

鲁棒边缘粒子滤波及在目标跟踪中应用

王宗原¹, 周卫东²

(1. 哈尔滨工程大学 数学科学学院, 哈尔滨 150001;

2. 哈尔滨工程大学 智能科学与工程学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 边缘粒子滤波是组合导航和目标跟踪中状态估计的高效方法; 文章目的是研究附加量测噪声具有时变未知方差的鲁棒边缘粒子滤波的算法并对算法仿真验证; 设计方法是使用 Rao-Blackwellised 原则实现混合模型中状态降维, 然后状态与量测方差同时分别估计; 量测分布模型设置为具有鲁棒性质的学生 t 分布, 通过这种量测似然模型得到粒子权值; 变分推断方法加入混合滤波方案进行量测噪声方差参数的实时递推估计; 重采样阶段粒子权值与状态及噪声参数一起进行重采样, 结果是给出状态与噪声参数估计的鲁棒边缘粒子滤波; 通过对常速目标运动跟踪模型量测噪声方差渐变和突变两种情况的仿真设置分析, 验证了所提算法在量测方差变化情况下性能优于边缘粒子滤波算法的结论。

关键词: 贝叶斯估计; 混合模型; 变分推断; 学生 t 分布; 目标跟踪

Robust Marginalized Particle Filter and Its Application in Target Tracking

WANG Zongyuan¹, ZHOU Weidong²

(1. School of Mathematical Sciences, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China;

2. School of Intelligent Science and Control Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: Marginalized particle filter is an efficient estimation method for navigation and target tracking. The purpose of this paper is to study the marginalized filter algorithm with time-varying unknown measurement noise variance. The design method is to achieve state dimensionality reduction and estimation of state and measurement variance respectively by using Rao-Blackwellised idea. The measurement distribution model is set as the robust student t-distribution, and the particle weights are obtained through the measurement likelihood model. In this paper, a real-time recursive estimation of the variance parameters of measurement noise is performed by combining the mixed filtering scheme with the variational inference method. In the resampling stage, the particle weights are resampled together with the state and noise parameters, as a result, robust marginalized particle filter is presented after the state and noise parameters are estimated. Through the simulation analysis of two time-varying cases of gradual change and abrupt change of measurement noise variance of the given target motion model, the conclusion that the performance of the proposed algorithm is better than that of the marginalized particle filter in the case of time-varying measurement variance is verified.

Keywords: Bayesian estimation; mixed model; variational inference; student-t distribution; target tracking

0 引言

滤波是基于从初始时间到当前时间的噪声测量对当前状态进行估计的一种方法。已经被广泛应用于许多领域, 如目标跟踪、导航、机器人控制和信号处理^[1-4]等。粒子滤波是利用加权粒子求和方法进行非线性状态空间模型状态估计的高效方法。但是高维状态如果直接用粒子滤波求解会产生维数灾难, 导致粒子滤波崩溃而无法应用^[3]。为了提高粒子滤波广泛的实际应用性, 目前普遍关注的是从系统模型结构出发探究其是否具有条件线性子结构, 从而通过状态降维方法进行状态估计。通过查阅已有文献可知, 这一类模型在导航和目标跟踪领域广泛存在。目前估计最有效方法是利用 Rao-Blackwellised 思想设计的粒子滤波 (RBPF), 或称为边缘粒子滤波^[5], 它将粒子滤波与线性最

优的卡尔曼滤波巧妙融合完成整体状态估计。

边缘粒子滤波由于其更优异的滤波设计方案, 一经出现在导航和目标跟踪及动态贝叶斯网络中就取得成功应用, 而且为适应不同系统模型及量测出现的各种新问题, 近几年来研究人员对 RBPF 及其不同改进形式进行了广泛研究, 例如, 文献 [6] 中提出用递推期望最大化方法开发具有跳跃马尔科夫链和系统结构分解的 Rao-Blackwellised 粒子滤波算法; 同时文献 [7] 利用 Rao-Blackwellised 准则结合 RBPF 平滑解决混合线性状态空间模型具有量测失序的 RBPF 算法性能下降问题, 通过标准常加速模型的仿真结果, 表明所提算法精度具有超过 RBPF 精度 10% 的性能; 再有文献 [8] 考虑了混合线性模型线性状态方程噪声之间及状态方程噪声与量测噪声相依赖的情况, 利用格莱姆-施密特解耦方法实现全部噪声协方差矩阵的对角化形式, 并在

收稿日期: 2021-05-19; 修回日期: 2021-06-30。

基金项目: 国家自然科学基金(61773133)。

作者简介: 王宗原(1977-), 男, 黑龙江人, 博士, 讲师, 主要从事信息融合及在导航与目标跟踪中应用方向的研究。

引用格式: 王宗原, 周卫东. 鲁棒边缘粒子滤波及在目标跟踪中应用[J]. 计算机测量与控制, 2021, 29(12): 209-214.

常速目标跟踪模型仿真中取得优于标准 RBPF 精度的结果；进一步文献 [9] 将 RBPF 框架扩展到系统全部为非线性方程的模型中得到分散粒子滤波 (DPF)，不同于卡尔曼滤波粒子滤波混合求解过程，DPF 通过两次权值及两次重采样计算得到两次粒子混合估计结果。由以上的文献描述可见 RBPF 算法适用各种新出现系统问题的改进形式已被广泛探究，并且得到优于标准 RBPF 的结果。但据作者所知，RBPF 量测噪声参数未知的改进形式还没有被涉及。

