

# 时延与丢包情形下的网络控制系统量化反馈镇定

王春平

(浙江理工大学 科技与艺术学院, 浙江 上虞 312369)

**摘要:** 网络控制系统是通过实时网络来形成闭环反馈的控制系统; 网络的介入会带来许多不确定因素, 包括网络诱导时延和数据包丢失以及量化误差, 它们会影响系统的稳定性, 严重时甚至会导致系统失稳; 文章针对短时延网络控制系统, 考虑传感器—控制器和控制器—执行器两个通道都存在数据包丢失, 在传感器到控制器端设立量化器, 将系统建模为一个异步动态系统, 利用异步动态系统指数稳定性理论、线性矩阵不等式工具分析了闭环系统稳定性, 并基于 MATLAB 软件的线性矩阵不等式 (LMI) 工具箱实验仿真进行有效性验证, 结果证明了方案的可行性, 最后给出控制器参数的设计方法。

**关键词:** 网络控制系统; 短时延; 数据包丢失; 量化; 异步动态系统

## Quantization Feedback Control of Networked Control Systems with Delay and Data Packet Dropout

Wang Chunping

(Keyi College, Zhejiang Sci-Tech University, Shangyu 312369, China)

**Abstract:** Feedback control systems wherein the control loops through a real-time network are called networked control system. Network intervention brings many uncertain factors, such as network induced delay, data packet dropout and quantization error, which will affect the stability of the system, and even lead to the instability of the system. As for delay network control system with quantizer, sensor-to-controller channel and controller-to-actuator channel both have data packet dropout, and the system is modeled as an asynchronous dynamic system. The stability of the system is analyzed by using the exponential stability theory of asynchronous dynamic system and linear matrix inequality toolbox. The numerical example is simulated by linear matrix inequality (LMI) toolbox of Matlab software, and the feasibility of the scheme is verified. Finally, the design method of controller parameters is presented.

**Keywords:** networked control system; short time delay; data packet dropout; quantization; asynchronous dynamic system

### 0 引言

网络控制系统 (NCSs, networked control systems) 是通过一个实时网络来形成闭环的反馈控制系统, 它由控制器、多个执行器、被控对象、多个传感器和控制网络构成的<sup>[1-2]</sup>。由于通信网络的介入, 闭环反馈回路 (即传感器—控制器通道和控制器—执行器通道) 中的各种数据传递都要通过这个控制网络才能实现。相较于传统的简单控制系统, NCSs 可以减少系统布线, 能够实现对系统的实时监测与控制, 易于对系统进行诊断和维护; 还能通过网络实现信息共享, 增加系统的灵活性, 还有其他许多优点。基于这些优势, NCSs 已经在航空航天系统、电力系统、工业过程控制系统、汽车控制系统等领域受到了广泛的关注与应用。

但同时, 也正是因为因为在反馈回路中引入了通信网络, 很多在传统控制理论中的很多理想性假设需要被重新考虑。比如传统控制理论中系统组件之间是点对点的, 传感器—

控制器通道和控制器—执行器通道之间信息传递不存在时延, 而且在网络环境中, 多个节点共用一个通信网络, 可能会导致网络阻塞甚至中断, 由此会引发网络诱导时延与数据包丢失或乱序。由此导致控制系统的分析与设计变得更加复杂。NCSs 涉及的通信数据都是数字信号的, 即连续信号在被传输之前必须经过数据量化的处理<sup>[3-4]</sup>, 这会严重影响控制器接收传感器发送的采样数据以及执行器接收控制器发出的控制数据, 严重时会导致系统失稳。所以控制系统的分析与设计变得尤为关键。

基于此, 本文针对短时延 NCSs, 考虑两个通道 (传感器—控制器通道和控制器—执行器通道) 都存在数据包丢失以及传感器—控制器通道设置量化器存时的系统稳定性问题, 对系统进行了建模、稳定性分析与控制器设计, 并利用 Matlab 的线性矩阵不等式即 LMI (linear matrix inequality) 工具箱<sup>[5]</sup>进行了算例仿真验证。

