

# 基于三点重合算法的飞机活动面转角测量研究

段曙凯, 李徐辉, 吴 熙, 潘智昊

(上海飞机制造有限公司, 上海 201324)

**摘要:** 针对在飞机活动面转角的拍摄方法或激光跟踪仪方法中, 对其样点数据处理算法进行研究, 提出了一种可得到较高精度算法, 即选取三点建立三角面片, 通过将三角面片在前后运动的位置进行分步重合, 从这个重合过程中的旋转矩阵可计算出转动角度; 通过对选取点与误差关系进行分析, 提出了一种选取最优三点的方法以降低位置误差对角度误差的影响; 最后, 设计精度验证实验; 实验结果表明, 三点重合算法的误差在 0.05 度内, 误差满足飞机活动面的转角测量要求。

**关键词:** 三点重合算法; 转动角度; 活动面; 飞机

## Measurement of Airplane Surface Rotation Angle Based on Coincide Algorithm with Three Points

Duan Shukai, Li Xuhui, Wu Xi, Pan Zhihao

(Shanghai Aircraft Manufacture Company, Shanghai 201324, China)

**Abstract:** Research on the algorithm of sample points data in the measurement of airplane surface rotation angle by photographic measurement method or laser tracker method, propose a high precise algorithm, that is creating a rigid plane and coinciding the plane's start position to the end position by steps, uniting the rotation matrix of each step, finally calculate the angle. After analyzing the error of this algorithm, propose a method to select best three points that can reduce the error. At last, design a test to validate the precision. The result show that the coincide algorithm with three points has 0.05 degree error. This algorithm with this error meet the demand of airplane surface rotate measurement.

**Keywords:** three points coincide algorithm; rotation angle; control surface; airplane

### 0 引言

飞机在空中飞行的姿态是通过飞机活动面转动来控制的, 为了验证活动面的转动是否符合要求, 需要对活动面的转动角度测量。飞机活动面的转动角度主要有这些方式: 线位移测量方式<sup>[1]</sup>、角度尺测量方式<sup>[2]</sup>、MEMS 陀螺仪测量方式<sup>[3]</sup>、拍摄测量方式和激光跟踪仪测量等方式。其中线位移测量方式需要确定测量点或传感器安装点的位置, 该位置的测量误差会导致角度的误差。角度尺测量方式是在活动面上安装角度尺进行测量, 这需要注意角度尺的转轴要与活动面的转轴平齐, 这种方式由角度尺安装导致的误差较严重。MEMS 陀螺仪测量方式是对转动加速度进行二次积分得到角度, 借助重力进一步修正<sup>[4]</sup>, 相当于倾角传感器来测量<sup>[5]</sup>。但对于方向舵这种转轴比较垂直的活动面<sup>[6]</sup>, 修正效果不佳, 使得测量精度不佳。

拍摄测量方式<sup>[7]</sup>和激光跟踪仪测量<sup>[8]</sup>方式都是在活动面上取样点, 对样点的空间坐标进行处理得到转动角度。由于这两种测量方式在测量空间位置的精度都很高, 其得到的角度精度也很高。本文主要探讨从样点数据中计算得到活动面的转动角度的方法, 并提出一种计算角度精度较高的算法。

### 1 二面夹角问题

二面夹角问题是指活动面的转动角度, 不一定是活动面上某个平面转动前后法线的夹角, 其根本原因是刚体转动角度不能由该刚体内某平面的转动角度来表征。通过拍摄测量方式或激光跟踪仪方式来测量活动面的转动角度, 首先必须获得一定数量的活动面的样点。通过这些点构建刚体, 活动面的转动角度就是该刚体的转动角度。下面详细分析活动面刚体的转动角度与该刚体内某一平面的法线变化角度的区别。

