

基于终端滑模的四旋翼飞行器 非线性轨迹跟踪控制

李忠林

(中国直升机设计研究所, 江西 景德镇 333000)

摘要: 考虑到四旋翼飞行器的传统内外环控制策略依赖时标分离假设, 稳定性分析复杂, 并且控制参数选取困难的缺点, 提出了一种与传统内外环控制策略不同的轨迹跟踪控制器; 首先将四旋翼飞行器数学模型进行相应的变换, 以分解为高度、偏航角和纵横向三个级联的子系统, 再使用终端滑模控制方法设计高度和偏航角子系统的控制器, 使两个子系统的状态误差可以在有限时间内收敛到原点, 之后基于变量非线性变换设计纵横向子系统的控制器, 分析了闭环系统稳定性, 证明了所设计的轨迹跟踪控制器可以保证闭环系统跟踪误差渐近稳定到原点, 最后仿真实验的结果验证了所设计的控制器的有效性。

关键词: 四旋翼飞行器; 轨迹跟踪; 终端滑模; 非线性控制

Nonlinear Trajectory Tracking Control of Quadrotor Helicopter Based on Terminal Sliding Mode

Li Zhonglin

(China Helicopter Research and Development Institute, Jingdezhen 333000, China)

Abstract: Considering that the traditional inner-outer loop control strategy of quadrotor helicopter depends on the time-scale separation assumption, the stability analysis is complex and the selection of control parameters is difficult, a trajectory tracking controller which is different from the traditional inner-outer loop control strategy is proposed. Firstly, the mathematical model of quadrotor helicopter is transformed to be three cascaded subsystems: altitude, yaw angle and vertical-horizontal subsystems. Then, terminal sliding mode control method is used to design the controller of altitude and yaw angle subsystems, so that the state errors of the two subsystems can converge to the origin in a finite time. Then, the vertical-horizontal subsystem is designed based on nonlinear variable transformation. The stability of the closed-loop system is analyzed. It is proved that the designed trajectory tracking controller can ensure that the tracking error of the closed-loop system is asymptotically stable to the origin. Finally, the simulation results verify the effectiveness of the proposed controller.

Keywords: quadrotor helicopter; trajectory tracking; terminal sliding mode; nonlinear control

0 引言

传统的旋翼式无人直升机具有一个主旋翼和一个尾旋翼, 主旋翼和尾旋翼的转速保持恒定, 依靠主桨舵机伸缩输出带动主旋翼产生变距, 从而产生垂向、纵向和横向的力, 尾桨舵机伸缩输出带动尾旋翼产生变距, 用以平衡主旋翼转动产生的反扭矩, 主旋翼和尾旋翼的变距相互搭配就可以实现无人直升机各个方向的运动。由于具有垂直起降、无人驾驶、悬停及可机动飞行等特性, 无人直升机已经被广泛应用在军事和民事领域中。

与传统的旋翼式无人直升机的构型不同, 四旋翼飞行器具有四个呈十字交叉布局的螺旋桨, 每个螺旋桨都具有相同的变距, 但是每个螺旋桨的转速都可以变化, 并且螺旋桨的转动方向两两相反, 依靠四个旋翼转速的搭配就可以实现四旋翼飞行器各个方向的运动, 完成各种飞行动作。

由于具有结构简单、成本低廉和机动性强等特点, 四旋翼飞行器已经被广泛应用于侦查、航拍、勘探和救援等各方面, 在国民生活中扮演着重要的角色。

自四旋翼飞行器问世以来, 便以其独特的布局结构和新颖的飞行方式引起广大学者的注意, 其控制问题也随之成为研究热点。四旋翼飞行器有六个运动自由度, 但只有四个控制输入, 这意味着它是一个欠驱动系统, 并且四旋翼飞行器的垂向、纵向、横向和航向具有较强的耦合性和非线性, 因此, 研究其控制问题具有较大的难度。

目前, 已有众多学者设计了不同的控制方法, 比如, 文献 [1] 提出了经典的 PID 控制器和 LQ 控制器, 并比较了两种控制器的特点和不同, 之后将控制算法应用在了试验平台上, 以检验控制效果。文献 [2] 将四旋翼飞行器模型分解为位置运动学、位置动力学、姿态运动学和姿态动力学四个子系统, 针对每个子系统利用轨迹线性化方法设

收稿日期: 2020-06-20; 修回日期: 2020-08-25。

作者简介: 李忠林(1994-), 男, 河北南宫人, 硕士, 助理工程师, 主要从事非线性控制理论、无人机飞行控制等方向的研究。

引用格式: 李忠林. 基于终端滑模的四旋翼飞行器非线性轨迹跟踪控制[J]. 计算机测量与控制, 2021, 29(3): 151-156.