### 1 网络控制系统结构与建模

假设丢包概率一定, 那么丢包过程可以等效为按一定速率切换的开关, 开关闭合表示数据正常传输, 开关打开表示发生数据包丢包<sup>[6-8]</sup>。另外, NCSs 中最常见的另外一个现象就是网络诱导时延, 如果系统设计没有考虑网络诱导时延的影响, 那么控制系统的性能可能会得到降低, 严重

收稿日期: 2020-04-28; 修回日期: 2020-05-17。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61374083), 浙江理工大学科技与艺术学院科研资助项目 (KY2018013)。

作者简介: 王春平 (1978-), 男, 浙江常山人, 硕士研究生, 讲师, 主要从事工业过程系统的网络化控制、智能控制方向的研究。

时甚至使得系统失稳。因此，本文进一步考虑系统存在短时延的情况，如果将传感器—控制器通道存在的时延记为  $\tau_s$ ，控制器—执行器通道存在的时延，记为  $\tau_c$ ，那么网络总时延  $\tau = \tau_s + \tau_c < T$ ， $T$  为采样周期，传感器到控制器之间设置量化器，系统模型结构如图 1 所示。

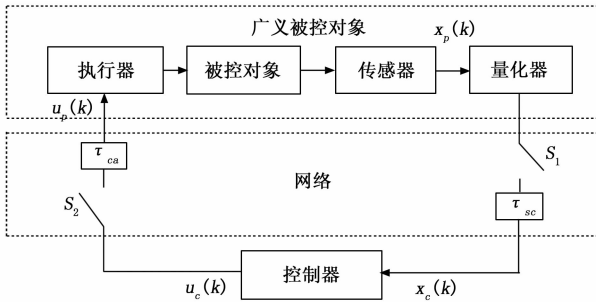


图 1 存在短时延和丢包的 NCSs 模型

由于网络通讯带宽受限，为保证采集的数据信号传输质量，在保证系统性能的前提下尽可能降低通信资源占用率，我们在网络传输通道中引入对数量化器，记为  $h(x)$ 。通过量化器，我们可以将传感器采集到的连续信号进行量化处理，转化为一定数量的离散信号，这些离散信号可以代表传感器采集的信号，编码、传输这些离散信号可以在极大程度上降低连续信号的传输量。

量化器记为  $\mathbf{h}(x) = [h_1(x_1) h_2(x_2) \cdots h_n(x_n)]$ ，定义如下：

$$h_m(x_m) = \begin{cases} v_l^{(m)}, & x_m > 0 \\ 0, & x_m = 0 \\ -h_m(-x_m), & x_m < 0 \end{cases}$$

其中：若  $x_m > 0$  时， $\frac{1}{1+\epsilon_{h_m}} v_l^{(m)} < x_m < \frac{1}{1-\epsilon_{h_m}} v_l^{(m)}$ ， $\epsilon_{h_m} =$

$\frac{1-\rho_{h_m}}{1+\rho_{h_m}}$ ，且  $\rho_{h_m} \in [0, 1]$ ， $\rho_{h_m}$  表示量化密度， $m=1, 2, \dots, n$ 。根据文献 [3]，定义：

$$\mathbf{v}_m = \{\pm v_l^{(m)}, v_l^{(m)} = \rho_{h_m}^l v_0^{(m)}, v = \pm 1, \pm 2 \cdots\} \cup \{\pm v_0^{(m)}\} \cup \{0\}, v_0^{(m)} > 0$$

记  $\Delta \mathbf{h} = \text{diag} \{\Delta h_1, \Delta h_2, \dots, \Delta h_n\}$ ，其中， $\Delta h_m \in [-\epsilon_{h_m}, \epsilon_{h_m}]$ 。根据文献 [3]，有：

$$\mathbf{h}(x) = (\mathbf{I} + \Delta \mathbf{h}) \mathbf{x}$$

假设系统采用输入零阶保持器策略，即在数据包到达之前保持前一周期的输入，且传感器采用时间驱动，控制器和执行器采用事件驱动。那么，我们可以将系统描述为以下 4 种情况：

