扰性能 IAE

	$G_L^2(s)$	$G_L^3(s)$	$G_{PID}(s)$
阶跃 J_{IAE}	9.9920×10^{-1}	9.9957×10^{-1}	9.9957×10^{-1}
正弦 J_{IAE}	4.9084×10^{-4}	4.1422×10^{-4}	4.1458×10^{-4}

图 9 是非最小相位对象 $G_{p3}(s)$ 的扰动响应过程, 扰动响应曲线难以分辨。

从表 8 所示抗扰性能指标上看, 三种控制器的性能指标非常接近, IAE 数据相差非常小。对于阶跃干扰, $G_L^2(s)$ 控制系统抗扰性能最好, G_{PID} 控制器次之; 而对于正弦干扰, $G_L^3(s)$ 控制系统抗扰性能最好, $G_L^2(s)$ 控制系统次之。

表 8 抗扰性能 IAE

	$G_L^2(s)$	$G_L^3(s)$	$G_{PID}(s)$
阶跃 J_{IAE}	3.7144	3.7377	3.7375
正弦 J_{IAE}	2.1322×10^{-3}	2.1038×10^{-3}	2.1334×10^{-3}

为了能将拉盖尔控制器和 PID 控制器的抗扰性能进行总体排序, 把它们的单项抗扰性能排序列入表 9 中。 $G_L^3(s)$ 控制器的综合平均排序得分 1.5; $G_L^2(s)$ 控制器得分 1.83;

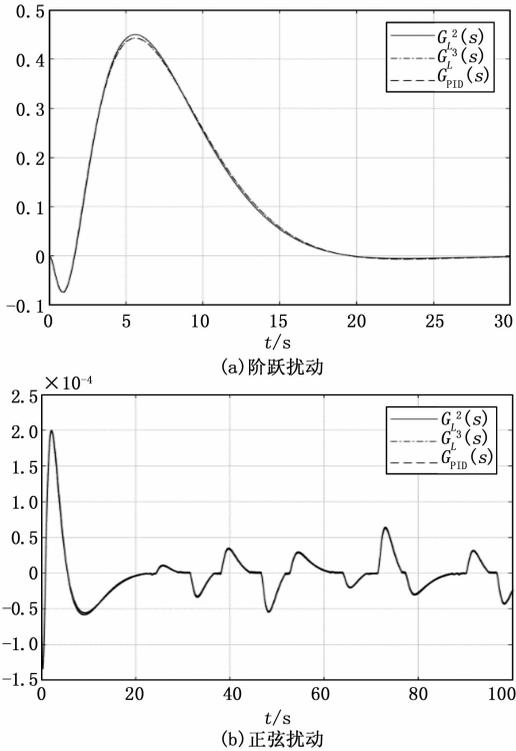


图 9 非最小相位对象 $G_{p3}(s)$ 的扰动响应

表 9 拟拉盖尔控制器和 PID 控制器抗扰性能排序

控制器	$G_{p1}(s)$ (阶跃, 正弦)	$G_{p2}(s)$ (阶跃, 正弦)	$G_{p3}(s)$ (阶跃, 正弦)	平均排序 (阶跃, 正弦)
$G_L^2(s)$	(2, 2)	(1, 3)	(1, 2)	(1.33, 2.33)
$G_L^3(s)$	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(2, 1)
$G_{PID}(s)$	(1, 3)	(2, 2)	(2, 3)	(1.67, 2.67)

G_{PID} 控制器得分 2.17。这意味着，在三类被控对象的扰动实验中，PID 控制器的抗扰性能不如拟拉盖尔控制器。这正如前文频域特性分析那样，高频增益过高，不利于抑制扰动对系统带来的影响。仿真实验的结果与前文频域理论分析相符。

综合系统逼近度和抗扰性能，可以看出，采用拟拉盖尔控制器 $G_L^3(s)$ 具有与 PID 控制器更好的综合性能。

6 结束语

本文利用连续拉盖尔级数，设计了一种拟拉盖尔级数连续控制器模型，并基于模型逼近技术，采用麦克劳林展开获得求解条件，给出了拟拉盖尔控制器和 PID 控制器的参数整定公式。在相同设计方法前提下，通过三类被控对象的仿真实验，对拟拉盖尔控制器和 PID 的逼近度和抗扰性能进行了比较研究。

从系统仿真结果看，拟拉盖尔控制器 $G_L^3(s)$ 可以获得比 PID 控制器更好的逼近特性和抗扰能力。但在控制器参数求解方面，目前拟拉盖尔控制器中的 p 值为人工经验指定，并非最优值。未来可以考虑增加新的约束条件，能够

实现参数 p 的自动求解，以获得更好的逼近效果和抗扰性能。

工业过程控制中，存在大量的单回路控制系统，从本文的研究结果看，凡是应用 PID 控制器的单回路系统，都可以采用拟拉盖尔控制器 $G_L^3(s)$ ，以获得更好的系统性能。