通过拍摄测量或激光跟踪仪在活动面上采集一组样点, 如图 1 左侧图所示。由于活动面是刚性的, 可采用刚体内任意平面表征刚体的转动。

图右 1 侧图所示的三个点  $A, B, C$  所在平面, 转动前该三点处于  $A_0, B_0, C_0$  的位置上, 转动后处于  $A_1, B_1, C_1$  的位置上。活动面转动的角度就是面  $A_0B_0C_0$  转动到面  $A_1B_1C_1$  的角度。

需要注意的是面  $A_0B_0C_0$  转动到面  $A_1B_1C_1$  的角度并非面  $A_0B_0C_0$  与面  $A_1B_1C_1$  的夹角<sup>[9-10]</sup>, 除非两个面的法矢与转动轴垂直。也就是说, 二面夹角不一定是转动的角度。如图 2 所示, 活动面绕某个轴转动,  $n_0$  是平面  $A_0B_0C_0$  的法

收稿日期: 2020-06-03; 修回日期: 2020-09-02。

作者简介: 段曙凯(1990-), 男, 江西余干人, 硕士, 工程师, 主要从事飞控系统集成测试方向的研究。

引用格式: 段曙凯, 李徐辉, 吴 熙, 等. 基于三点重合算法的飞机活动面转角测量研究[J]. 计算机测量与控制, 2021, 29(1): 45-49.

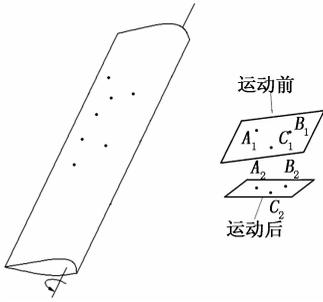


图 1 平面表征刚体的运动

矢,  $n_1$  是平面  $A_1B_1C_1$  的法矢。将平面  $A_0B_0C_0$  随着中心的平移和  $n_0$  的直接转动, 到平面  $A_1B_1C_1$  是在  $A_0'$ ,  $B_0'$  和  $C_0'$  的位置, 并不和  $A_1, B_1$  和  $C_1$  重合。这是因为选取的平面其法矢不与转动轴垂直所致。

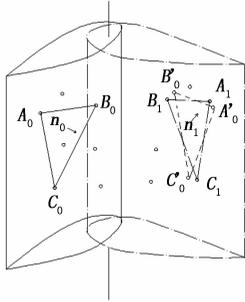


图 2 二面夹角不一定是转动角

活动面的转动可分解成法矢的转动和以法矢为轴的转动。由于活动面是曲面的, 基本不可能选择到这样的平面, 其法矢与活动面转轴垂直。在文献[2]中描述的方法是先确定平面与其转轴的夹角, 通过前后平面夹角、平面与转轴夹角以及实际活动面转动夹角之间的关系计算实际平面的转动夹角。这种方法的应用需事先确定选取平面与转轴的夹角, 对测量的操作要求较高。本文提出一种重合算法得到活动面的转角, 适用于随机选取平面的测量方法, 这种测量方法效率会有很大的提高, 同时通过重合算法精度也得以保证。

### 2 三点分步重合

基于上述分析, 不能直接用二面夹角来表征活动面的转角。因为两个平面的重合不一定是刚体的重合, 但平面的三角面片的重合就可以决定两个刚体的重合。当然重合的时候需要注意方向, 因为三角面片的重合会导致刚体两个方向的重合, 即三角面片正反面的重合, 但只有一个方向可使得刚体完全重合, 后续会详细介绍。三角面片的重合无法一步到位, 需将三角面片内三个顶点分步重合。三点重合算法就是三角面片的三个顶点分步重合, 通过该算法计算得到三角面片转动角度, 从而计算活动面刚体的转动角度。以图 1 的三个顶点为例, 下面描述该分步重合的过程。

将  $A_0B_0C_0$  和  $A_1B_1C_1$  单独取出, 先通过平移, 将  $A_0$  重合到  $A_1$  上, 同时  $B_0$  平移到  $B_0'$  上,  $C_0$  平移到  $C_0'$  上。这