1) 开关  $S_1, S_2$  都闭合：

$$\mathbf{x}_c(k) = \begin{cases} (\mathbf{I} + \Delta \mathbf{h}) \mathbf{x}_p(k), & kT < t < kT + \tau_c \\ \mathbf{x}_c(k-1), & kT + \tau_c < t < (k+1)T \end{cases}$$

$$\mathbf{u}_p(k) = \begin{cases} \mathbf{u}_c(k), & kT < t < kT + \tau \\ \mathbf{u}_p(k-1), & kT + \tau < t < (k+1)T \end{cases}$$

2) 开关  $S_1$  闭合，开关  $S_2$  打开：

$$\mathbf{x}_c(k) = \begin{cases} (\mathbf{I} + \Delta \mathbf{h}) \mathbf{x}_p(k), & kT < t < kT + \tau_c \\ \mathbf{x}_c(k-1), & kT + \tau_c < t < (k+1)T \end{cases}$$

$$\mathbf{u}_p(k) = \mathbf{u}_p(k-1)$$

3) 开关  $S_1$  打开，开关  $S_2$  闭合：

$$\mathbf{x}_c(k) = \mathbf{x}_c(k-1)$$

$$\mathbf{u}_p(k) = \mathbf{u}_p(k-1)$$

4) 开关  $S_1, S_2$  打开：

$$\mathbf{x}_c(k) = \mathbf{x}_c(k-1)$$

$$\mathbf{u}_p(k) = \mathbf{u}_p(k-1)$$

进一步将上述结果简化为两种情况：没有发生丢包（开关  $S_1, S_2$  都闭合）与发生丢包（开关  $S_1$  和  $S_2$  中至少有一个打开）。如果引入一个二值变量  $i$  来表示系统的丢包情况：

$$i = \begin{cases} 1, & \text{未发生丢包} \\ 2, & \text{发生丢包} \end{cases}$$

那么，当  $i=1$  时，

$$\mathbf{u}_p(k) = \begin{cases} \mathbf{u}_c(k), & kT < t < kT + \tau \\ \mathbf{u}_p(k-1), & kT + \tau < t < (k+1)T \end{cases}$$

当  $i=2$  时，

$$\mathbf{u}_p(k) = \mathbf{u}_p(k-1)$$

我们可以将图 1 等效为如图 2 所示的单边丢包与短时延系统。

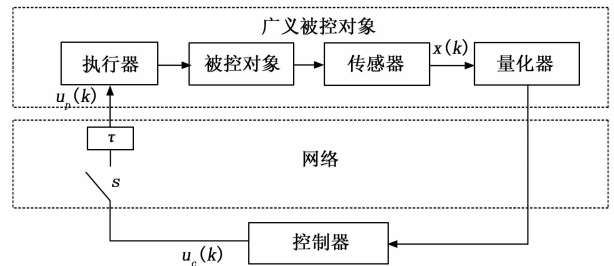


图 2 等效的单边丢包与短时延 NCSs 模型

在 NCSs 中，被控对象一般是连续的，而控制器却是离散的，所以要对其进行离散化。假设连续时间下的被控对象状态模型为：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

离散时间下的状态反馈控制器为：

$$\mathbf{u}_c(k) = \mathbf{K}(\mathbf{I} + \Delta \mathbf{h}) \mathbf{x}_c(k) = (\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) \mathbf{x}(k) \quad (1)$$

令  $\Delta \mathbf{K} = \mathbf{K} * \Delta \mathbf{h}$ ，那么，离散时间下的被控对象状态模型为<sup>[8]</sup>：

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{cases} \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_1 \mathbf{u}_c(k) + \mathbf{H}_2 \mathbf{u}_p(k-1), & i = 1 \\ \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}_p(k-1) & i = 2 \end{cases}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (2)$$

其中： $\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}T}$ ， $\mathbf{H} = (\int_0^T e^{\mathbf{A}\sigma} d\sigma) \mathbf{B}$ ， $\mathbf{H}_1 = \int_0^{T-\tau} e^{\mathbf{A}\sigma} \mathbf{B} d\sigma$ ， $\mathbf{H}_2 =$