虽然模型参数未知的贝叶斯滤波已通过状态扩维法^[10]或交互式多模型 (IMM) 法^[11]进行了研究，但它们对噪声参数未知情形还无法解决。近期文献 [12-13] 针对噪声异常情况通过变分推断理论给出鲁棒高斯近似滤波算法，并在目标跟踪模拟中得到成功应用，但标准无迹卡尔曼滤波 (UKF) 或扩展卡尔曼滤波 (EKF) 由于样本点有限或线性化误差原因对于相同导航或目标跟踪问题精度低于边缘粒子滤波或其变形的 DPF^[14-15]。另外，水下运载器地形辅助导航^[16]、重力梯度辅助导航等组合导航估计方法也均采用 RBPF^[17]，这是因为这些基于数据库图的地球物理场导航只能通过粒子表示载体全部可能位置，而且随着粒子数增加，导航精度还可能继续提高。

RBPF 的另一个重要应用是在目标运动分析 (TMA) 领域，也即目标跟踪，这属于通过方位测量对运动目标状态进行估计的范畴^[18]。由单运动观测器收集量测形式已在无源传感领域 (如声纳或雷达) 具有广泛应用^[19]，过去几年成为研究热点。现在关注的是用递推贝叶斯方法得到状态后验概率密度函数 (PDF)。TMA 的特点通过观测平台的运动对目标距离进行观测。下面将讨论贝叶斯 TMA 的平面跟踪问题，它将从一维方位量测集获得四维状态后验 PDFs，状态包含目标位置和速度。但高机动目标跟踪通常会产生量测噪声异常问题^[12-13]，影响量测噪声因素有接触实际角度、目标的距离和相对速度、信噪比、接收阵列形状、传播信道等等，这些因素很少能准确知道并且随时间推移而变化，因此工程实际中精确知道量测方差几乎是不可能的，这就造成 TMA 量测噪声方差时变未知且包含异常值的特性。

注意到现有边缘粒子滤波及其各种改进形式都对量测噪声时变的目标跟踪问题给出有效解决方案，这或许是由于如何在 RBPF 引入噪声参数实时估计的方法还没有被探究。为了设计具有量测方差自适应估计能力的混合系统模型的鲁棒边缘粒子滤波算法，本文将探究使用 Rao-Blackwellised 原理及变分推断公式对混合系统量测噪声异常问题进行状态估计，并在典型 TMA 的平面跟踪模型中进行仿真实证。

1 混合模型及边缘粒子滤波

1.1 目标跟踪模型

为引入所研究的一般混合模型，这里先介绍一种特殊的混合模型，二维平面单观测站常速目标跟踪模型^[18-19]，

说明如下：假设目标在 k 时刻状态向量为 $\mathbf{X}_k^t = [\mathbf{x}_k^t \ \mathbf{v}_k^t \ \mathbf{y}_k^t \ \mathbf{v}_k^t]^{T^t}$ ，它建立在二维笛卡尔坐标系上且包含了目标的全部信息，分别是位置 $[\mathbf{x}_k^t \ \mathbf{y}_k^t]^{T^t}$ 和速度 $[\mathbf{v}_k^t \ \mathbf{v}_k^t]^{T^t}$ ，假设观测站运动状态向量已知为 $\mathbf{X}_k^o = [\mathbf{x}_k^o \ \mathbf{v}_k^o \ \mathbf{y}_k^o \ \mathbf{v}_k^o]^{T^o}$ ，目标运动观测模型表示为相对状态向量，表达式为 $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k^t - \mathbf{X}_k^o = [\mathbf{x}_k \ \mathbf{v}_k \ \mathbf{y}_k \ \mathbf{v}_k]^{T^t}$ ，状态方程表达式为：

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{X}_k - \mathbf{U}_{k+1,k} + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k \quad (1)$$

$$\text{其中：} \mathbf{F}_k = \mathbf{I}_2 \otimes \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{T}_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{为传递矩阵，} \mathbf{G}_k = \mathbf{I}_2 \otimes \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{T}_k}{2} \\ \mathbf{T}_k \end{pmatrix}$$

噪声矩阵， \otimes 为克罗内克积， \mathbf{T}_k 是采样间隔，一般为常量 $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}$ ， $\mathbf{U}_{k+1,k}$ 为考虑观测站加速的常矩阵 $\mathbf{U}_{k+1,k} = \mathbf{X}_{k+1}^o - \mathbf{F}_k \mathbf{X}_k^o$ ，过程噪声 $\mathbf{w}_k \sim N(0, \mathbf{Q}_k)$ ，方差 $\mathbf{Q}_k = \sigma_w^2 \mathbf{I}_2$ 。

纯角度观测模型为：

$$\mathbf{z}_k = \text{atan2}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

$\text{atan2}(\cdot)$ 表示四象限反正切函数，此处得到 k 时刻目标真实角度。观测噪声 $\mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$ ， \mathbf{R}_k 可能是时变且未知的。

1.2 混合模型及滤波

对式 (1)、(2) 组成目标跟踪系统模型进行一般化引申，得到与组合导航及定位相同的如下线性 \ 非线性状态混合模型表达式：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^n &= \mathbf{f}_k^n(\mathbf{x}_k^n) + \mathbf{A}_k^n \mathbf{x}_k^l + \mathbf{G}_k^n \mathbf{w}_k^n \\ \mathbf{x}_{k+1}^l &= \mathbf{f}_k^l(\mathbf{x}_k^l) + \mathbf{A}_k^l \mathbf{x}_k^l + \mathbf{G}_k^l \mathbf{w}_k^l \\ \mathbf{z}_k &= h(\mathbf{x}_k^l) + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (3)$$