计控制器,最后的仿真结果表明所设计的控制器具有一定的鲁棒性。另外,神经网络控制^[3],自适应反步法^[4],自适应滑模控制^[5],模型参考自适应控制^[6]和鲁棒控制方法^[7]等也被应用到了四旋翼飞行器的控制中,并且取得了不错的控制效果。

以上介绍的这些控制方法一般都是基于时标分离假设,将四旋翼飞行器系统分为内外环两个级联的结构,外环用来控制位置,内环用来控制姿态,先根据控制目标在位置外环中提取期望的姿态角,然后再设计姿态内环,使内环姿态能够快速跟踪位置外环中提取出的期望姿态角。然而,时标分离假设要求内环姿态比外环位置具有更大的增益,以使得内环姿态能够快速跟踪位置外环中提取出的期望姿态角,这使得内环控制器参数选取难度增大,并且整个闭环系统的稳定性分析更加复杂。大多数文献都是在内外环结构之上利用不同的控制方法去设计镇定或轨迹跟踪控制器。

近年来,终端滑模控制方法^[8]异军突起,与传统滑模变结构控制方法相比,终端滑模控制方法设计的是一个非线性滑模面,当系统状态到达并停留在滑模面之后,系统状态可以在有限时间内收敛到原点。由于具有更快的收敛特性,控制性能也更加优异,终端滑模控制方法受到了专家学者的广泛关注和研究,被应用到越来越多的控制系统中。在四旋翼飞行器的控制中也越来越多的见到终端滑模控制方法的身影。

本文首先对四旋翼飞行器数学模型进行了适当的变换,将其分解为高度、偏航角和纵横向三个级联的子系统,然后基于终端滑模控制方法和变量非线性变换对三个子系统分别设计了轨迹跟踪控制器,闭环系统稳定性分析证明了所设计的轨迹跟踪控制器可以保证闭环系统跟踪误差渐近稳定到原点,最后仿真实验的结果验证了所设计的控制器的有效性。

与传统内外环控制策略相比,本文提出的轨迹跟踪控制器不依赖时标分离假设,闭环系统的稳定性分析更加容易,并且选取控制器参数更加简单,控制性能更加优异,可以使四旋翼飞行器系统状态快速收敛到期望跟踪轨迹上。

1 问题描述

1.1 参考坐标系及飞行原理

如图 1 所示,四旋翼飞行器的数学模型建立在惯性坐标系 $I = \{O_x, y, z_e\}$ 和机体坐标系 $B = \{Oxyz\}$ 中。惯性坐标系 I 固连于地球,原点 O_e 位于地球表面某点; x_e 轴指向地理东方; z_e 轴垂直地面向上, y_e 轴与 x_e 轴、 z_e 轴符合右手定则,指向地理北方。机体坐标系 B 固连于四旋翼飞行器机体,原点 O 位于四旋翼飞行器的质心位置; x 轴位于连接旋翼 1 和旋翼 3 的直线上,指向旋翼 1; y 轴位于连接旋翼 2 和旋翼 4 的直线上,指向旋翼 4, z 轴与 x 轴、 y 轴符合右手定则,垂直于机体指向上方。

与传统的主旋翼带尾桨式旋翼机的飞行原理不同,四

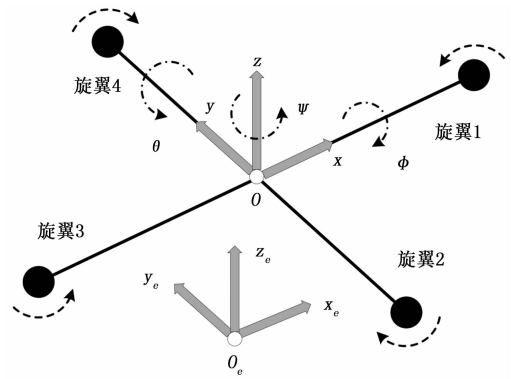


图 1 四旋翼飞行器示意图

旋翼飞行器依靠四个旋翼转速的相互搭配完成各种飞行动作。四旋翼飞行器的基本飞行动作包括垂直运动、滚转运动、俯仰运动、偏航运动四种运动方式。

垂直运动:四旋翼飞行器沿着 z 轴做线运动,可以分为悬停、爬升和下降。从图 1 中可以看出,旋翼 1 和旋翼 3 转动方向相同,旋翼 2 和旋翼 4 转动方向相同,而旋翼 1、3 和旋翼 2、4 的转动方向相反,当旋翼 1、2、3、4 的转速相同时,恰好可以平衡其对机身的反扭矩。以同等幅度增加四个旋翼的转速,则相应的升力随之增加,当升力小于自身重力时,便实现了四旋翼飞行器的垂直下降;当升力恰好等于自身重力时,便实现了四旋翼飞行器的悬停;当升力大于自身重力时,便实现了四旋翼飞行器的垂直爬升。

滚转运动:四旋翼飞行器绕着 x 轴旋转做角运动。在悬停状态下,旋翼 4 转速降低,旋翼 2 转速增高,飞行器会左滚,产生滚转角的变化,为了不改变飞行器总升力和总反扭矩,旋翼 4 转速的降低量应与旋翼 2 转速的增高量保持一致。滚转运动会使滚转角发生变化,升力会产生一个沿 y 轴方向的分量,进而产生横向往右运动。