$\int_{T-\tau}^T e^{\mathbf{A}\sigma} \mathbf{B} d\sigma$ 。将式 (1) 代入到式 (2) 中可得：

$$\mathbf{x}(k+1) =$$

$$\begin{cases} (G + H_1(K + \Delta K))x(k) + H_2 u_p(k-1), & i = 1 \\ Gx(k) + Hu_p(k-1), & i = 2 \end{cases} \quad (3)$$

定义增广向量矩阵  $\varphi(k) = [x^T(k) \quad u_p^T(k-1)]^T$ , 则可以得到一个异步动态系统,

$$\varphi(k+1) = \Phi_i \varphi(k) \quad (4)$$

其中,

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} G + H_1(K + \Delta K) & H_2 \\ K & 0 \end{bmatrix}, \Phi_2 = \begin{bmatrix} G & H \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

## 2 指数稳定性分析

本文考虑的 NCSs 是同时包含连续时间的被控对象与离散事件的闭环系统, 称为异步动态系统 (ADS, asynchronous dynamic system), 是兼具离散动态和连续动态的系统, 也称为混杂系统, 由 Hassibi 等人在 1999 年首次提出<sup>[6]</sup>, 其时间动力学模型由差分方程描述, 切换开关描述离散事件动力学模型。数据包到达亦或丢失以及有限开关的开启与闭合均能使用异步动态系统模型。如传感器输出的采样值通过量化器到达控制器, 采样数据和反馈数据均通过网络传输, 网络的不确定性包括超时等待或拥堵均能导致数据包丢失。文献[7]给出了异步动态系统指数稳定性的条件, 本节在此基础上展开 NCSs 稳定性分析, 首先需要用到如下引理。

引理 1<sup>[8]</sup>: 给定一个受事件率约束的异步动态系统  $x_{k+1} = f_s(x_k), s = 1, 2, \dots, N$ , 离散事件发生的概率为  $r_1, r_2, \dots, r_N, 0 < r_i < 1$  且  $\sum_{i=1}^N r_i = 1$ 。如果存在一个 Lyapunov 函数  $V: R^n \rightarrow R_+$ , 满足:

$$\beta_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \beta_2 \|x\|^2$$

其中:  $\beta_{1,2} > 0$ ; 且存在标量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ , 满足:

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq (\alpha_i^{-2} - 1)V(x_k) \quad (5)$$

$$\alpha_1^{\dagger} \alpha_2^{\dagger} \dots \alpha_N^{\dagger} > \alpha > 1 \quad (6)$$

则该系统是指数稳定的。

引理 2<sup>[9]</sup> (Schur 补引理): 如果给定常数矩阵  $A, P, Q$ , 其中  $Q=Q^T, P=P^T > 0$ , 那么  $A^T P A + Q < 0$  成立, 当且仅当  $\begin{bmatrix} -P^{-1} & A \\ A^T & Q \end{bmatrix} < 0$  或  $\begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0$ 。

定理 3: 对式 (4) 描述的异步动态系统  $\varphi(k+1) = \Phi_i \varphi(k)$ , 存在事件  $E_i (i) = \{E_1, E_2\}$ , 对应事件率为  $r_i = \{r_1, r_2\}, r_1 + r_2 = 1$ , 选取 Lyapunov 函数  $V(\varphi(k)) = \varphi^T(k) P \varphi(k)$ ,  $P$  为一个对称正定矩阵。那么, 如果存在标量  $\alpha_1, \alpha_2$ , 满足:

$$\alpha_1^{\dagger} \alpha_2^{\dagger} > \alpha > 1 \quad (7)$$

且存在  $X=P^{-1}$ , 满足:

$$\begin{bmatrix} -X & \Phi_i X \\ X \Phi_i^T & -\alpha_i^{-2} X \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

则式 (4) 所描述的 NCSs 是指数稳定的。

证明: 根据引理 1, 由于式 (4) 所描述的系统仅有两个离散事件, 所以由式 (6) 可以直接得到  $\alpha_1^{\dagger} \alpha_2^{\dagger} > \alpha > 1$ 。