其中： $\mathbf{x}_k^n \in i^n$ 、 $\mathbf{x}_k^l \in i^n$ 分别表示非线性状态和线性状态， $\mathbf{A}_k^n, \mathbf{A}_k^l, \mathbf{G}_k^n$ 和 \mathbf{G}_k^l 为相应维数系数阵， $\mathbf{w}_k = (\mathbf{w}_k^{nT}, \mathbf{w}_k^{lT})^T$ 为具有方差阵 $\mathbf{Q}_k = \text{blockdiag}[\mathbf{Q}_k^n \ \mathbf{Q}_k^l]$ 的白噪声，矩阵中互协方差块 $\mathbf{Q}_k^{nl} = 0$ ，若是非零情形利用解噪声关联法可将 \mathbf{Q}_k 化为分块对角阵^[8]， $\mathbf{z}_k \in i^m$ ， $h(\cdot) \in i^m$ 为非线性函数， \mathbf{v}_k 为具有时变方差的量测噪声。

先忽略量测噪声变化的情况，RBPF 的状态估计推导如下，联合状态的后验可分解为：

$$p(\mathbf{x}_{1:k} | \mathbf{Z}_k) = p(\mathbf{x}_k^l | \mathbf{x}_{0:k}^n) p(\mathbf{x}_{0:k}^n | \mathbf{Z}_k) \quad (4)$$

其中： $\mathbf{Z}_k = \{\mathbf{z}_i\}_{i=1}^k$ 表示已有全部量测，线性状态后验 $p(\mathbf{x}_k^l | \mathbf{x}_{0:k}^n)$ 不含 \mathbf{Z}_k 是由于当 $\mathbf{x}_{0:k}^n$ 确定， \mathbf{Z}_k 不再提供额外信息。

依据 Chapman-Kolmogorov 公式，并根据高斯分布引理^[12]：

$$\int N(\mathbf{x} | \Phi \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{d}, \Sigma) N(\boldsymbol{\lambda} | \boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}) d\boldsymbol{\lambda} = N(\mathbf{x} | \Phi \boldsymbol{\mu} + \mathbf{d}, \Phi \mathbf{P} \Phi^T + \Sigma)$$

得到非线性状态 \mathbf{x}_k^n 预测表达式：

$$p(\mathbf{x}_k^n | \mathbf{Z}_{k-1}) =$$

$$\int p(\mathbf{x}_k^n | \mathbf{x}_{k-1}^n, \mathbf{x}_{k-1}^l) N(\mathbf{x}_{k-1}^l | \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^l, \hat{\mathbf{P}}_{k-1|k-1}^l) d\mathbf{x}_{k-1}^l \quad (5)$$

可见前一时刻线性状态后验对非线性状态预测是附加

噪声, 由于高斯过程噪声, 非线性状态预测是如下高斯分布形式:

$$p(\mathbf{x}_k^n | \mathbf{x}_{k-1}^n, \mathbf{Z}_{k-1}) = N(\mathbf{x}_k^n | f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}^n) + \mathbf{A}_{k-1}^n \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^n, \mathbf{A}_{k-1}^n \hat{\mathbf{P}}_{k-1|k-1}^n \mathbf{A}_{k-1}^{nT} + \mathbf{G}_{k-1}^n \mathbf{Q}_{k-1}^n \mathbf{G}_{k-1}^{nT}) \quad (6)$$

线性状态 \mathbf{x}_k^l 的估计, 由于量测方程不含 \mathbf{x}_k^l , 以式 (3) 的第一个状态方程为 \mathbf{x}_k^l 附加量测方程:

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{A}_k^n \mathbf{x}_k^l + \mathbf{G}_k^n \mathbf{w}_k^n \quad (7)$$

其中: $\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k|k-1}^n - f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}^n)$, 它与式 (3) 中第二个方程构成关于 \mathbf{x}_k^l 的线性高斯状态空间模型, 进行卡尔曼滤波:

$$p(\mathbf{x}_k^l | \mathbf{x}_{1:k}^l) = N(\mathbf{x}_k^l | \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^l, \mathbf{P}_{k|k}^l) \\ p(\mathbf{x}_{k+1}^l | \mathbf{x}_{1:k+1}^l, \mathbf{Z}_k) = N(\mathbf{x}_{k+1}^l | \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}^l, \mathbf{P}_{k+1|k}^l) \quad (8)$$

其中参数为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^l = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^l + \mathbf{K}_k (\mathbf{s}_k - \mathbf{A}_k^n \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^l) \\ \mathbf{P}_{k|k}^l = \mathbf{P}_{k|k-1}^l - \mathbf{K}_k \mathbf{A}_k^{nT} \mathbf{P}_{k|k-1}^l \\ \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}^l \mathbf{A}_k^{nT} (\mathbf{A}_k^n \mathbf{P}_{k|k-1}^l \mathbf{A}_k^{nT} + \mathbf{G}_k^n \mathbf{Q}_k^n \mathbf{G}_k^{nT})^{-1} \\ \mathbf{x}_{k+1}^l | k = \mathbf{A}_k^l \mathbf{x}_k^l + f_k^l(\mathbf{x}_k^l) \\ \mathbf{P}_{k+1|k}^l = \mathbf{A}_k^l \mathbf{P}_{k|k}^l \mathbf{A}_k^{lT} + \mathbf{G}_k^l \mathbf{Q}_k^l \mathbf{G}_k^{lT} \quad (9)$$

状态 \mathbf{x}_k^n 在新量测 \mathbf{z}_k 到达后权值更新是:

$$\omega_k^{(i)} \propto \hat{\omega}_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{n(i)}) \quad (10)$$

在噪声方差不变且为高斯分布情况下, 量测似然 $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{n(i)})$ 为高斯分布, 重要性函数为 $q(\mathbf{x}_k^{n(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{n(i)}, \mathbf{Z}_k) = p(\mathbf{x}_k^{n(i)} | \mathbf{x}_{k-1}^{n(i)})$. 将权值标准化后记为 $\{\tilde{\omega}_k^{(i)}\}_{i=1}^N$, 序列 $\{\hat{\omega}_{k-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$ 表示前一时刻重采样后的权值。