俯仰运动:四旋翼飞行器绕着 y 轴旋转做角运动。在悬停状态下,旋翼 1 转速降低,旋翼 3 转速增高,飞行器会低头,产生俯仰角的变化,为了不改变飞行器总升力和总反扭矩,旋翼 1 转速的降低量应与旋翼 3 转速的增高量保持一致。俯仰运动会使俯仰角发生变化,升力会产生一个沿 x 轴方向的分量,进而产生纵向前后运动。

偏航运动:四旋翼飞行器绕着 z 轴旋转做角运动。在悬停状态下,旋翼 1 和旋翼 3 转速降低,旋翼 2 和旋翼 4 转速增高,飞行器的反扭矩会产生变化,进而产生偏航角的变化,为了不改变飞行器总升力,旋翼 1 和旋翼 3 转速的降低量应与旋翼 2 和旋翼 4 转速的增高量保持一致。

1.2 数学模型

为了实现控制目标,设计控制器的前提便是建立四旋翼飞行器的精确数学模型。将四旋翼飞行器视作一个六自由度刚体,假设它的机械结构对称,忽略空气阻力和旋翼转动引起的陀螺效应,利用牛顿-欧拉方程可建立其数学模型^[9]:

$$\dot{p} = v \tag{1}$$

$$\omega = W\dot{\gamma} \tag{2}$$

$$m\dot{v} = -mge_3 + fRe_3 \tag{3}$$

$$J\dot{\omega} = -S(\omega)J\omega + \tau \tag{4}$$

式中, $p = [x, y, z]^T$ 和 $v = [v_x, v_y, v_z]^T$ 分别是四旋翼飞行器质心位置和质心速度在系 I 中的表示, $\gamma = [\varphi, \theta, \psi]^T$ 为描述四旋翼飞行器姿态的欧拉角 (分别为滚转角、俯仰角和偏航角), $\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ 为四旋翼飞行器角速度在系 B 中的表示, m 为四旋翼飞行器质量, g 为重力加速度常数, $e_3 = [0, 0, 1]^T$, f 为四旋翼飞行器升力在系 B 中的表示, $J = \text{diag}\{J_1, J_2, J_3\}$ 为四旋翼飞行器机体惯性张量阵, τ 为作用到四旋翼飞行器机体的力矩在系 B 中的表示, W 为角速度变换矩阵, 可表示如下:

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\varphi & s_\varphi c_\theta \\ 0 & -s_\varphi & c_\varphi c_\theta \end{bmatrix}$$

式中, $s_{(\cdot)} = \sin(\cdot)$, $c_{(\cdot)} = \cos(\cdot)$ 。因为 $\det(W) = c_\theta$, 所以当 $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ 时, W 可逆。 R 为由系 B 到系 I 的旋转矩阵, 可用欧拉角表示如下:

$$R = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi & c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\varphi s_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi \\ -s_\theta & s_\varphi c_\theta & c_\varphi c_\theta \end{bmatrix}$$

$S(\cdot)$ 代表叉乘矩阵, 对于向量 $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, 其运算定义如下^[10]:

$$S(x) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3 实际控制输入

四旋翼飞行器的位置和姿态是通过改变四个旋翼的转速来实现控制的, 上述数学模型中的升力 f 和力矩 τ 并不是实际控制输入, 然而, 设计完升力 f 和力矩 τ 之后, 可以很容易的利用文献 [11] 中所述的 f 、 τ 和四个旋翼转速之间的关系, 反解出实际的控制输入旋翼转速:

$$\begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4b} & 0 & -\frac{1}{2bl} & \frac{1}{4d} \\ \frac{1}{4b} & -\frac{1}{2bl} & 0 & -\frac{1}{4d} \\ \frac{1}{4b} & 0 & \frac{1}{2bl} & \frac{1}{4d} \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{2bl} & 0 & -\frac{1}{4d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

式中, $\Omega_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为四个旋翼的转速, b 为常值升力系数, l 为旋翼中心到机体中心的距离, d 为常值反扭矩系数。因此, 本文以升力 f 和力矩 τ 作为四旋翼飞行器系统的控制输入来设计控制器。

1.4 控制目标

本文的控制目标是设计控制律 f 和 τ 使得由式 (1) ~ (4) 描述的四旋翼飞行器系统能够渐近跟踪期望轨迹:

$$q_d(t) = [p_d^T(t), \gamma_d^T(t)] =$$

$$[x_d(t), y_d(t), z_d(t), 0, 0, \psi_d(t)]^T$$

其中: $q_d(t)$ 满足 $\ddot{q}_d(t) \equiv 0$ 。

1.5 模型变换

联立 (1) 式和 (3) 式, (2) 式和 (4) 式得到:

$$m\ddot{p} = -mge_3 + fRe_3 \tag{5}$$

$$JW\ddot{\gamma} = -JW\dot{\gamma} - S(W\dot{\gamma})JW\dot{\gamma} + \tau \tag{6}$$