根据引理 1 中的式 (5) 可以得到:

$$V(\varphi(k+1)) - V(\varphi(k)) \leq (\alpha_i^{-2} - 1)V(\varphi(k))$$

即:

$$V(\varphi(k+1)) - \alpha_i^{-2} V(\varphi(k)) \leq 0$$

将  $V(\varphi(k)) = \varphi^T(k) P \varphi(k)$  代入可得:

$$\varphi^T(k+1) P \varphi(k+1) - \alpha_i^{-2} \varphi^T(k) P \varphi(k) \leq 0$$

将:

$$\varphi(k+1) = \Phi_i \varphi(k)$$

代入得:

$$\varphi^T(k) \Phi_i^T P \Phi_i \varphi(k) - \alpha_i^{-2} \varphi^T(k) P \varphi(k) \leq 0$$

化简可得:

$$\Phi_i^T P \Phi_i - \alpha_i^{-2} P \leq 0$$

由于  $P$  是一个对称正定矩阵, 所以  $P^{-1}$  也是对称正定矩阵, 将上式分别左乘、右乘  $P^{-1}$ , 可以得到:

$$(\Phi_i P^{-1})^T P (\Phi_i P^{-1}) - \alpha_i^{-2} P^{-1} \leq 0$$

利用引理 2 可以得到:

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & \Phi_i P^{-1} \\ P^{-1} \Phi_i^T & -\alpha_i^{-2} P^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2$$

设  $X=P^{-1}$ , 代入上式, 得到:

$$\begin{bmatrix} -X & \Phi_i X \\ X \Phi_i^T & -\alpha_i^{(-2)} X \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2$$

定理 3 证毕。

仿真算例:

考虑被控对象状态方程描述的 NCSs 参数如下:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.15 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t) \quad (9)$$

采样周期为 0.3 s, 控制器和执行器节点都采用事件驱动, 系统总网络诱导时延为 0.1 s。若控制器增益为  $K = [-3.50 \quad -11.55]$ , 如果系统不发生丢包时是指数稳定的。那么要考虑: 当通信网络介入后, 发生数据丢包, 数据包的传输成功率为  $r_1 = 0.90$ , 即数据丢包发生的概率为  $r_2 = 1 - r_1 = 0.10$ , 此时, 利用 Matlab 的 LMI 工具箱构造线性矩阵不等式, 求解正定矩阵  $X$ , 最终可以得到如下结果:

$$G = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.2934 \\ 0 & 0.9560 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0.0044 \\ 0.0293 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.0020 \\ 0.0197 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0.0025 \\ 0.0096 \end{bmatrix}$$

代入到  $\Phi_1, \Phi_2$  中可得:

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} G + H_1 K & H_2 \\ K & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9931 & 0.2705 & 0.0025 \\ -0.0690 & 0.7284 & 0.0096 \\ -3.5000 & -11.5500 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} G & H \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2934 & 0.0044 \\ 0 & 0.9560 & 0.0293 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

假定  $\alpha_1 = 1.07, \alpha_2 = 0.76$ , 此时衰减率  $\alpha = \alpha_1^{\dagger} \alpha_2^{\dagger} = 1.0340 > 1$  满足定理 3 中的式 (7)。将上述结果代入定理 3 中的式 (8), 利用 Matlab 的 LMI 工具箱构造线性矩阵不等式系统, 并求得存在正定的对称矩阵  $X$  为:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 11.9006 & -3.8315 & 2.9143 \\ -3.8315 & 1.3873 & -2.0778 \\ 2.9143 & -2.0778 & 31.2453 \end{bmatrix}$$

通过该例可以验证定理 3 的结果是有效的，系统指数稳定性可行。

### 3 状态反馈控制器设计

在实际的应用场合中，往往需要通过考虑闭环系统稳定性进而设计控制器参数，本节假设已知 NCSs 的丢包率，利用 LMI 工具箱设计控制器参数使闭环 NCSs 是指数稳定的。

#### 3.1 LMI 处理方法

将离散状态空间模型简化为：

$$\mathbf{x}(k+1) =$$

$$\begin{cases} (\mathbf{G} + \mathbf{H}_1(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}))\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_2\mathbf{K}\mathbf{x}(k-1), & i = 1 \\ \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{x}(k-1), & i = 2 \end{cases}$$