非线性状态 \mathbf{x}_k^n 后验表达式:

$$p(\mathbf{x}_k^n | \mathbf{Z}_k) = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^{(i)} \delta(\mathbf{x}_k^n - \mathbf{x}_k^{n(i)}) \quad (11)$$

线性状态 \mathbf{x}_k^l 后验是高斯状态粒子和:

$$p(\mathbf{x}_k^l | \mathbf{Z}_k) = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^{(i)} N(\mathbf{x}_k^l | \hat{\mathbf{x}}_k^{l(i)}, \hat{\mathbf{P}}_k^{l(i)}) \quad (12)$$

$\mathbf{x}_k^{l(i)}$ 中上标 i 表示对应非线性状态 $\mathbf{x}_k^{n(i)}$ 的线性状态粒子, 式 (12) 表示线性后验是高斯加权形式。

2 量测噪声鲁棒 RBPF 推导

下面考量量测噪声方差未知的情形。采用将量测噪声方差视为先验分布已知随机变量, 并把它应用到递推模型中, 假定状态与量测噪声方差相互独立有:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{R}_{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{R}_k | \mathbf{R}_{k-1}) \quad (13)$$

其中: $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ 状态递推式, $p(\mathbf{R}_k | \mathbf{R}_{k-1})$ 方差递推式。利用贝叶斯滤波公式和 Rao-Blackwellised 法则, 可用两种方式同时求解状态和方差后验, 第一种是如下分解:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k | \mathbf{Z}_k) = p(\mathbf{R}_k | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{Z}_k) p(\mathbf{x}_k^l | \mathbf{x}_k^n) p(\mathbf{x}_k^n | \mathbf{Z}_k) \quad (14)$$

其中: 要求 $p(\mathbf{x}_k^n | \mathbf{Z}_k)$ 用粒子滤波求解, 方差条件后验 $p(\mathbf{R}_k | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{Z}_k)$ 解析可解; 第二种分解方式为:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k | \mathbf{Z}_k) = p(\mathbf{x}_k^l | \mathbf{x}_k^n, \mathbf{Z}_k) p(\mathbf{x}_k^n | \mathbf{R}_k, \mathbf{Z}_k) p(\mathbf{R}_k | \mathbf{Z}_k) \quad (15)$$

其中: 方差边缘后验 $p(\mathbf{R}_k | \mathbf{Z}_k)$ 要求用粒子滤波求解, 状态后验 $p(\mathbf{x}_k^n | \mathbf{R}_k, \mathbf{Z}_k)$ 要解析可解, 但这与 \mathbf{x}_k^n 要用粒子滤波求解不相符, 所以第二种分解方案不适用于本课题研究

目标。

要实现鲁棒估计, 设置量测模型为具有尺度矩阵 \mathbf{A}_k 自由度 ν_k 的对称学生 t 分布是一种有效的设计方法, 对称学生 t 分布记为 $\text{St}(\mathbf{x}_k | 0, \mathbf{A}_k, \nu_k)$ 。噪声参数分布求解需要联合概率密度边缘化得到, 但是高维概率密度积分计算较为复杂, 难以直接得到解析解, 采用变分推断获得自由形式密度函数^[2], 通过最小化近似密度函数与真实密度分布之间的 Kullback-Leibler 散度, 获取最佳近似分布。变分推断要求选取的概率分布属于共轭指数域, 计算时先得到包含参数集 Θ 的联合概率密度 $p(\Theta, \mathbf{Z})$, 然后利用变分推断得到参数后验分布, 进而得到分布参数的递推表达式。伽马分布隐变量 u_k 将 t 分布尺度矩阵 \mathbf{A}_k 与实际方差 \mathbf{R}_k 相对应, 表达式为 $E[\mathbf{R}_k^{-1}] = E\left[\frac{\mathbf{A}_k}{E[u_k]}\right]$ 。

变分推断得到的后验近似分布公式:

$$q(\Theta_i) \propto \exp\{E_{q(\Theta_{-i})}[\ln p(\Theta | \mathbf{Z})]\} \quad (16)$$

其中: $E_{q(\Theta_{-i})}[\ln p(\Theta | \mathbf{Z})]$ 表示条件联合 PDF 对异于 Θ_i 的其它参数求期望^[2]。下面给出适用于所提混合模型的具体推导过程, 利用贝叶斯公式, 非线性状态及量测噪声参数条件联合分布表示为:

$$p(\mathbf{x}_k^{n(i)}, \mathbf{A}_k, \nu_k | \mathbf{Z}_k) \propto p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{n(i)}, \mathbf{u}_k, \mathbf{A}_k) p(\mathbf{A}_k, \mathbf{u}_k, \nu_k) \quad (17)$$

其中: $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{n(i)}, \mathbf{u}_k, \mathbf{A}_k)$ 是由式 (3) 和 t 分布确定的量测似然, u_k 为新引入的服从伽马分布隐变量, 因为具有非封闭性 t 分布可以表示成由伽马分布的变量 u_k 调节尺度矩阵 \mathbf{A}_k 的具有封闭性质高斯分布。由此量测似然为如下分层高斯形式:

$$\begin{cases} p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{n(i)}, \mathbf{u}_k, \mathbf{A}_k) = N(\mathbf{z}_k | h(\mathbf{x}_k^{n(i)}), (\mathbf{u}_k \mathbf{A}_k)^{-1}) \\ p(\mathbf{u}_k | \nu_k) = G\left(\mathbf{u}_k \mid \frac{\nu_k}{2}, \frac{\nu_k}{2}\right) \end{cases} \quad (18)$$