是第一个点的重合, 该重合只是平移, 没有旋转。如图 3 所示。

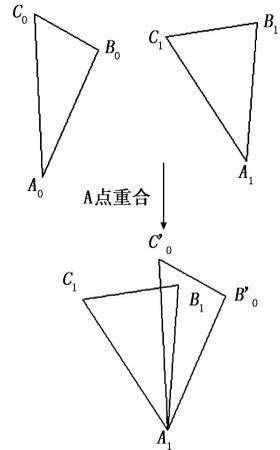


图 3 第一点的重合

将  $B_0'$  绕  $A_1$  点转动到  $B_1$  点上, 此时  $C_0'$  转动到  $C_0''$  上, 如图 4 所示。这个转动是直线定点转动, 旋转轴是两条直线形成的平面的法线, 转动角度是两条直线的夹角。

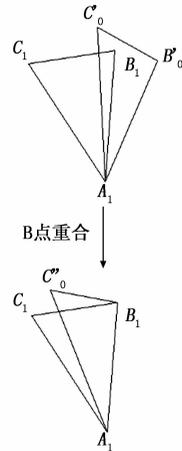


图 4 第二点的重合

$A$  点的重合过程和  $B$  点重合过程可以合在一起用式表示:

$$B_1 - A_1 = (B_0 - A_0) \cdot M_B$$

式中,  $M_B$  是  $B$  点重合过程的旋转矩阵, 即矢量  $A_1B_1$  旋转到  $A_0B_0$ 。旋转轴是直线  $A_1B_1$  与  $A_1B_0'$  形成的平面的法线。由于  $A_1B_0'$  是  $A_1B_1$  平移所得, 其两条直线的矢量是相同的, 所以旋转轴矢量  $n_B$  为:

$$n_B = \frac{A_1B_1 \times A_0B_0}{|A_1B_1| |A_0B_0|}$$

转动角  $\theta_B$  为直线  $A_1B_1$  与  $A_1B_0'$  的夹角, 也就是  $A_1B_1$  与  $A_0B_0$  的夹角的余弦值为:

$$\cos\theta_B = \frac{A_1B_1 \cdot A_0B_0}{|A_1B_1| |A_0B_0|}$$

根据罗德里格斯公式可得旋转矩阵  $M_B$ :

$$M_B = (1 - \cos\theta_B) \cdot n_B^+ + \cos\theta_B \cdot I_3 + \sin\theta_B \cdot n_B^\times$$

其中:  $n_B^+$  为旋转轴矢量  $n_B$  的张量矩阵,  $I_3$  为 3 阶单位矩阵,  $n_B^\times$  为旋转轴矢量  $n_B$  对应的反对称矩阵。由于活动面转动角度不会超过  $90^\circ$ , 所以公式中的正弦值是正数。需要注意的是使用罗德里格斯公式时, 旋转轴矢量  $n_B$  需要单位化。在 A 重合过程和 B 重合过程中, C 点也同时运动  $C''$  点上, 其运动可表示为:

$$C_0'' - A_1 = (C_0 - A_0) \cdot M_B$$

最后一步就是 C 的重合, 也就是  $C_1$  与  $C_0''$  重合, 这个过程需要将  $A_1B_1C_0''$  绕  $A_1B_1$  轴旋转到  $A_1B_1C_1$ , 如图 5 所示。

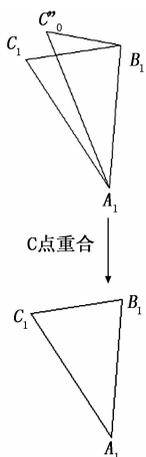


图 5 第三点的重合

旋转角度为  $A_1B_1C_0''$  与  $A_1B_1C_1$  的夹角, 即两个面的法线夹角。  $A_1B_1C_1$  法线  $n$  为:

$$n = A_1C_1 \times A_1B_1$$

$A_1B_1C_0''$  的法线  $n'$  为:

$$n' = A_1C_0'' \times A_1B_1$$

需要注意, 参与计算  $n$  与  $n'$  的  $A_1C_1$  与  $A_1C_0''$  方向必须是同时是 A 到 C, 或者同时是 C 到 A。转动角度的余弦值为:

$$\cos\theta_C = \frac{n \cdot n'}{|n| \cdot |n'|}$$

$A_1B_1C_0''$  旋转到  $A_1B_1C_1$  的旋转轴矢量为:

$$n_C = \pm \frac{A_1B_1}{|A_1B_1|}$$

需要注意的是旋转轴矢量的方向, 也就是式中的正负号。三角面片的重合会使得刚体由两个方向的重合, 正面和反面重合, 也就体现在  $n$  的正负号上。在直线 AB 上任取一点 D, 连接出两条径向矢量  $DC_1$  与矢量  $DC_0''$ , 如图 6 所示。矢量  $DC_0''$  转动到矢量  $DC_1$  的旋转轴矢量为  $n_D = DC_0'' \times DC_1$ 。

无论 D 在直线 AB 哪个位置, C 点重合所绕的旋转轴矢量  $n_C$  与  $n_D$  的夹角是锐角, 才能保证右手旋转方向规则。将 D 选在 A 这个位置也满足要求, 因此也必须要求旋转轴矢量  $n_C$  与  $A_1C_0'' \times A_1C_1$  成锐角。即:

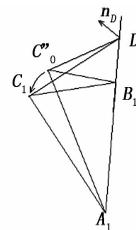


图 6 第三点的重合

$$n_C = \begin{cases} \frac{A_1B_1}{|A_1B_1|} & \text{if } A_1B_1 \cdot (A_1C_0'' \times A_1C_1) > 0 \\ -\frac{A_1B_1}{|A_1B_1|} & \text{if } A_1B_1 \cdot (A_1C_0'' \times A_1C_1) < 0 \end{cases}$$

根据罗德里格斯公式可得旋转矩阵  $M_C$ :

$$M_C = (1 - \cos\theta_C) \cdot n_C^+ + \cos\theta_C \cdot I_3 + \sin\theta_C \cdot n_C^\times$$

其中:  $n_C^+$  为旋转轴矢量  $n_C$  的张量矩阵,  $I_3$  为 3 阶单位矩阵,  $n_C^\times$  为旋转轴矢量  $n_C$  对应的反对称矩阵。由于活动面转动角度不会超过  $90^\circ$ , 所以公式中的正弦值是正数。需要注意的是使用罗德里格斯公式时, 旋转轴矢量  $n_C$  需要单位化。

使 B 点重合的矩阵为  $M_B$ , 使 C 点重合的矩阵为  $M_C$ 。两个矩阵的合成为  $M$ , 该  $M$  即为活动面刚体的旋转矩阵。

$$M = M_B M_C$$

所以旋转角度为:

$$\theta = \arccos \frac{tr(R) - 1}{2}$$

式中,  $\theta$  是三点分步重合的角度, 也是活动面转动的角度,  $tr(R)$  是矩阵  $R$  的迹。

三点分步旋转重合是三角面片的重合过程, 通过该过程得到三角面片的重合角度, 也就得到活动面的角度旋转角度。三点分步的第一步是先平移是某个点在运动前后位置重合。再绕已经重合的点将另一点旋转重合, 这样面片的一条线段也重合。最后, 以该线段为旋转轴, 将另一点旋转重合。两次旋转重合对应的旋转矩阵相乘即得到最终的旋转矩阵, 通过该旋转矩阵得到最终的转动角, 也就是活动面的转动角。这就是三点重合算法的大概过程。

### 3 误差与三点选取

三点分步重合算法的精度依赖于选取的三个点, 由于点位测量会有一定的误差, 如果选取的点能将这些点误差对角度的影响降到最低, 那么三点分步重合算法的精度就最高。在径向上选取两点 A 和 B, 运动前 A 和 B 分别在  $A_0$  和  $B_0$  的位置上, 运动后 A 和 B 分别在  $A_1$  和  $B_1$  的位置上。将这些点向垂直于转动轴的平面投影, 并将  $B_0$  和  $B_1$  重合, 如图 7 所示。