$i=1$ ，不发生丢包， $i=2$ ，发生丢包。

则：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{G} + \mathbf{H}_1(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}) & \mathbf{H}_2\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}(k-1) \end{bmatrix}, & i = 1 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H}\mathbf{K} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}(k-1) \end{bmatrix}, & i = 2 \end{cases} \quad (10)$$

为具有两个离散事件的异步动态系统，要想该系统能够指数稳定，那么需要引理 1 的两个条件，从而得到满足条件的状态反馈控制器的设计。式 (6) 可以直接获得，式 (5) 可以通过线性矩阵不等式<sup>[8]</sup>得到。

选取李雅普诺夫函数  $\mathbf{V}(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k-1)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k-1)$ ， $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  均为对称的正定矩阵，那么根据引理 1 中的式 (5)：

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{V}(\mathbf{x}_k) \leq (\alpha_i^{-2} - 1)\mathbf{V}(\mathbf{x}_k)$$

可以得到：

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}_{k+1}) - \alpha_i^{-2}\mathbf{V}(\mathbf{x}_k) \leq 0$$

将李雅普诺夫函数代入得：

$$\mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) - \alpha_i^{-2}[\mathbf{x}^T(k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k-1)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k-1)] \leq 0$$

根据式 (10) 可以得到：

1) 当  $i=1$  时：

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}_{k+1}) - \alpha_i^{-2}\mathbf{V}(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}(k-1) \end{bmatrix}^T \Psi \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}(k-1) \end{bmatrix} \leq 0$$

这里，

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & (\mathbf{G} + \mathbf{H}_1(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}))^T \mathbf{P}\mathbf{H}_2\mathbf{K} \\ \Psi_{21} & (\mathbf{H}_2\mathbf{K})^T \mathbf{P}\mathbf{H}_2\mathbf{K} - \alpha_i^{-2}\mathbf{Q} \end{bmatrix}$$

$\Psi_{21} = \mathbf{H}_2\mathbf{K}\mathbf{P}(\mathbf{G} + \mathbf{H}_1(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}))^T$ ， $\Psi_{11} = (\mathbf{G} + \mathbf{H}_1(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}))^T \mathbf{P}(\mathbf{G} + \mathbf{H}_1\mathbf{K}) + \mathbf{Q} - \alpha_i^{-2}\mathbf{P}$ ，利用 Schur 补引理（即引理 2）可以得到：

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{G} + \mathbf{H}_1(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}) & \mathbf{H}_2\mathbf{K} \\ (\mathbf{G} + \mathbf{H}_1(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}))^T & \mathbf{Q} - \alpha_i^{-2}\mathbf{P} & 0 \\ (\mathbf{H}_2\mathbf{K})^T & 0 & -\alpha_i^{-2}\mathbf{Q} \end{bmatrix} < 0$$

分别左乘、右乘对角阵  $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix}$ ，得到如下对称

矩阵：

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P}^{-1} & (\mathbf{G} + \mathbf{H}_1(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}))\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{H}_2\mathbf{K}\mathbf{P}^{-1} \\ * & \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1} - \alpha_i^{-2}\mathbf{P}^{-1} & 0 \\ * & * & -\alpha_i^{-2}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

\* 表示矩阵相应元素的对称项。

2) 当  $i=2$  时：

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}_{k+1}) - \alpha_2^{-2}\mathbf{V}(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}(k-1) \end{bmatrix}^T \circ$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}^T \mathbf{P}\mathbf{G} - \alpha_2^{-2}\mathbf{P} & \mathbf{G}^T \mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{K} \\ (\mathbf{H}\mathbf{K})^T \mathbf{P}\mathbf{G} & \mathbf{V}22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}(k-1) \end{bmatrix} \leq 0$$

其中： $\mathbf{V}22 = (\mathbf{H}\mathbf{K})^T \mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{K} + \mathbf{Q} - \alpha_2^{-2}\mathbf{Q}$ ，同样地，

