

非线性间歇过程的迭代学习状态估计

吴宏亮^{1,2}, 赵忠盖^{1,2}, 刘飞^{1,2}

(1. 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122;

2. 江南大学 物自动化研究所, 江苏 无锡 214122)

摘要: 在间歇过程的状态估计中, 如何充分利用多批次重复特性信息是一个挑战; 迭代学习卡尔曼滤波方法利用卡尔曼滤波沿时间方向估计相邻两批次之间的状态误差, 并沿批次方向迭代更新当前状态估计, 兼顾了时间和批次两维特性; 但是, 这种方法只适用于线性系统, 针对非线性间歇过程, 提出一种迭代学习拟线性卡尔曼滤波器(ILQKF)方法; ILQKF基于间歇过程的标称模型, 将实际状态与标称状态之间的误差作为新状态, 建立了与误差相关的线性化模型; 然后, 根据迭代学习卡尔曼滤波方法, 对状态误差进行估计, 而状态轨迹为误差轨迹与标称轨迹之和, 从而估计出非线性间歇过程的状态。啤酒发酵过程的应用仿真验证了ILQKF方法的优越性。

关键词: 间歇过程; 多批次; 啤酒发酵; 状态估计; 迭代学习卡尔曼滤波; 迭代学习拟线性卡尔曼滤波

Iterative Learning State Estimation for Nonlinear Batch Process

Wu Hongliang^{1,2}, Zhao Zhonggai^{1,2}, Liu Fei^{1,2}

(1. Ministerial Key Laboratory of Advanced Control for Light Industry Processes, Wuxi 214122, China;

2. Institute of Automation, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: In state estimation of batch process, it is a challenge to make full use of the multi-batch repetitive characteristic information. An iterative learning Kalman filter method uses Kalman filter to estimate the state errors between adjacent batches along the time direction, and iteratively updates the current state estimation along the batch direction, taking into account both time and batch two-dimensional characteristics. However, this method only applies to linear systems. An iterative learning quasilinear Kalman filter (ILQKF) method is proposed to estimate the state of nonlinear batch process. Based on the nominal model of batch process, ILQKF takes the error between the real state and the nominal state as a new state. Then a linearized model related to the error is established. The estimation of the error is obtained by referring to the method of the iterative learning Kalman filter. The state trajectory is equal to the sum of the error trajectory and the nominal trajectory, so as to estimate the state of the nonlinear batch process. The beer fermentation simulation is used to verify the performance of the ILQKF method.

Keywords: batch process; multi-batch; beer fermentation; state estimation; iterative learning Kalman filter; iterative learning quasilinear Kalman filter

0 引言

间歇过程是一类重复生产过程, 按照相同的工序以批次为单位进行产品生产, 越来越多地应用于食品、生物制药以及化工领域。间歇过程中很多关键参数直接与产品质量相关, 需要对其进行实时监测。但是, 受限于传感器技术的发展, 间歇过程中的许多状态变量难以测量或者测量成本很高, 因此对间歇过程状态变量的估计尤为重要, 一直是工业界和学术界的关注焦点^[1]。卡尔曼滤波(Kalman filter, KF)是一种广泛应用的最优状态估计的方法, 但它

适用于线性系统, 而间歇过程通常具有非线性特性。对于非线性系统, 通常采用扩展卡尔曼滤波(Extended Kalman filter, EKF)方法, 无迹卡尔曼滤波和粒子滤波方法等^[2-5]。但是, 这些方法往往是连续过程状态估计的简单复制, 忽略了批次之间的相关性。

近年来, 为了提高间歇过程状态估计的性能, 迭代学习策略被引入状态估计, 考虑了批次运行之间的重复性和时间方向动态特性。迭代学习的思想来自于重复过程的控制, Arimoto等^[6]提出一种迭代学习控制(iterative learning control, ILC)方法, 针对重复运行的被控系统, 通过前一次或前几次的控制误差信息修正当前操作的控制输入, 最终实现在整个时间区间上系统的输出完全跟踪上期望轨迹。基于迭代学习的思想, 文献[7-9]设计了确定性重复系统的迭代学习观测器。然而, 实际间歇生产存在噪声干扰。