$A'_1$  是 A 运动后的实际位置,  $A_1$  是测量的位置。  $A_1$  与  $A'_1$  之间的误差既有 A 点测量的误差, 又有 B 点测量的误差, 即为  $\delta p_A + \delta p_B$ 。该误差所导致角度的误差与该误差的关系为:

$$\delta\theta = \frac{\delta p_A + \delta p_B}{d}$$

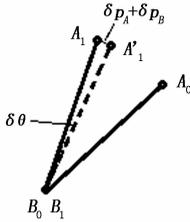


图 7 误差分析示意图

式中,  $d$  为  $A$  和  $B$  的距离。可知在径向上, 如果选取两点的径向距离越大, 其位置误差引起的角度误差越小。众所周知, 若一个点离转动轴越远, 同一个角度下, 其运动的距离也就越大。若一个点离转动轴越近, 同一个角度下, 其运动的距离也就越小。因此径向方向上两点的选取可以通过运动位移作为选择最佳两点的标准。通过该标准, 选取位移最大的和位移最小的两个点。

基于以上分析, 设计如图 8 的寻找最优两点的程序。流程图中的  $i$  是点的编号,  $pi$  是点  $i$  运动前的坐标,  $qi$  是运动后的坐标。 $di$  是编号  $i$  的点运动前后的距离。 $d_{max}$  是用于存储当前所遍历到第  $i$  个点时发现的运动最大距离的变量,  $d_{min}$  为存储发现的最小距离的变量。该程序最后输出的是运动最大距离的点的编号和运动最小距离的点的编号。

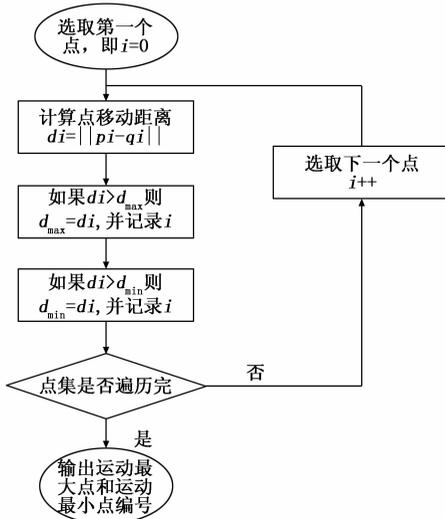


图 8 最优两点的搜寻流程图

可在轴向上选取一点, 根据同样的原理, 如果  $C$  点离  $A$  和  $B$  的距离最远, 如图 9 所示, 那么  $C$  点测量的位置误差对角度误差影响最小。也就是说如果点  $A$ 、点  $B$  和点  $C$  形成的三角面片的面积最大, 那么位置误差对角度误差的影响最小。

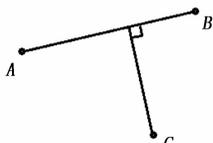


图 9 最优第三点的位置

三角形  $ABC$  的面积计算如下:

$$S = |AB \times AC|$$

使  $S$  最大点就是选取的第三点  $C$ 。

#### 4 试验结果与分析

为验证三点分步重合算法的精度, 进行精度验证试验。采用转台作为实际的转动角度基准。在转台上设置两个面, 一个是曲面, 一个是平面。平面的法线与转台转动轴线垂直, 曲面可以形成与转台轴线不垂直的面。转台在  $-25$  到  $25$  度之间运动, 每  $5$  度测量三次。为了样点测量方便, 采用拍照测量方式。即在平面和曲面上事先贴上标记点, 再通过这些标记点计算平面和曲面的转动角度, 再与实际转台的角度进行对比, 形成如下实验数据。