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{G} & \mathbf{H}\mathbf{K} \\ \mathbf{G}^T & -\alpha_2^{-2}\mathbf{P} & 0 \\ (\mathbf{H}\mathbf{K})^T & 0 & \mathbf{Q} - \alpha_2^{-2}\mathbf{Q} \end{bmatrix} < 0$$

分别左乘、右乘对角阵  $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix}$ ，得到：

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{G}\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{P}^{-1} \\ * & -\alpha_2^{-2}\mathbf{P}^{-1} & 0 \\ * & * & \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1} - \alpha_2^{-2}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

令  $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ ， $\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1}$ ， $\mathbf{Y} = \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{K}\mathbf{P}^{-1}$ ， $\Delta\mathbf{Y} = (\Delta\mathbf{K})$

$\mathbf{X}$  将式 (11) 和式 (12) 化简，最后可以得到如下线性矩阵不等式组：

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{X} & \mathbf{G}\mathbf{X} + \mathbf{H}_1(\mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y}) & \mathbf{H}_2\mathbf{Y} \\ * & \mathbf{T} - \alpha_1^{-2}\mathbf{X} & 0 \\ * & * & -\alpha_1^{-2}\mathbf{T} \end{bmatrix} < 0 \\ \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{X} & \mathbf{G}\mathbf{X} & \mathbf{H}\mathbf{Y} \\ * & -\alpha_2^{-2}\mathbf{X} & 0 \\ * & * & \mathbf{T} - \alpha_2^{-2}\mathbf{T} \end{bmatrix} < 0 \\ \mathbf{X} > 0 \\ \mathbf{T} > 0 \end{cases} \quad (13)$$

对式中存在的非线性项进行处理并根据 Schur 引理，式

(13) 可等价于：

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{X} & \mathbf{G}\mathbf{X} + \mathbf{H}_1\mathbf{Y} & \mathbf{H}_2\mathbf{Y} & \mathbf{H}_1 & 0 \\ * & \mathbf{T} - \alpha_1^{-2}\mathbf{X} & 0 & 0 & \mathbf{Y}^T \\ * & * & -\alpha_1^{-2}\mathbf{T} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon\mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon^{-1}\sigma\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{cases} E_2 = \begin{bmatrix} -X & GX & HY \\ * & -\alpha_2^{-2} X & 0 \\ * & * & T - \alpha_2^{-2} T \end{bmatrix} < 0 \\ X > 0 \\ T > 0 \end{cases}$$

利用 LMI 工具箱构造此线性矩阵不等式组，可以求得  $X$ 、 $T$ 、 $Y$ ，控制器参数可以通过  $K=YX^{-1}$  获得。

### 3.2 仿真实验与分析

仍然考虑被控对象状态方程如式 (9) 所示的 NCSs:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.15 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

传感器采样周期 0.3 s，系统总网络诱导时延为 0.1s，数据包的传输成功率为  $r_1=0.90$ ，即数据丢包发生的概率为  $r_2=1-r_1=0.10$ 。

根据引理 1 的式 (6)，取  $\alpha_1=1.07$ ， $\alpha_2=0.6$  时，则衰减率  $\alpha=1.034 > 1$ ，满足条件。选择  $\epsilon=0.02$ ， $\sigma=50$ 。再利用 LMI 工具箱求解如式 (13) 的线性矩阵不等式组，可得：

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 27.2525 & -6.4426 \\ -6.4426 & 2.0155 \end{bmatrix} \\ Y &= \begin{bmatrix} 1.8159 & -8.4680 \end{bmatrix} \\ T &= \begin{bmatrix} 0.1205 & -0.0501 \\ -0.0501 & 0.1287 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

在此基础上进一步计算控制器增益矩阵得  $K=YX^{-1}=[-3.7922 \quad -16.3232]$ ，用 Simulink 对系统搭建模型，输入阶跃信号，可得如图 3 所示的曲线， $x_1$  和  $x_2$  分别表示  $i=1$  和  $i=2$  时的系统阶跃响应波形。由图 3 可知，在 NCSs 发生丢包时，系统的阶跃响应曲线仍然能够保持收敛，证明了该系统的稳定性。