参考文献:

- [1] 李超, 王源昌, 孙锐. 最优控制问题参数化研究—基于勒让德正交多项式逼近 [J]. 数学的实践与认识, 2014, 44 (4): 251-260.
- [2] Prévost M, Rivoal T. Application of Padé Approximation to Euler's constant and Stirling's formula [J]. The Ramanujan Journal, 2020 (4): 1-19.
- [3] Lee Y W. Book Reviews: Statistical Theory of Communication [J]. Science, 1960, 132 (3439): 1546-1547.
- [4] Wiener N. The theory of prediction [J]. Modern Mathematics for the Engineer, 1956 (1): 165-190.
- [5] 沈玉阶, 赵明旺. 借助修改拉盖尔多项式逼近带噪声模型的连续系统辨识 [J]. 武汉钢铁学院学报, 1995 (2): 213-218.
- [6] Gough B, Kay J T. Kraft continuous digester effective alkali control [J]. IEEE Industry Applications Magazine, 1997, 3 (4): 48-53.
- [7] Zervos C C, Bélanger P R, Dumont G A. On PID Controller Tuning using Orthogonal Series Identification [J]. Automatica, 1988, 24 (2): 165-175.
- [8] Fu Y, Dumont G A. Optimum time scale for discrete Laguerre network [J]. Automatic Control IEEE Transactions on, 1993, 38 (6): 934-938.
- [9] Zervos C C, Dumont G A. Deterministic adaptive control based on Laguerre series representation [J]. International Journal of Control, 1988, 48 (6): 2333-2359.
- [10] Gough B., Kay J, Kovac S, et al. Advanced control of steam header pressure and reel brightness - It virtually eliminated the venting of steam [J]. Pulp and Paper Canada - Ontario -, 2002, 103 (1): 54-56.
- [11] 崔晓波, 陈雨亭, 秦文炜, 等. 多模型块结构 Laguerre 函数预测控制在再热汽温系统中的应用 [J]. 东南大学学报 (自然科学版), 2013 (4): 133-138.
- [12] 张海涛, 陈宗海, 李嗣福, 等. 多变量系统 Laguerre 预测控制算法及其改进 [J]. 控制工程, 2004, 11 (1): 55-58.
- [13] 郭伟, 张鹏程, 李涛, 等. 多变量 Laguerre 函数分数阶 PID 预测控制及其在火电机组负荷控制中的应用 [J]. 中国科技论文, 2019, 14 (3): 340-346.
- [14] Adel M E, Makoudi M, Radouane L. Decentralized adaptive control of linear interconnected systems based on Laguerre series representation [J]. Pergamon Press, Inc. 1999, 35 (11): 1873-1881.
- [15] 郭伟, 乔东东, 李涛, 等. CFB 锅炉床温 Laguerre 函数

模型分数阶 PID 预测控制 [J]. 热力发电, 2018, 47 (6): 121-126.

[16] 陈晓龙, 陈政石, 刘美. 基于 Laguerre 函数预测控制模型的仿人智能控制 [J]. 茂名学院学报, 2008, 18 (6): 41-45.

[17] Zervos C C, Dumont G A. Deterministic adaptive control based on Laguerre series representation [J]. International Journal of Control, 1988, 48 (6): 2333-2359.

[18] 夏伯锴, 袁璞. 基于 Laguerre 函数模型的大纯滞后系统预测控制 [J]. 石油大学学报 (自然科学版), 2002 (6): 110-112.

[19] 陈兵芽, 张小海. PID 参数自整定中的新方法 [J]. 南昌大学学报 (工科版), 2007, 29 (3): 246-248.

[20] 王繁珍, 陈增强, 姚向峰, 等. 基于频域的 PID 广义预测控制器的鲁棒性分析 [J]. 中国工程科学, 2006 (10): 70-74.

[21] 欧林林, 顾诞英, 张卫东. 基于幅值裕度和相位裕度的 PID 参数最优整定方法 [J]. 控制理论与应用, 2007 (5): 837-840.

[22] 杨启文, 张孜文, 曾韵之, 等. 基于期望系统的 PID 频域逼近设计 [J]. 计算机测量与控制, 2020, 028 (2): 97-102, 107.

[23] 杨启文, 阳外玲, 薛云灿, 等. 基于 Maclaurin 展开的时间绝对误差积分次优时滞系统设计 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28 (12): 1831-1836.

[24] 杨启文, 阳外玲, 薛云灿, 等. 基于 Maclaurin 展开的 PID 设计与无模型自整定 [J]. 控制与决策, 2011, 26 (4): 611-614.