取控制律为:

$$f = m\tilde{f} \tag{7}$$

$$\tau = JW\dot{\gamma} + S(W\dot{\gamma})JW\dot{\gamma} + JW\tilde{\tau} \tag{8}$$

其中: \tilde{f} 和 $\tilde{\tau}$ 是待设计的量。将控制律 (7) 和 (8) 代入数学模型 (5) 和 (6) 中得到:

$$\ddot{p} = -ge_3 + \tilde{f}Re_3 \tag{9}$$

$$\ddot{\gamma} = \tilde{\tau} \tag{10}$$

则四旋翼飞行器数学模型可由 (9) 和 (10) 表示, 重写如下:

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi & 0 & 0 & 0 \\ c_\varphi s_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & 0 & 0 & 0 \\ c_\varphi c_\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \\ \tilde{\tau}_3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

记偏差 $e = q - q_d = [x_e, y_e, z_e, \varphi_e, \theta_e, \psi_e]^T$, 因为 $q_d(t) = 0$, $\theta_d(t) = 0$, $\psi_d(t) = \psi_d$, 即有 $\varphi = \varphi_e$, $\theta = \theta_e$, $\psi = \psi_e + \psi_d$, 又有 $\ddot{q}_d(t) \equiv 0$, 所以数学模型 (11) 可以重写为:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_e \\ \ddot{y}_e \\ \ddot{z}_e \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\varphi s_\theta c_{\psi_e + \psi_d} + s_\varphi s_{\psi_e + \psi_d} & 0 & 0 & 0 \\ c_\varphi s_\theta s_{\psi_e + \psi_d} - s_\varphi c_{\psi_e + \psi_d} & 0 & 0 & 0 \\ c_\varphi c_\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \\ \tilde{\tau}_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

四旋翼飞行器数学模型 (12) 可以分解为级联的高度、偏航角和纵横向三个子系统:

$$\ddot{z}_e = -g + c_\varphi c_\theta \tilde{f} \tag{13}$$

$$\ddot{\psi}_e = \tilde{\tau}_3 \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_e \\ \ddot{y}_e \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_\varphi s_\theta c_{\psi_e + \psi_d} + s_\varphi s_{\psi_e + \psi_d}) \tilde{f} \\ (c_\varphi s_\theta s_{\psi_e + \psi_d} - s_\varphi c_{\psi_e + \psi_d}) \tilde{f} \\ \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

2 控制器设计

首先, 利用终端滑模控制方法设计高度子系统 (13) 和偏航角子系统 (14) 的轨迹跟踪控制器, 使得在有限时间内达到并保持 $z_e = 0, \dot{z}_e = 0, \psi_e = 0, \dot{\psi}_e = 0$; 然后, 基于变量非线性变换设计纵横向子系统 (15) 的轨迹跟踪控制器。

2.1 高度子系统控制器设计

设计高度子系统 (13) 的控制律为:

$$\tilde{f} = \frac{\tilde{u} + g}{c_\varphi c_\theta} \quad (16)$$

其中: \tilde{u} 为待设计的量。将控制律 (16) 代入高度子系统 (13) 中得到:

$$\ddot{z}_e = \tilde{u} \quad (17)$$

选取滑动模态为^[8]:

$$s_1 = \dot{z}_e + \beta_1 z_e^{\sigma_1/\alpha_1} \quad (18)$$

其中: $\beta_1 > 0, \alpha_1$ 和 σ_1 均为奇数, 且 $\alpha_1 > \sigma_1$ 。滑动模态 s_1 沿系统 (18) 轨迹的导数为:

$$\dot{s}_1 = \ddot{z}_e + \beta_1 \frac{\sigma_1}{\alpha_1} z_e^{(\sigma_1/\alpha_1)-1} \dot{z}_e = \tilde{u} + \beta_1 \frac{\sigma_1}{\alpha_1} z_e^{(\sigma_1/\alpha_1)-1} \dot{z}_e \quad (19)$$

取控制律 \tilde{u} 为:

$$\tilde{u} = -\beta_1 \frac{\sigma_1}{\alpha_1} z_e^{(\sigma_1/\alpha_1)-1} \dot{z}_e - \lambda_1 s_1 - \rho_1 \operatorname{sgn}(s_1) \quad (20)$$

其中: $\rho_1 > 0, \lambda_1 > 0$ 。由 (19) 式和 (20) 式得到:

$$\frac{1}{2} \frac{d|s_1|^2}{dt} = |s_1| \frac{d|s_1|}{dt} = s_1 \dot{s}_1 = -\lambda_1 |s_1|^2 - \rho_1 |s_1| \quad (21)$$

约去 (21) 式左右两边的 $|s_1|$, 得到:

$$\frac{d|s_1|}{dt} = -\lambda_1 |s_1| - \rho_1 \quad (22)$$

微分方程 (22) 的解为:

$$|s_1(t)| = -\frac{\rho_1}{\lambda_1} + \left(|s_1(0)| + \frac{\rho_1}{\lambda_1} \right) e^{-\lambda_1 t}, t \geq 0 \quad (23)$$