Zhao等^[10]考虑包含随机噪声的非线性间歇过程, 提出了一种用于批处理的迭代学习状态估计算法, 在当前批次粒子滤波的基础上, 引入上一批次输出值的估计误差作为修正项, 包含了上一批次的信息, 但修正项难以确定。

收稿日期: 2019-12-30; 修回日期: 2020-02-19。

基金项目: 国家自然科学基金(61833007, 61773183)。

作者简介: 吴宏亮(1995-), 女, 江西萍乡人, 硕士研究生, 主要从事间歇过程的参数和状态估计方向的研究。

赵忠盖(1976-), 男, 湖北荆州人, 教授, 博士研究生导师, 主要从事间歇过程建模与软测量、工业系统监控与诊断等方向的研究。

刘飞(1965-), 男, 安徽宣城人, 教授, 博士研究生导师, 主要从事先进控制理论与应用, 工业过程监控与诊断等方向的研究。

Cao^[11]等人提出了一种鲁棒迭代学习卡尔曼滤波方法,用于状态和输出矩阵均具有范数有界不确定性的重复过程系统的状态估计,但只给出了一种先验类型估计。在文献 [12]中,提出了线性系统的迭代学习卡尔曼滤波器 (Iterative learning Kalman filter, ILKF),并在重复注塑机过程中进行了估计研究,验证了 ILKF 在间歇过程中优越的估计性能。

但是,文献 [12]中的 ILKF 方法是一种线性状态估计方法,而大多数间歇过程非线性严重。本文将基于标称模型的拟线性化方法引入到间歇过程状态估计中来,提出一种迭代学习拟线性卡尔曼滤波 (Iterative learning quasilinear Kalman filter, ILQKF) 方法。其中,标称模型是间歇过程含噪声模型的期望^[13],可以根据机理建模求得。考虑间歇过程正常运行下,每个时刻的状态在标称轨迹周边变化,而状态的变化呈现线性特征,因此 ILQKF 以实际状态与标称状态之间的误差为新状态,首先基于标称轨迹的拟线性化方法建立了与误差相关的线性化模型;然后,应用 ILKF 方法对误差模型进行状态估计,而状态轨迹等于误差轨迹与标称轨迹之和。ILQKF 在状态估计中充分利用了时间和批次双维的特性,并消除了重复误差。此外,相比 ILKF 方法,ILQKF 还具有更宽松的初值条件。ILKF 方法需要假设系统的初值满足正态分布且均值为零,这在间歇过程中是一个不合理的假设,比如发酵过程的初始状态可能是一个已知的非零量,如发酵过程中底物的初始浓度和发酵罐中的初值生物质浓度通常是一个给定的值,ILQKF 方法更具有实用性。本文通过啤酒发酵例子验证了 ILQKF 算法优越的性能。

1 迭代学习卡尔曼滤波

ILKF 方法结合了 KF 和 ILC 的思想,充分利用了间歇过程的多批次重复性。

对于线性间歇过程系统模型 (1):

$$\begin{cases} x_k(t+1) = Ax_k(t) + d(t) + \omega_k(t) \\ y_k(t) = Cx_k(t) + v_k(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中: k 是系统的批次数, $k \in [1, +\infty)$, t 是采样时间, $t \in [0, M]$, $x_k(t) \in R^n$ 是第 k 批、第 t 时刻的状态变量, $y_k(t) \in R^l$ 是第 k 批、第 t 时刻的输出变量, $l \leq n$, $d(t)$ 是系统每批的重复干扰,为了设计 ILKF,作以下假设^[12]:

假设 1: $\omega_k(t)$ 和 $v_k(t)$ 分别是独立的双维高斯过程噪声和测量噪声:

$$\begin{aligned} E[\omega_k(t)] &= E[v_k(t)] = 0 \\ E[\omega_i(j)v_k^T(t)] &= 0 \\ E[w_i(j)w_k^T(t)] &= Q\delta_{j,ti,k} \\ E[v_i(j)v_k^T(t)] &= R\delta_{j,ti,k} \end{aligned}$$

$\delta_{j,ti,k}$ 是双维克罗内克函数,仅当 $j = t, i = k$ 时, $\delta_{j,ti,k} = I$, 否则 $\delta_{j,ti,k} = 0$ 。