$G(\cdot | \alpha, \beta)$ 表示超参数为 α, β 的伽马分布, 伽马分布与高斯分布一样都属于具有封闭性质共轭指数族。式 (17) 右端第一个表达式为高斯分布。第二个表达式噪声参数即尺度矩阵、隐变量及自由度的联合分布 $p(\mathbf{A}_k, \mathbf{u}_k, \nu_k)$, 设为伽马分布连乘积, 又根据概率乘法公式及式 (18) 的第二个式子, 有如下表达式:

$$p(\mathbf{A}_k, \mathbf{u}_k, \nu_k) = \left(\prod_{jj=1}^D G(\Lambda_{k-1}^{jj} | \alpha_{k-1}^{jj}, \beta_{k-1}^{jj})\right) \times G\left(\mathbf{u}_k \mid \frac{\nu_k}{2}, \frac{\nu_k}{2}\right) G(\nu_k | \nu_k^1, \nu_k^2)$$

其中: 上角标 jj 表示对角尺度矩阵第 jj 个分量, $jj \in \{1, 2, \dots, m\}$ 。注意此时状态粒子权值计算式:

$$\omega_k^{(i)} = \hat{\omega}_{k-1}^{(i)} p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{n(i)}, \Theta_k^{(i)} | k-1) \quad (19)$$

注意权值计算时右面量测似然是用估计的尺度矩阵与自由度的 t 分布表示。由于参数粒子依赖状态粒子, 因此这也是参数粒子权值表达式。

为了表示噪声参数的变化情况, 噪声参数预测引入波动参数 $\rho \in (0, 1)$, 噪声超参数预测^[2, 20]表达式为:

$$\alpha_{k-1}^{jj} = \rho \alpha_{k-1}^{jj} + (1-\rho) \beta_{k-1}^{jj} = \rho \beta_{k-1}^{jj} \quad (20)$$

变分推断得尺度矩阵、隐变量及自由度参数变分后验

如下。

在 (16) 中令 $\Theta_i = \mathbf{A}_k$ ，计算尺度矩阵变分后验 PDF 对数为：

$$\ln q(\mathbf{A}_k) = -\frac{E[u_k]}{2}(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k^{n(i)}))^T \mathbf{A}_k (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k^{n(i)})) + \sum_{j=1}^m [(\alpha_{k|k-1}^{jj} - 1) \ln \Lambda_k^{jj} - \beta_{k|k-1}^{jj} \Lambda_k^{jj}]$$

通过与先验比较， $q(\mathbf{A}_k) = \prod_{j=1}^D G(\Lambda_k^{jj} | \alpha_{k|k}^{jj}, \beta_{k|k}^{jj})$ ，相应超参数更新为：

$$\alpha_{k|k}^{jj(i)} = \alpha_{k|k-1}^{jj(i)} + \left(\frac{1}{2}\right) \beta_{k|k}^{jj(i)} = \beta_{k|k-1}^{jj(i)} + \left(\frac{1}{2}\right) E[u_k] (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k^{n(i)}))_{jj}^2 \quad (21)$$

可见尺度矩阵更新的超参数中包含隐变量的期望 $E[u_k]$ 。

在 (16) 中，令 $\Theta_i = u_k$ ，计算隐变量 u_k 变分后验 PDF $q(u_k)$ 的对数为：

$$\ln q(u_k) = \frac{E[v_k] - 1}{2} \ln u_k - \frac{E[v_k]}{2} u_k + \frac{m}{2} \ln u_k + \frac{1}{2} \ln |\mathbf{A}_k| - \frac{u_k}{2} [(\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k^{n(i)}))^T (E[\mathbf{A}_k]) (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k^{n(i)}))] + C_u$$

参数 u_k 变分后验服从 $G(u_k^{(i)} | \nu_k^{1(i)}, \nu_k^{2(i)})$ 分布，通过与先验比较，超参数递推式为：

$$\nu_k^{1(i)} = \left(\frac{1}{2}\right) (E[v_k] + m) \nu_k^{2(i)} = \left(\frac{1}{2}\right) (E[v_k] + (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k^{n(i)}))^T E[\mathbf{A}_k] (\mathbf{z}_k - h(\mathbf{x}_k^{n(i)}))) \quad (22)$$

更新的超参数中包含自由度期望 $E[v_k]$ 和尺度阵期望 $E[\mathbf{A}_k]$ ，式 (21) ~ (22) 中上标 (i) 表示与非线性状态 $\mathbf{x}_k^{n(i)}$ 对应的第 i 个参数粒子。

自由度变分后验计算与线性模型自由度变分后验计算相同，具体过程及结果参见文献 [2]。上式超参数递推可见超参数更新过程会出现参数耦合情况，通过使用设置初始超参数值的固定点迭代方法 [2] 可以解决这个问题。通过概率分布的期望公式，量测噪声分布的参数期望计算为：

$$E[u_k^{(i)}] = \frac{\nu_k^{1(i)}}{\nu_k^{2(i)}}, E[\mathbf{A}_k^{(ij),(i)}] = \frac{\alpha_{k|k}^{(ij)}}{\beta_{k|k}^{(ij),(i)}} E[\mathbf{R}_k^{(ij)}] = \frac{(E[\mathbf{A}_k^{(ij)}])^{-1}}{E[u_k]} \quad (23)$$

所提算法一步运行过程总结如下：

鲁棒边缘粒子滤波算法：

1) $k = 0, i = 1 \cdots N$ ，采样 $\mathbf{x}_{0|0}^{n(i)} \sim p(\mathbf{x}_0^n), \mathbf{x}_{0|0}^{(i)} \sim N(\mathbf{x}_0^l, \mathbf{P}_0)$ ，设定初始尺度矩阵参数 $\alpha_0^{(i)}, \beta_0^{(i)}$ ，初始自由度参数 $a_0^{(i)}, b_0^{(i)}$ ；