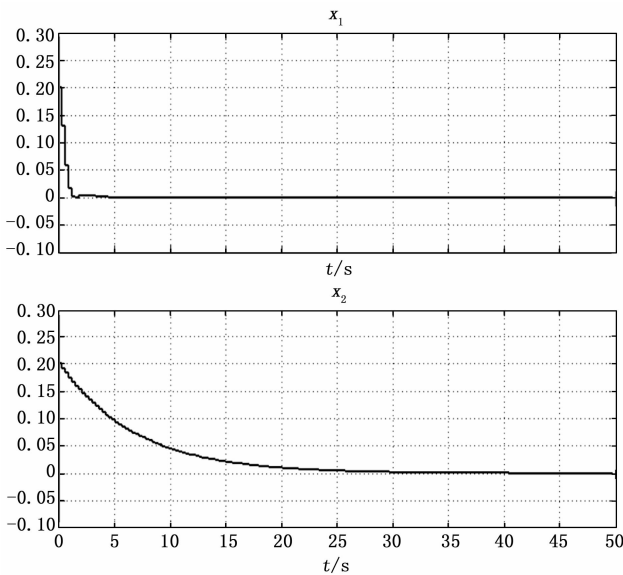


图 3 系统存在时延和丢包时的状态响应曲线图

## 4 结束语

NCSs 是控制领域的研究热点，但是由于网络的介入会带来许多问题，应用在分布式控制与存在丢包的情形时<sup>[9-12]</sup>，系统的分析与设计显得尤为重要。本文对存在短时延的 NCSs，不仅设置了对数量化器，而且考虑双通道的数据丢包问题，即传感器—控制器通道和控制器—执行器通道同时存在数据包丢失的情况，把系统建模成为具有两个离散事件的异步动态系统。在此基础上，根据异步动态系统稳定性理论进行该 NCSs 的指数稳定性分析，并利用 MATLAB 软件的 LMI 工具箱设计出了该异步动态系统控制器参数，同时进行实验仿真，仿真结果验证了本文方法是有效且可行的。

### 参考文献:

- [1] Zhang W, Branicky M S, Phillips S M. Stability of networked control systems [J]. IEEE Control Systems Magazine, 2001, 21 (1): 84 - 99.
- [2] Walsh G C, Ye H. Scheduling of networked control systems [J]. IEEE Control Systems Magazine, 2001, 21 (1): 57 - 65.
- [3] Peng C, Tian Y C. Networked H $\infty$  control of linear systems with state quantization [J]. Information Sciences, 2007, 177 (24): 5763 - 5774.
- [4] Fu M, Xie L. The sector bound approach to quantized feedback control [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50 (11): 1698 - 1711.
- [5] 俞立. 现代控制理论 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [6] Hassibi A, Boyd S P, How J P. Control of asynchronous dynamical systems with rate constraints on events [A]. Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and control [C]. Piscataway, USA, 1999: 1345 - 1351.
- [7] 刘蓝. 基于异步动态和容错模型的网络控制系统分析与设计 [D]. 北京: 北京交通大学, 2014.
- [8] Rabello A, Bhaya A. Stability of asynchronous dynamical systems with rate constraints and applications [J]. IEE Proceedings: Control Theory and Applications, 2003, 150 (5): 546 - 550.
- [9] 鄂大志. 网络控制系统的时延分析、建模与控制 [D]. 沈阳: 东北大学, 2010.
- [10] 余学锋, 张开维, 秦项乾. PTP 网络非对称时延抖动修正算法设计与分析 [J]. 计算机测量与控制, 2020, 28 (7): 210 - 213.
- [11] Farnam A, Mahboobi E R. Improved stabilization method for networked control systems with variable transmission delays and packet dropout [J]. ISA Transactions, 2014, 53 (6): 1746 - 1753.
- [12] Gu Z, Shi P, Yue D, et al. Decentralized adaptive event-triggered H $\infty$  filtering for a class of networked nonlinear interconnected systems [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49 (5): 1570 - 1579.
- [13] Wen D L, Yang G H. Dynamic output feedback H $\infty$  control for networked control systems with quantisation and random communication delays [J]. International Journal of Systems Science, 2011, 42 (10): 1723 - 1734.