因为 $\rho_1 > 0, \lambda_1 > 0$, 所以 (23) 式是递减的, 故系统会在有限时间:

$$t_r = -\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{\rho_1}{\lambda_1 |s_1(0)| + \rho_1} \quad (24)$$

到达滑动面 $s_1 = 0$ 。

在滑动面 $s_1 = 0$ 上, 高度子系统 (13) 可以用下面的一阶微分方程描述:

$$\dot{z}_e = -\beta_1 z_e^{\sigma_1/\alpha_1} \quad (25)$$

α_1 和 σ_1 均为奇数保证对于任意一个实数 $z_e, z_e^{\sigma_1/\alpha_1}$ 也是一个实数。微分方程 (25) 的解为:

$$z_e(t)^{1-\sigma_1/\alpha_1} = z_e(t_r)^{1-\sigma_1/\alpha_1} - \beta_1 (1 - \sigma_1/\alpha_1) (t - t_r), t \geq t_r \quad (26)$$

因为 $\beta_1 > 0, \alpha_1$ 和 σ_1 均为奇数, 且 $\alpha_1 > \sigma_1$, 所以 (26) 式是递减的, 则系统从到达滑动面的状态 $z_e(t_r)$ 到 $z_e(t) = 0$ 的时间间隔 t_s 为:

$$t_s = t - t_r = \frac{1}{\beta_1 (1 - \sigma_1/\alpha_1)} z_e(t_r)^{1-\sigma_1/\alpha_1} \quad (27)$$

故系统状态 z_e 会在有限时间 $(t_r + t_s)$ 内收敛到 0, 由微分方程 (25) 可以得到系统状态 \dot{z}_e 也会在有限时间 $(t_r + t_s)$ 内收敛到 0。

由 (16) 和 (20) 可得到高度子系统 (13) 的控制律为:

$$\tilde{f} = \frac{-\beta_1 \frac{\sigma_1}{\alpha_1} z_e^{(\sigma_1/\alpha_1)-1} \dot{z}_e - \rho_1 \operatorname{sgn}(s_1) - \lambda_1 s_1 + g}{c_\varphi c_\theta} \quad (28)$$

2.2 航向子系统控制器设计

利用与 2.1 节相同的方法设计偏航角子系统 (14) 的控制律 $\tilde{\tau}_3$ 为:

$$\tilde{\tau}_3 = -\beta_2 \frac{\sigma_2}{\alpha_2} \psi_e^{(\sigma_2/\alpha_2)-1} \dot{\psi}_e - \lambda_2 s_2 - \rho_2 \operatorname{sgn}(s_2) \quad (29)$$

其中: $\beta_2 > 0, \alpha_2$ 和 σ_2 均为奇数, 且 $\alpha_2 > \sigma_2, \rho_2 > 0, \lambda_2 > 0$ 。

利用与 2.1 节相同的方法可以证明系统状态 $\psi_e, \dot{\psi}_e$ 会在有限时间内收敛到 0。

2.3 纵横向子系统控制器设计

在控制律 (28) 和 (29) 作用下, 高度子系统 (13) 和偏航角子系统 (14) 会在有限时间内达到并保持 $z_e = 0, \dot{z}_e = 0, \psi_e = 0, \dot{\psi}_e = 0$, 在以后的时间内有 $\tilde{f} = \frac{g}{c_\varphi c_\theta}$ 。根据原纵横向子系统模型 (15), 得到此后纵横向子系统模型为:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_e \\ \ddot{y}_e \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t_\theta c_{\psi_e} + t_\varphi \frac{s_{\psi_e}}{c_\theta}) g \\ (t_\theta s_{\psi_e} - t_\varphi \frac{c_{\psi_e}}{c_\theta}) g \\ \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

取可逆的状态变换:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_e \\ \tilde{y}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\psi_e} & s_{\psi_e} \\ s_{\psi_e} & -c_{\psi_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix}$$

纵横向子系统模型 (30) 可变换为:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\tilde{x}}_e \\ \ddot{\tilde{y}}_e \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g t_\theta \\ g \frac{t_\varphi}{c_\theta} \\ \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

上面的系统模型 (31) 可以写为下面级联的两个子系统:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\tilde{x}}_e \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g t_\theta \\ \tilde{\tau}_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\tilde{y}}_e \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \frac{t_\varphi}{c_\theta} \\ \tilde{\tau}_1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

下面设计纵向子系统 (32) 的控制律 $\tilde{\tau}_2$ 。令 $\mu = t_\theta$, 所以:

$$\dot{\mu} = \frac{1}{c_\theta^2} \dot{\theta} \quad (34)$$

$$\ddot{\mu} = \frac{2s_\theta}{c_\theta^3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{c_\theta^2} \ddot{\theta} \quad (35)$$