假设 2: $d(t)$ 为未知的有界重复干扰,随时间变化。

假设 3: 初始条件 $x_k(0)$ 服从的独立正态分布 $N(0, \zeta)$ 。

以上 3 个假设中,假设 1 与假设 2 相当于间歇生产过程

中的两种干扰,而假设 3 对初值的假设不符合绝大多数情况,本文第 2 节和第 3 节将给出合理解决假设 3 的方法。

定义 δ 为批次方向的后向差分算子:

$$\begin{aligned} \delta x_k(t) &= x_k(t) - x_{k-1}(t) \\ \delta y_k(t) &= y_k(t) - y_{k-1}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

同样可以定义 $\delta x_k(t), \delta y_k(t), \delta \omega_k(t), \delta v_k(t)$ 。

可以将系统改写为两个子系统,分别为时间方向上的子系统 Σ_T 和批次方向上的子系统 Σ_B :

$$\Sigma_T \begin{cases} \delta x_k(t+1) = A\delta x_k(t) + \delta \omega_k(t) \\ \delta y_k(t) = C\delta x_k(t) + \delta v_k(t) \end{cases} \quad (3)$$

$$\Sigma_B \begin{cases} x_k(t) = x_{k-1}(t) + \delta x_k(t) \\ y_k(t) = Cx_k(t) + v_k(t) \end{cases} \quad (4)$$

可以发现在 Σ_B 中, $x_k(t)$ 与 $x_{k-1}(t)$ 之间的转移矩阵是单位阵,即批次子模型 Σ_B 是个临界稳定系统,可能会导致 $x_k(t)$ 的值不断上升或震荡,可以在原 Σ_B 子系统加入系数 $\tau < 1$,使系统稳定^[12]:

$$\Sigma_B \begin{cases} x_k(t) = \tau[x_{k-1}(t) + \delta x_k(t)] + \bar{\omega}_k(t) \\ y_k(t) = Cx_k(t) + v_k(t) \end{cases}, \tau \in (0, 1) \quad (5)$$

其中: $\bar{\omega}_k(t)$ 为引入系数 τ 后带来的系统误差补偿项,将其近似为一个方差可计算的正态扰动。因此状态估计器的表达式为:

$$\begin{aligned} \Sigma_T: \hat{\delta x}_k(t) &= \hat{\delta x}_k(t-1) + \\ &L_1^{t,k}[\delta y_k(t) - CA\hat{\delta x}_k(t-1)] \\ \Sigma_B: \hat{x}_k(t) &= \tau[\hat{x}_{k-1}(t) + \hat{\delta x}_k(t)] + \\ &L_2^{t,k}\{y_k(t) - \tau C[\hat{x}_{k-1}(t) + \hat{\delta x}_k(t)]\} \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $\hat{\delta x}_k(t)$ 是 $\delta x_k(t)$ 的状态估计, $L_1^{t,k}$ 是 Σ_T 的卡尔曼增益,通过最小化 Σ_T 的估计误差协方差得到, $L_2^{t,k}$ 是在批次方向的卡尔曼增益,通过最小化 Σ_B 的估计误差协方差得到。

在间歇过程运行时,系统干扰分为重复干扰 $d(t)$,随机噪声 $\omega_k(t)$ 和 $v_k(t)$ 。通过把系统分解成时间方向和批次方向的子系统,并且设计子系统相应的估计器,抑制了随机噪声和重复干扰,并提高了间歇过程的估计精度。

图 1 是 ILKF 双向动态特性图,其中横轴 Time 代表时间方向,纵轴 Batch 代表批次方向,箭头表示传递方向,此外在每个采样时刻都有对应的测量值。横轴上 x 的转移只是随着时间转移,纵轴的 x 则通过批次方向的卡尔曼滤波进行更新,并且引入了矫正项 δx ,这个矫正项也可称为学习项,它在时间方向上通过卡尔曼滤波进行更新。

2 非线性系统的拟线性化

2.1 动机

针对文献 [12] 中的 ILKF 存在的非线性问题和不合理的初值假设等,本文将通过基于标称轨迹的拟线性化方法将 ILKF 推广到非线性间歇过程,并构造了一个误差系统,