2) 对每一个 $\alpha_{k|k-1}$ ：

(1) 从式 (6) 的建议分布提取非线性状态预测 $\alpha_{k|k-1}$ ，

用 (20) 预测超参数 $\alpha_{k|k-1}, \beta_{k|k-1}$ ，

(2) 用式 (8)、(9) 计算线性状态时间更新 $\mathbf{x}_{k|k-1}^l, \mathbf{P}_{k|k-1}^l$ 和量测更新 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^*, \mathbf{P}_{k-1|k-1}^*$ ；

(3) \mathbf{z}_k 对 \mathbf{x}_k^n 的量测更新，依据似然分布表达式，用式 (19) 更新重要性权 $\omega_k^{(i)}$ ，然后标准化，计算 N_{th} ，如果小于设定阈值 N_{th} ，进行包括参数粒子重采样，得到粒子集 $\left\{ \tilde{\mathbf{x}}_k^{n(i)}, \frac{\tilde{\omega}_k^{(i)}}{N} = 1 \right\}$ ，用公式 (20) ~ (22) 进行后验超参数更

新得 $\alpha_{k|k}^{jj(i)}, \beta_{k|k}^{jj(i)}$ 和 $u_k^{(i)}$ 。此时非线性状态 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^n = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^{(i)} \tilde{\mathbf{x}}_k^{n(i)}$ 和

超参数的估计为 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^n = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^{(i)} \tilde{\mathbf{x}}_k^{n(i)}, \hat{\alpha}_{k|k}^{jj} = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^{(i)} \alpha_{k|k}^{jj(i)}, \hat{\beta}_{k|k}^{jj} = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^{(i)} \beta_{k|k}^{jj(i)}$ ；

用式 (23) 进行期望计算。权值计算未重采样有： $\tilde{\omega}_k^{(i)} = \tilde{\omega}_k^{(i)}$ ，重采样： $\hat{\omega}_k^{(i)} = \tilde{\omega}_k^{(i)}$ ；

(4) \mathbf{z}_k 对 \mathbf{x}_k^l 的量测更新，原系统量测方程不包含 \mathbf{x}_k^l ，故 \mathbf{z}_k 无法对 \mathbf{x}_k^l 直接量测更新，在此令 $\mathbf{x}_{k|k}^l = \mathbf{x}_{k|k-1}^l, \mathbf{P}_{k|k}^l = \mathbf{P}_{k|k-1}^l$ ，得线性状态估计的均值和协方差：

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^l = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^{(i)} \mathbf{x}_{k|k}^{l(i)} \hat{\mathbf{P}}_{k|k}^l = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}_k^{(i)} (\mathbf{P}_{k|k}^{(i)} + (\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{l(i)} - \mathbf{x}_{k|k}^{l(i)}) (\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{l(i)} - \mathbf{x}_{k|k}^{l(i)})^T) \quad (24)$$

如果迭代没终止，令 $k = k + 1$ ，从步骤 1 开始重复上述过程。

3 仿真分析比较

为了验证所提鲁棒边缘粒子滤波算法在所给目标跟踪应用中的性能，对 1.1 中目标跟踪模型进行仿真实验。采样间隔 $T_k = 1$ s。根据混合模型分解原理，状态向量分解为 $\mathbf{x}_k^n = [\mathbf{X}_k(1), \mathbf{X}_k(3)]^T, \mathbf{x}_k^l = [\mathbf{X}_k(2), \mathbf{X}_k(4)]^T$ ，上标 l 和 n 分别表示线性和非线性状态，系统状态记作 $\mathbf{x}_k = \{\mathbf{x}_k^{n-1}, \mathbf{x}_k^{l-1}, \mathbf{x}_k^{n-2}, \mathbf{x}_k^{l-2}\}$ ，系统矩阵 \mathbf{F}_k 和 \mathbf{G}_k 分解为：

$$\mathbf{A}_k^n = \mathbf{F}_k([1, 3], [1, 3]), \mathbf{A}_k^l = \mathbf{F}_k([1, 3], [2, 4]) \mathbf{A}_k^n = \mathbf{F}_k([2, 4], [1, 3]), \mathbf{A}_k^l = \mathbf{F}_k([2, 4], [2, 4]) \mathbf{G}_k^n = \mathbf{G}_k([1, 3], :), \mathbf{G}_k^l = \mathbf{G}_k([2, 4], :) \quad (25)$$

过程噪声根方差 $\sigma_w = 0.001$ 。目标初始值设为 $\mathbf{x}_0 = \{-0.05, 0.001, 0.7, -0.055\}^T$ ，初始状态选取 $p(\mathbf{x}_0) = N(\mathbf{x}_0 | \hat{\mathbf{x}}_{0|0}, \mathbf{P}_0)$ ，其中 $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \{0.0, 0.0, 0.4, -0.05\}^T$ ，协方差 $\mathbf{P}_0 = \text{diag} \{[0.1^2 \ 0.005^2 \ 0.1^2 \ 0.01^2]\}$ 。仿真时间 200 s，粒子数 Num = 100，阈值 $N_{th} = \frac{7}{10} * \text{Num}$ ，相比于通常变分噪声突变设置，这里量测噪声为选为如下两种情况：

1) $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_{k-1} + \epsilon_k, \epsilon_k$ 表示量测噪声方差递推式的过程噪声被建模为高斯噪声，即：

$$\epsilon_k \sim N(0, \zeta^2) \quad \zeta^2 = 0.01^2, \text{单位 deg}^2. \quad (26)$$

2) 异常时变:

$$v_k \sim \begin{cases} N(0, \mathbf{R}_k) & \text{w. p. } 0.80 \\ N(0, 100\mathbf{R}_k) & \text{w. p. } 0.20 \end{cases} \quad (27)$$