取控制律 $\tilde{\tau}_2$:

$$\tilde{\tau}_2 = -\frac{2s_\theta}{c_\theta} \dot{\theta}^2 + c_\theta^2 v_2 \quad (36)$$

可使得纵向子系统 (32) 转化为系统：

$$\begin{bmatrix} \ddot{\tilde{x}}_e \\ \dot{\tilde{x}}_e \\ \dot{\mu} \\ \ddot{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g\mu \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

系统 (37) 可写为如下状态方程的形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_e \\ \ddot{\tilde{x}}_e \\ \dot{\mu} \\ \ddot{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_e \\ \dot{\tilde{x}}_e \\ \mu \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_2 \quad (38)$$

利用极点配置方法设计控制律：

$$v_2 = -p_1\tilde{x}_e - p_2\dot{\tilde{x}}_e - p_3\mu - p_4\dot{\mu} \quad (39)$$

将控制律 (39) 代入系统 (38) 得到的闭环系统的特征方程为：

$$\lambda^4 + p_4\lambda^3 + p_3\lambda^2 + gp_2\lambda + gp_1 = 0$$

利用 Hurwitz 判据，选取：

$$\begin{aligned} p_3 > 0, p_4 > 0, 0 < p_2 < p_3 p_4 / g, \\ 0 < p_1 < (p_3 p_4 - gp_2) p_2 / p_4^2 \end{aligned}$$

则控制律 (39) 可以使得系统 (37) 的状态 $\tilde{x}_e, \dot{\tilde{x}}_e, \mu, \dot{\mu}$ 渐近稳定。

将 (39) 式代入 (36) 式得到控制律 $\tilde{\tau}_2$ ：

$$\tilde{\tau}_2 = -\frac{2s_\theta\dot{\theta}^2}{c_\theta} + c_\theta^2(-p_1\tilde{x}_e - p_2\dot{\tilde{x}}_e - p_3t_\theta - p_4\frac{1}{c_\theta^2}\dot{\theta}) \quad (40)$$

根据 $\mu, \dot{\mu}$ 的定义可知，当 $\mu \rightarrow 0, \dot{\mu} \rightarrow 0$ 时有 $\theta \rightarrow 0, \dot{\theta} \rightarrow 0$ ，所以在控制律 (40) 作用下，纵向子系统 (32) 的状态 $\tilde{x}_e, \dot{\tilde{x}}_e, \theta, \dot{\theta}$ 都是渐近稳定的。

下面设计横向子系统 (33) 的控制律 $\tilde{\tau}_1$ 。令 $\eta = \frac{t_\varphi}{c_\theta}$ ，所以：

$$\dot{\eta} = \frac{1}{c_\theta} \frac{1}{c_\varphi^2} \dot{\varphi} + t_\varphi \frac{s_\theta}{c_\theta^2} \dot{\theta} = \frac{1}{c_\theta} \left(\frac{1}{c_\varphi^2} \dot{\varphi} + t_\varphi t_\theta \dot{\theta} \right) \quad (41)$$

$$\ddot{\eta} = \frac{1}{c_\theta} \frac{2c_\varphi s_\varphi \dot{\varphi}}{c_\varphi^4} + \frac{1}{c_\theta^2} \frac{s_\theta}{c_\theta^2} \dot{\varphi} \dot{\theta} + \frac{1}{c_\theta} \frac{1}{c_\varphi^2} \ddot{\varphi} +$$

$$\frac{s_\theta}{c_\theta^2} \frac{1}{c_\varphi^2} \dot{\varphi} \dot{\theta} + t_\varphi \frac{c_\theta^3 + 2c_\theta s_\theta^2 \dot{\theta}^2}{c_\theta^4} + t_\varphi \frac{s_\theta}{c_\theta^2} \ddot{\theta} =$$

$$\frac{1}{c_\theta c_\varphi^2} [2t_\varphi \dot{\varphi}^2 + 2t_\varphi \dot{\varphi} \dot{\theta} + \tilde{\tau}_1 + t_\varphi (1 + 2t_\theta^2) \dot{\theta}^2 + c_\theta^2 t_\varphi \tilde{\tau}_2] \quad (42)$$

取控制律 $\tilde{\tau}_1$ ：

$$\tilde{\tau}_1 = -2t_\varphi \dot{\varphi}^2 - 2t_\varphi \dot{\varphi} \dot{\theta} - t_\varphi (1 + 2t_\theta^2) \dot{\theta}^2 - c_\theta^2 t_\varphi t_\theta \tilde{\tau}_2 + c_\theta c_\varphi^2 v_1 \quad (43)$$

可使得横向子系统 (33) 转化为系统：

$$\begin{bmatrix} \ddot{\tilde{y}}_e \\ \dot{\tilde{y}}_e \\ \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g\eta \\ v_1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

系统 (44) 可写为如下状态方程的形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{y}}_e \\ \ddot{\tilde{y}}_e \\ \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_e \\ \dot{\tilde{y}}_e \\ \eta \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_1 \quad (45)$$