表 1 精度验证实验数据 单位:度

实际角度	轴线不垂直		轴线垂直	
	测量角度	测量误差	测量角度	测量误差
-25.000 0	-25.004	-0.0040	-25.014	-0.014 0
-25.000 0	-24.999	0.0010	-25.018	-0.018 0
-25.000 0	-24.994	0.0060	-25.008	-0.008 0
-20.000 1	-20.023	-0.0229	-20.004	-0.003 9
-20.000 1	-20.022	-0.0219	-20.004	-0.003 9
-20.000 1	-20.024	-0.0239	-20.002	-0.001 9
-15.000 4	-15.015	-0.0146	-15.011	-0.010 6
-15.000 4	-15.018	-0.0176	-14.999	0.001 4
-15.000 4	-15.008	-0.0076	-15.002	-0.001 6
-10.000 0	-10.018	-0.0180	-9.988	0.012 0
-10.000 0	-10.029	-0.0290	-9.992	0.008 0
-10.000 0	-10.024	-0.0240	-9.997	0.003 0
-5.000 0	-5.035	-0.0350	-5.018	-0.018 0
-5.000 0	-5.024	-0.0240	-5.007	-0.007 0
-5.000 0	-5.015	-0.0150	-4.992	0.008 0
0.000 0	0.010	0.0100	0.012	0.012 0
0.000 0	0.013	0.0130	0.010	0.010 0
0.000 0	0.012	0.0120	0.011	0.011 0
5.000 0	4.988	-0.0120	5.009	0.009 0
5.000 0	4.974	-0.0260	5.017	0.017 0
5.000 0	4.972	-0.0280	5.017	0.017 0
10.000 2	9.973	-0.0272	9.980	-0.020 2
10.000 2	9.975	-0.0252	9.968	-0.032 2
10.000 2	9.977	-0.0232	9.981	-0.019 2
15.000 1	14.966	-0.0341	14.992	-0.008 1
15.000 1	14.965	-0.0351	14.981	-0.019 1
15.000 1	14.967	-0.0331	14.984	-0.016 1
20.000 2	19.970	-0.0302	19.960	-0.040 2
20.000 2	19.965	-0.0352	19.972	-0.028 2
20.000 2	19.971	-0.0292	19.975	-0.025 2
25.000 1	24.953	-0.0471	24.979	-0.021 1
25.000 1	24.955	-0.0451	24.962	-0.038 1
25.000 1	24.952	-0.0481	24.956	-0.044 1

从表 1 中可知, 曲面样点计算的误差绝对值的平均值为 0.023 度, 误差最大为 -0.048 1, 这是该算法用于轴线不垂直的情况; 平面样点计算的误差绝对值平均值为 0.015 3 度, 误差最大值为 -0.044 1, 这是该算法用于轴线垂直的情况。将每个角度的三个测量数据误差平均并取绝对值, 可作图 10 的误差变化曲线。

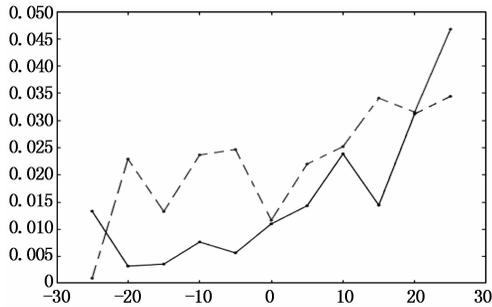


图 10 误差变化曲线

图 10 中, 虚线为曲面样点计算 (即轴线不垂直) 的误差曲线, 实线为平面样点计算轴线 (即垂直) 的误差曲线。从图 10 中可以看出, 在轴线不垂直时的误差相对与轴线垂直的误差较大, 随着角度增大误差也增大。前者的主要原因是轴线垂直重合过程两步即可完成, 一步是平移, 另一步是旋转; 而轴线垂直不垂直时重合过程有第三步, 一步平移和两步旋转。随着角度增大误差也增大的主要原因是角度每一次增加会有一定的误差累积, 该情况在很多算法中也会存在, 是一个通病, 可不作为衡量算法好坏的标准。通过本精度验证实验可知, 本试验的三点重合算法的误差在 0.05 度范围内, 该误差满足实际生产中飞机活动面的转角测量要求。