$\mathbf{R}_k = 0.08^2$, 单位 deg^2 , w. p. 表示以多大概率。初始方差超参数选择应尽可能靠近初始方差, 这里选为: $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 100$, 有 $E[\mathbf{R}_0] = \frac{\alpha_0}{\beta_0} = 0.1^2$ 。设波动因子为 $\rho = 1 - \exp(-4)$ 。

实验通过一次独立实验真实位置和估计位置比较, 及 20 次蒙特卡洛仿真均方根误差来衡量不同算法的性能。均方根误差 (RMSE) 定义式为:

$$RMSE_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sqrt{(\hat{x}_k^{n,1} - x_k)^2 + (\hat{x}_k^{n,2} - y_k)^2} \quad (28)$$

对于所给量测噪声方差设置, 此时标准 RBPF 算法运行经常有失效情况发生, 具体为 RBPF 算法在迭代几个时间步后算法失效, 原因是粒子滤波运行崩溃, 从而导致整个滤波失效。而所提量测鲁棒边缘粒子滤波算法则始终在每次蒙特卡洛仿真时正常稳健运行。

下面将 RBPF 能正常运行情况下 $x-y$ 面轨迹图及东向与北向 RMSE 图进行比较。图 1~2 为第一种噪声情况下与标准 RBPF 算法比较的 RMSE 图及轨迹图。

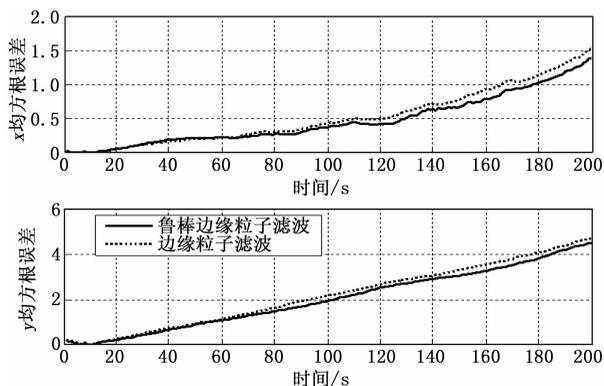


图 1 噪声 1 下所提算法和 RBPF 算法估计轨迹 RMSE 比较图

从图 1 可见, 在 x 轴方向所提算法的状态精度在前 60 s 略等同于 RBPF 算法的精度, 而在 60 s 后精度略高于 RBPF 的精度; 对于 y 轴方向精度可见所提算法的精度始终高于 RBPF 算法。位置及均方根数值如表 1 所示。

表 1 噪声 1 下所提算法和 RBPF 算法目标跟踪性能比较

算法	时间/(s/n)	位置 RMSE/m	X RMSE/m	Y RMSE/m
所提	0.004 2	2.479	0.590	2.408
RBPF	0.001 5	2.660	0.663	2.576

从位置的具体数值上可以看到两种算法对问题描述的目标跟踪问题都有较高的估计精度, 即使所选择的粒子数仅为 100。而所提算法在 X 、 Y 方向的 RMSE 精度上要略高于所比较的 RBPF, 说明在此种量测噪声方差缓慢变化的情

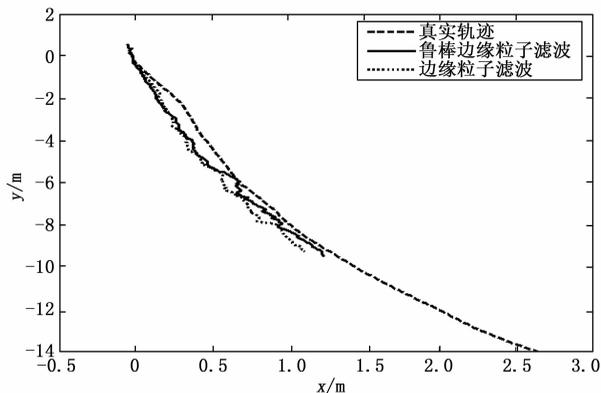


图 2 噪声 1 下真实轨迹与 RBPF 算法和所提算法轨迹比较

况下, 所提具有方差自适应鲁棒边缘滤波算法更具有状态估计优势。

图 3~4 为第二种噪声情况下两种算法的东向与北向 RMSE 及轨迹比较图。从图 3~4 可见, 在 x 轴方向所提算法状态估计精度略高于 RBPF 算法的精度; 对于 y 轴方向精度可见除个别时间点外, 所提算法的状态估计精度对已有 RBPF 算法有较大提高; 相比于 RBPF 位置估计, 所提算法位置估计更靠近真实位置。具体数值如表 2 所示。

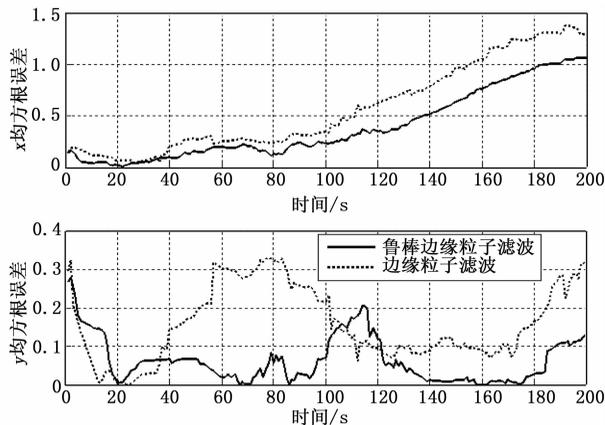


图 3 噪声 2 下所提算法和 RBPF 算法估计轨迹 RMSE 比较图

表 2 噪声 2 下所提算法和 RBPF 在目标跟踪性能比较

算法	时间/(秒/次)	位置 RMSE/m	X RMSE/m	Y RMSE/m
所提	0.004 2	0.009	0.509	0.087
RBPF	0.001 5	0.018	0.711	0.186