利用极点配置方法设计控制律：

$$v_1 = -k_1\tilde{y}_e - k_2\dot{\tilde{y}}_e - k_3\eta - k_4\dot{\eta} \quad (46)$$

将控制律 (46) 代入系统 (45) 得到的闭环系统的特征方程为：

$$\lambda^4 + k_4\lambda^3 + k_3\lambda^2 + gk_2\lambda + gk_1 = 0$$

利用 Hurwitz 判据，选取：

$$\begin{aligned} k_3 > 0, k_4 > 0, 0 < k_2 < k_3 k_4 / g, \\ 0 < k_1 < (k_3 k_4 - gk_2) k_2 / k_4^2, \end{aligned}$$

则控制律 (46) 可以使得系统 (44) 的状态 $\tilde{y}_e, \dot{\tilde{y}}_e, \eta, \dot{\eta}$ 渐近稳定。

将 (46) 式代入 (43) 式得到控制律 $\tilde{\tau}_1$ ：

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_1 = & -2t_\varphi \dot{\varphi}^2 - 2t_\varphi \dot{\varphi} \dot{\theta} - t_\varphi (1 + 2t_\theta^2) \dot{\theta}^2 - \\ & c_\theta^2 t_\varphi t_\theta \tilde{\tau}_2 - k_1 c_\theta c_\varphi^2 \tilde{y}_e - k_2 c_\theta c_\varphi^2 \dot{\tilde{y}}_e - \\ & k_3 t_\varphi c_\varphi^2 \eta - k_4 (c_\theta \dot{\varphi} + t_\theta c_\varphi^2 \dot{\theta}) \end{aligned} \quad (47)$$

根据 $\eta, \dot{\eta}$ 的定义以及 $\theta, \dot{\theta}$ 渐近稳定可知， $\eta \rightarrow t_\varphi, \dot{\eta} \rightarrow \dot{\varphi}/c_\varphi^2$ ，故当 $\eta \rightarrow 0, \dot{\eta} \rightarrow 0$ 时，有 $\varphi \rightarrow 0, \dot{\varphi} \rightarrow 0$ ，所以在控制律 (47) 作用下，纵向子系统 (33) 的状态 $\tilde{y}_e, \dot{\tilde{y}}_e, \varphi, \dot{\varphi}$ 都是渐近稳定的。

上面的控制器设计可总结为如下结果。

定理 1：对于由式 (1) ~ (4) 描述的四旋翼飞行器系统，给定一条时变的期望轨迹：

$$q_d(t) = [p_d^T(t), \gamma_d^T(t)] = [x_d(t), y_d(t), z_d(t), 0, 0, \psi_d(t)]^T$$

满足 $\ddot{q}_d(t) \equiv 0$ ，则控制律 (7) (8) (28) (29) (40) 和 (47) 可以保证闭环系统跟踪误差渐近稳定到原点。

3 仿真实验

为了验证本文设计的控制器的有效性，使用 MATLAB 软件对四旋翼飞行器非线性模型进行仿真。仿真步长设置为 0.005 s，利用文献 [3] 中给出的仿真模型参数：

$$m = 0.9 \text{ kg}, g = 9.81 \text{ m/s}^2,$$

$$J = \text{diag}\{0.32, 0.42, 0.63\} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

控制器参数选取为：

$$\beta_1 = \beta_2 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 5, \sigma_1 = \sigma_2 = 3, \rho_1 = \rho_2 = 0.1,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 7,$$

$$p_1 = 0.1, p_2 = 0.5, p_3 = 4, p_4 = 4,$$

$$k_1 = 0.1, k_2 = 0.5, k_3 = 4, k_4 = 4.$$

期望位置轨迹为：

$$[x_d(t), y_d(t), z_d(t)]^T = [t, -t, 8]^T m,$$

期望偏航角轨迹为：

$$\psi_d(t) = 0.2 \text{ rad}.$$

设置系统初始状态为：

$$[x(0), y(0), z(0)]^T = [1, -2, 1]^T m,$$

$$[\varphi(0), \theta(0), \psi(0)]^T = [0, 0, 0]^T \text{ rad},$$

$$[\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)]^T = [0, 0, 0]^T \text{ m/s},$$

$$[\dot{\varphi}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0)]^T = [0, 0, 0]^T \text{ rad/s}.$$