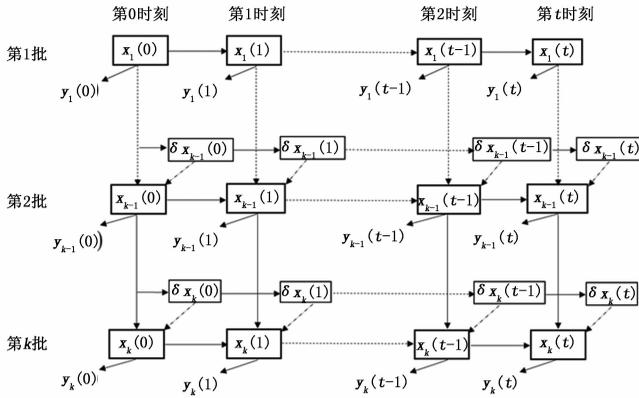


图 1 ILKF 双向动态特性图

通过对误差系统的状态估计来获得系统的状态估计, 可以放宽初始值的假设。

考虑非线性间歇过程系统模型 (7):

$$\begin{cases} x_k(t+1) = \varphi(x_k(t)) + d(t) + \omega_k(t) \\ z_k(t) = h(x_k(t)) + v_k(t) \end{cases} \quad (7)$$

第 1 节中针对干扰的合理假设 1 和假设 2 在本节仍然成立; 针对假设 3, 本节系统初值可以分布在任意均值的高斯分布中。

2.2 基于标称轨迹的拟线性化方法

基于标称轨迹的拟线性化方法对非线性模型 (7) 进行了线性化处理, 在本节中, 引入了一个误差状态系统, 误差系统的状态为原系统状态轨迹和标称轨迹的偏差, 通过估计误差系统的状态来得到非线性系统的状态估计。由于存在干扰和噪声, 每批次运行所产生的状态轨迹是不同的, 但均是在标称轨迹附近的波动^[13]。

假设 4: 实际轨迹接近于标称轨迹。

每一批的初始状态 $x_k(0)$ 服从相同的独立正态分布 $N(x_k^{nom}(0), \zeta)$, 其中 ζ 表示初始值误差的方差, $x_k^{nom}(t)$ 为标称状态:

$$x_k^{nom}(t) = \varphi_k(x_k^{nom}(t-1)), x_k^{nom}(0) = E(x_k(0)) \quad (8)$$

并且定义 Δ 为状态的真实轨迹和标称轨迹的误差算子:

$$\begin{aligned} \Delta x_k(t) &= x_k(t) - x_k^{nom}(t) \\ \Delta z_k(t) &= z_k(t) - h_k(x_k^{nom}(t)) \\ \Delta x_k(0) &= x_k(0) - x_k^{nom}(0) \sim N(0, \zeta) \end{aligned} \quad (9)$$

将 $\varphi_k(x_k(t-1))$ 在点 $x_k(t-1) = x_k^{nom}(t-1)$ 泰勒展开并忽略高阶项, 可以得到:

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \varphi(x_k(t-1)) + d(t-1) + \omega_k(t-1) = \\ & \left. \frac{\partial \varphi(x_k(t-1))}{\partial x_k} \right|_{x_k(t-1)=x_k^{nom}(t-1)} \Delta x_k(t-1) + \\ & x_k^{nom}(t) + d(t-1) + \omega_k(t-1) \end{aligned} \quad (10)$$

基于假设 4, 由 (9) 和 (10) 可得:

$$\Delta x_k(t) = \Phi(t-1)\Delta x_k(t-1) + d(t-1) + \omega_k(t-1)$$

其中一阶偏导近似系数为:

$$\Phi(t-1) = \left. \frac{\partial \varphi_k(x_k(t-1))}{\partial x_k} \right|_{x_k(t-1)=x_k^{nom}(t-1)} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi(x_k(1))}{\partial x_k(1)} & \frac{\partial \varphi(x_k(1))}{\partial x_k(2)} & \dots & \frac{\partial \varphi(x_k(1))}{\partial x_k(n)} \\ \frac{\partial \varphi(x_k(2))}{\partial x_k(1)} & \frac{\partial \varphi(x_k(2))}{\partial x_k(2)} & \dots & \frac{\partial \varphi(x_k(2))}{\partial x_k(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi(x_k(n))}{\partial x_k(1)} & \frac{\partial \varphi(x_k(n))}{\partial x_k(2)} & \dots & \frac{\partial \varphi(x_k(n))}{\partial x_k(n)} \end{bmatrix} \Bigg|_{x_k(t-1)=x_k^{nom}(t-1)} \quad (11)$$