第二种噪声情况下, 即使 RBPF 算法能够正常运行, 所提算法的精度更高, 相比于第一种噪声结果优势更加明显, 说明第二种噪声情况下所提算法更具有适用性。

当然, 如果噪声方差是恒定不变且事先精确已知的情況下, 已有 RBPF 算法精度略高于所提算法, 因为所提算法的方差是用算法实时估计的方差计算, 而 RBPF 算法是

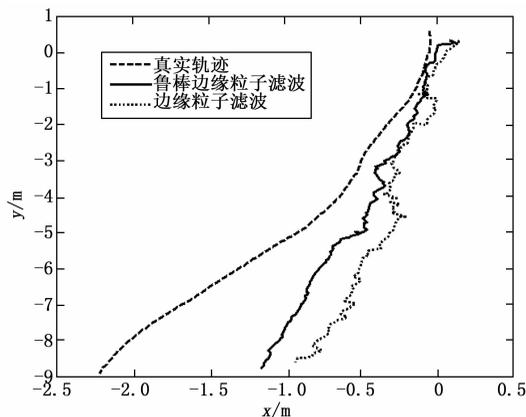


图 4 噪声 2 下真实轨迹与 RBF 算法和所提算法估计轨迹比较

用精确已知的方差，这也解释了为什么第二种噪声情况某小段时间内 RBF 精度高于所提算法。

另外虽然所提算法在 CV 模型中仿真验证，可以验证对常加速度 CA 的目标跟踪问题也同样具有优异性能。另外所提算法单次仿真时间近似为 RBF 算法单次运行时间的 2.5 倍。

4 结束语

由于边缘粒子滤波在导航和目标跟踪中的不可替代性，本文对现有边缘粒子滤波无法解决量测噪声方差未知的问题进行研究，通过将学生 t 分布加入混合模型，利用 Rao-Blackwellised 思想分别实现状态条件降维及参数与状态的同时估计，由此开发出一种鲁棒边缘粒子滤波。文中推导了噪声参数及含有噪声参数状态的递推计算公式，并把所提算法在典型目标跟踪模型中及设置的两种不同量测噪声下进行仿真分析，结果表明这两种情况下都具有更优越的估计性能。

参考文献:

- [1] WANG Z Y, ZHOU W D. Recursive estimation for sensor systems with one-step randomly delayed and censored measurements [J]. IEEE Access, 2020, 8: 11710-11721.
- [2] WANG Z Y, ZHOU W D. Robust linear filter with parameter estimation under student-T measurement distribution [J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2018, 38 (10): 2445-2470.
- [3] WANG Z Y, ZHOU W D. Robust particle filter algorithms for one-step randomly delayed measurements and heavy-tailed noise [J]. Electronics Letters, 2020, 56 (17): 899-901.
- [4] 朱福利, 曾碧, 曹军. 基于粒子滤波的 SLAM 算法并行优化与实现 [J]. 广东工业大学学报, 2017, 34 (2): 92-96.
- [5] SCHON T, GUSTAFSSON F, NORDLUND P J. Marginalized particle filters for mixed linear/nonlinear state space models [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53 (7): 2279-2289.
- [6] SAHA S, HENDEBY G. Rao-Blackwellized particle filter for Markov modulated nonlinear dynamic Systems [C] //Statistical Signal Processing Workshop, IEEE (SSP14), 2014, Gold Coast, Australia.
- [7] Berntorp K, Robertsson A, Arzen K E. Rao-Blackwellized particle filters with out-of-sequence measurement processing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62 (24): 6454-6467.
- [8] SAHA S, GUSTAFSSON F. Marginalized particle filter for dependent Gaussian noise processes [C] //Aerospace Conference, IEEE, 2013.
- [9] CHEN T S, SCHON B, OHLSSON H, et al. Decentralized particle filter with arbitrary state decomposition [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59 (2): 465-478.
- [10] STORVIK G. Particle filters in state space models with the presence of unknown static parameters [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50 (2): 281-289.
- [11] LI X R, BAR-SHALOM Y. A recursive multiple model approach to noise identification [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1994, 30 (3): 671-684.
- [12] HUANG Y L, ZHANG Y G, ZHAO Y X, et al. A novel robust Gaussian-student's t mixture distribution based Kalman filter [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 67 (13): 3606-3620.
- [13] GIA G, ZHANG Y G, BAI M M, et al. A novel robust Student's t-based Gaussian approximate filter with one-step randomly delayed measurements [J]. Signal Processing, 2020, 171: 1-6.
- [14] 周翟和, 刘建业, 赖际舟. Rao-Blackwellized 粒子滤波 SINS/GPS 深组合导航系统中的应用研究 [J]. 宇航学报, 2009, 2: 515-520.
- [15] WANG Z Y, SUN F. Decentralized estimation of nonlinear target tracking based on nonlinear filter [C] //Proceedings 2013 International Conference on Mechatronic Sciences, Electric Engineering and Computer (MEC), IEEE, 2014: 1346-1350.
- [16] SCHÖN B, KARLSSON R, GUSTAFSSON F. The Marginalized Particle Filter in Practice [C] //IEEE Aerospace Conference, USA, 2006.
- [17] 王宗原, 孙枫. 边缘 CPF 算法及在重力梯度辅助导航中应用, 中国惯性技术学报, 2014, 22 (6): 734-740.
- [18] NARDONE S, LINDGREN A G, GONG K. Fundamental properties and performance of conventional bearings-only target motion analysis [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1984, 29 (9): 775-787.
- [19] 鹿传国, 冯新喜, 张迪. 基于改进容积卡尔曼滤波的纯方位目标跟踪 [J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34 (1): 34-39.
- [20] XU D J, SHEN C, SHEN F. A robust particle filtering algorithm with non-Gaussian measurement noise using student-t distribution [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21 (1): 30-34.