仿真结果如图 2~4 所示，图 2 为三维位置跟踪图，图

3 为位置、姿态角、线速度、角速度变化曲线图，图 4 为升力和力矩曲线图。

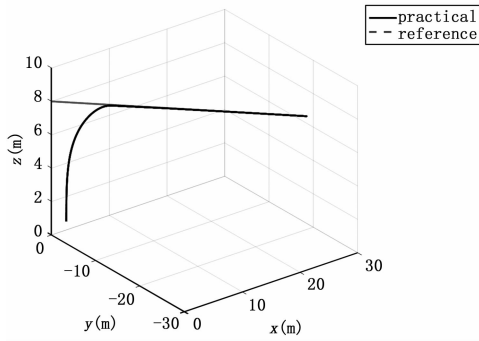


图 2 三维位置跟踪图

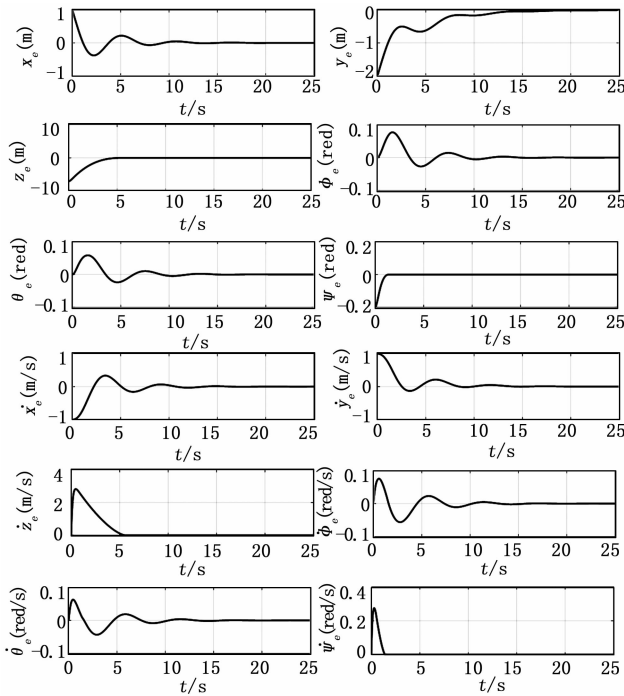


图 3 位置、姿态角、线速度、角速度变化曲线图

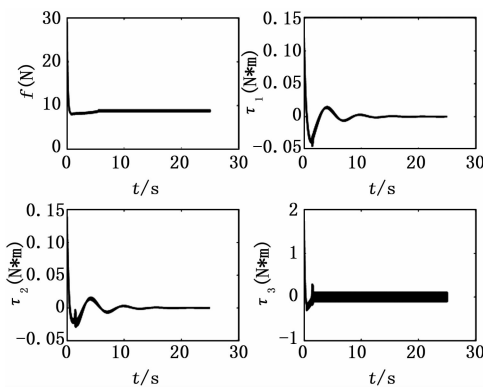


图 4 升力和力矩曲线图

从图 2 中可以看出，在所设计的控制器作用下，四旋翼飞行器可以跟踪上期望轨迹；从图 3 中可以看出，位置

跟踪误差、姿态角跟踪误差、线速度误差和角速度误差均渐近稳定到原点；从图 4 中可以看出，四旋翼飞行器升力和力矩都是有界的。仿真结果验证了本文所设计的控制器的有效性。

4 结束语

本文提出了一种与传统内外环控制策略不同的四旋翼飞行器轨迹跟踪控制器，实现了闭环系统跟踪误差的渐近稳定。基于终端滑模控制方法和变量非线性变换所设计的控制器避免了对时标分离假设的依赖，闭环系统稳定性分析简单，控制器参数选取容易，控制性能优异，具有较大的应用前景。

参考文献:

[1] Bouabdallah S, Noth A, Siegwart R. PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor [A]. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems [C]. IEEE, 2004 (3): 2451-2456.

[2] Zhu B, Huo W. Trajectory Linearization Control for a quadrotor helicopter [A]. IEEE International Conference on Control and Automation. IEEE [C]. 2010: 34-39.

[3] Dierks T, Jagannathan S. Output feedback control of a quadrotor UAV using neural networks [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2010, 21 (1): 50-66.

[4] Huang M, Xian B, Diao C, et al. Adaptive tracking control of underactuated quadrotor unmanned aerial vehicles via backstepping [A]. American Control Conference. IEEE [C]. 2010: 2076-2081.

[5] Lee D, Kim H J, Sastry S. Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter [J]. International Journal of Control Automation & Systems, 2009, 7 (3): 419-428.

[6] 李瑞琪, 王洪福, 李瑞雪, 等. 基于模型参考自适应的四旋翼飞行器控制 [J]. 计算机测量与控制, 2013, 21 (12): 3260-3263.

[7] Liu H, Bai Y, Lu G, et al. Robust Tracking Control of a Quadrotor Helicopter [J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2014, 75 (3-4): 595-608.

[8] Man Z, Yu X H. Terminal sliding mode control of MIMO linear systems [J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems I: Fundamental Theory & Applications, 1997, 44 (11): 1065-1070.

[9] Li Z, Huo W. Stabilizing Quadrotor Helicopter with Uncertainties Based on Controlled Lagrangians and Disturbance Observer [A]. Chinese Intelligent Systems Conference [C]. Springer, Singapore, 2018: 273-287.

[10] 霍伟. 机器人动力学与控制 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.

[11] 王曦辉. 四旋翼飞行器非奇异轨迹跟踪控制 [D]. 北京: 北京航空航天大学, 2016.