[25] 许鸣珠, 刘贺平, 王允建. 基于 Laguerre 模型的预测函数控制及其稳定性分析 [J]. 控制与决策, 2008 (5): 515-519.

(上接第 64 页)

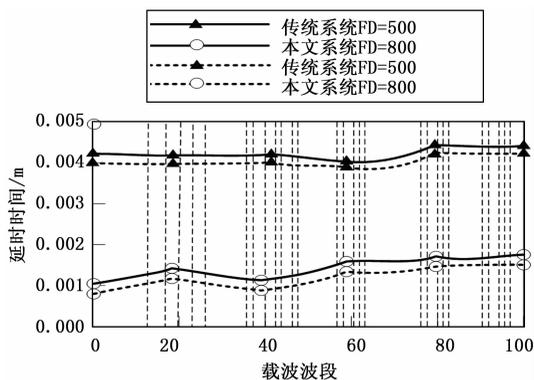


图 8 延时检测对比实验结果

移动通信随机接入前导检测中实用性好, 可以提高对发送信号的检测效果, 起到积极地作用。

4 结束语

本文主要针对低轨卫星的移动通信随机接入前导检测问题, 根据低轨卫星的通信系统和信号载波传输范围等特征, 提出基于 MRLS 的低轨卫星移动通信随机接入前导检测系统。具体设计了前导检测系统的硬件设施, 然后根据前导序列算法, 融入了对信号序列子载波的归一化处理, 设计了一种分段式的 MRLS 级联前导序列检测算法, 通过对根序列进行共轭相乘运算和差分相关检验, 更加具体地对每段信号序列进行检测, 较大程度上降低了子载波偏频和信噪比对检测结果的影响。并通过实验研究验证了检测系统具有良好的实际应用效果, 检测系统有很强的抗噪能力, 减少了检测的延时时长, 降低了误检率, 提高了检测的真实性准确性。研究的检测系统能够为低轨卫星移动通信检测领域的相关研究提供一定的技术参考, 从而推动我国卫星通信检测技术的发展进步。

参考文献:

- [1] 沈俊, 陈曦, 赵新胜. 低轨卫星通信系统中的一种波束小区切换算法 [J]. 电讯技术, 2020, 60 (4): 439-447.
- [2] 丁睿, 刘召, 甄立, 等. 低轨 LTE 卫星随机接入前导设计及检测算法研究 [J]. 电讯技术, 2018, 58 (10): 23-28.
- [3] 刘洋, 刘武, 戴媛媛, 等. 面向应急通信的低轨短数据通信星座优化设计 [J]. 现代电子技术, 2019, 42 (5): 27-30.
- [4] 余鑫, 金小军, 莫仕明, 等. 基于北斗 B3 频点的低轨卫星实时定轨性能评估 [J]. 浙江大学学报 (工学版), 2020, 54 (3): 170-177.
- [5] 陈山枝. 关于低轨卫星通信的分析及我国的发展建议 [J]. 电信科学, 2020, 36 (6): 5-17.
- [6] 林丹丹, 马文平, 罗炼飞. 一种高速场景中的前导序列设计与检测方案 [J]. 测控技术, 2019, 38 (2): 103-107.
- [7] 郑俏, 孟婉婷, 马德皓, 等. 低轨卫星的北斗反射信号海洋覆盖分析 [J]. 宇航计测技术, 2020, 40 (5): 53-59.
- [8] 韦芬芬, 刘晓旭, 谢继东, 等. 低轨卫星物联网多址接入方式研究 [J]. 计算机技术与发展, 2019, 29 (5): 116-120.
- [9] 崔雪伟, 张更新, 谢继东, 等. 低轨卫星物联网数据传输流程设计 [J]. 计算机技术与发展, 2019, 29 (9): 128-134.
- [10] 方善传, 杜兰, 高云鹏, 等. LEO 卫星轨道根数型星历参数与接口设计 [J]. 测绘学报, 2019, 48 (2): 68-76.
- [11] 刘帅军, 胡月梅, 范春石, 等. 低轨卫星星座动态波束关闭算法 [J]. 通信学报, 2020, 41 (4): 190-196.
- [12] 王丹, 张怡凡, 杜颜敏. 基于 5G 系统的随机接入前导检测算法 [J]. 光通信研究, 2020 (1): 47-51.
- [13] 王友存, 郭金运, 周茂盛, 等. 基于多颗低轨卫星的 SLR 台站坐标几何解算方法 [J]. 地球物理学报, 2020, 63 (12): 49-60.
- [14] 于秀兰, 王思仪. 基于 Ka 频段的低轨卫星自适应信息传输方案 [J]. 计算机科学, 2019, 46 (11): 72-79.
- [15] 杨建国, 王芹英, 王海波. Ka 频段低轨遥感卫星数传接收链路设计 [J]. 遥测遥控, 2019, 40 (6): 71-76.