### 5 结束语

本文提出了一种三点重合的算法用于拍摄测量活动面角度或激光跟踪仪测量活动面角度, 重合的过程是先平移是某个点在运动前后位置重合。再绕已经重合的点将另一点旋转重合, 这样面片的一条线段也重合。最后, 以该线段为旋转轴, 将另一点旋转重合。两次旋转重合对应的旋

转矩阵相乘即得到最终的旋转矩阵, 通过该旋转矩阵得到最终的转动角, 也就是活动面的转动角。

然后从原理上对误差进行分析, 提出一种最佳选取三点的方法, 即选取前后运动位移最小的点和最大点, 再选取一点离之前两点连成的直线最远的点, 这样可形成面积最大的三角面片, 从而减少位移测量产生的误差对旋转角度计算上的误差。设计一种实验, 该实验采用拍摄测量的方式, 以快速取得多个样点。设置一转台, 转台上设置一曲面与一平面, 通过比较曲面样点计算的角度、平面样点计算得到的角度与转台实际转动的角度进行对比。该实验结果表明, 本文所提出的三点重合的算法误差在 0.05 度范围内, 满足飞机活动面的转角测量要求。

### 参考文献:

[1] 项 华, 莫 斌. 用拉线式位移传感器测量飞机操纵系统偏转角度的技术研究 [A]. 2018 年中国航空测控技术年会 [C]. 2018, 349-353.

[2] 中国航空工业集团公司西安飞机设计研究所. 一种飞机舵面偏转角测量工具及测量方法: 中国, 201010232319 [P]. 2012, 10,10.

[3] 中国航空工业集团公司西安飞机设计研究所. 一种飞机舵面偏角测量系统: 中国, 201310607167 [P]. 2015.05.27.

[4] 王 辉. 基于捷联惯性技术飞控运动参数测量系统研究 [D]. 上海: 上海交通大学, 2015.

[5] 程凌频. 基于倾角传感器的舵面偏转角测量方法 [J]. 信息与电脑 (理论版), 2015 (13): 25-26.

[6] 李长有, 野贵荣. 飞机尾翼转角测量系统设计 [J]. 计算机测量与控制, 2014, 22 (12): 3867-3869.

[7] 何 森, 侯宏录, 王 尧. 基于特征圆单目视觉的飞机舵面角位移标定技术 [J]. 光学技术, 2006 (4): 524-526.

[8] 卢小勇. 基于激光跟踪仪的飞机部件对接调姿软件系统设计与开发 [D]. 上海: 上海交通大学, 2012.

[9] 戴 滨. 飞机活动面转角测量的方法探讨 [J]. 民用飞机设计与研究, 2015 (3): 23-25.

[10] 江西洪都航空工业集团有限责任公司. 一种飞机舵面偏转角度转换方法: 中国, 201210223626[P]. 2015.04.08

[11] 段曙凯, 李长有, 野贵荣. 基于三点重合算法的飞机活动面转角测量研究 [J]. CIRP Annals - Manufacturing Technology, 2018, 67 (1): 169-172.

[12] Tao Fei, Zhang Meng. Digital twin shop-floor: a new shop-floor paradigm toward smart manufacturing [J]. IEEE Access, 2017, 5: 20418-20427.

[13] Guo Daqiang, Zhong R, Peng Lin, et al. Digital twin-enabled graduation intelligent manufacturing system for fixed-position assembly islands [J/OL]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2019, https://doi.org/10.1016/j.rcim.2019.101917.

[14] Jung J, Oluwasegun A. The application of machine learning for the prognostics and health management of control element drive system [J/OL]. Nuclear Engineering and Technology, 2020. http://doi.org/10.1016/j.net.2020.03.028.

[15] Tuegel E, Ingrassia A, Eason T, et al. Reengineering aircraft structural life prediction using a digital twin [J/OL]. International Journal of Aerospace Engineering, 2011: 1-14. http://doi.org/10.1155/2011/154798.

[16] Tao Fei, Zhang Meng, Liu Yushan, et al. Digital twin driven prognostics and health management for complex equipment