同理可得:

$$\Delta z_k(t) = H_k(t)\Delta x_k(t) + v_k(t) \quad (12)$$

其中一阶偏导近似系数 $H_k(t)$ 为:

$$\begin{aligned} H(t) &= \left. \frac{\partial h(x_k(t))}{\partial x_k} \right|_{x_k(t)=x_k^{nom}(t)} = \\ & \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x_k(1))}{\partial x_k(1)} & \frac{\partial h(x_k(1))}{\partial x_k(2)} & \dots & \frac{\partial h(x_k(1))}{\partial x_k(n)} \\ \frac{\partial h(x_k(2))}{\partial x_k(1)} & \frac{\partial h(x_k(2))}{\partial x_k(2)} & \dots & \frac{\partial h(x_k(2))}{\partial x_k(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h(x_k(n))}{\partial x_k(1)} & \frac{\partial h(x_k(n))}{\partial x_k(2)} & \dots & \frac{\partial h(x_k(n))}{\partial x_k(n)} \end{bmatrix} \Bigg|_{x_k(t)=x_k^{nom}(t)} \end{aligned} \quad (13)$$

可以得到新的线性化系统:

$$\begin{cases} \Delta x_k(t) = \Phi(t-1)\Delta x_k(t-1) + d(t-1) + \omega_k(t-1) \\ \Delta z_k(t) = H(t)\Delta x_k(t) + v_k(t) \end{cases} \quad (14)$$

$\Phi(t-1)$ 和 $H(t)$ 分别如式 (11) 和式 (13) 所示。

2.3 时间和批次方向的子系统

由式 (2) 中 δ 的定义易知:

$$\begin{aligned} \delta \Delta x_k(t) &= \Delta x_k(t) - \Delta x_{k-1}(t) \\ \delta \Delta z_k(t) &= \Delta z_k(t) - \Delta z_{k-1}(t) \end{aligned}$$

工业生产中重复非线性过程一般每一批都是从相同的初始值开始, 根据机理或者经验模型, 每一批都具有相同的标称轨迹:

$$x_k^{nom}(t) = x_{k-1}^{nom}(t) \quad (15)$$

则根据式 (2) 和式 (9) 可得:

$$\begin{aligned} \delta x_k(t) &= x_k(t) - x_{k-1}(t) = \Delta x_k(t) - \Delta x_{k-1}(t) \\ \text{即 } \delta x_k(t) &= \delta \Delta x_k(t), \text{ 结合式 (14) 有递推式:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \Delta x_k(t) &= \Delta x_k(t) - \Delta x_{k-1}(t) = \\ & \Phi(t-1)\delta \Delta x_k(t) + \delta \omega_k(t-1) \end{aligned}$$

同理:

$$\begin{aligned} \delta \Delta z_k(t) &= \Delta z_k(t) - \Delta z_{k-1}(t) = \\ & H(t)\delta \Delta x_k(t) + \delta v_k(t) \end{aligned}$$

参考式 (3) ~ (4) 将式 (14) 改写成时间和批次两个子系统, 时间方向上的子系统 \sum_T :

$$\begin{cases} \delta \Delta x_k(t) = \Phi(t-1)\delta \Delta x_k(t) + \delta \omega_k(t-1) \\ \delta \Delta z_k(t) = H(t)\delta \Delta x_k(t) + \delta v_k(t) \end{cases} \quad (16)$$

批次方向上的子系统 \sum_B :

$$\begin{cases} \Delta x_k(t) = \Delta x_{k-1}(t) + \delta \Delta x_k(t) \\ \Delta z_k(t) = H(t)\Delta x_k(t) + v_k(t) \end{cases} \quad (17)$$

与式 (5) 处理方法相同, 在原 \sum_B 子系统中加入系数 $\tau < 1, \bar{\omega}_k(t)$ 是引入系数 τ 后带来的系统误差补偿项:

$$\begin{cases} \Delta x_k(t) = \tau[\Delta x_{k-1}(t) + \delta\Delta x_k(t)] + \bar{\omega}_k(t) \\ \Delta z_k(t) = H(t)\Delta x_k(t) + v_k(t) \end{cases} \quad (18)$$

其中: $\tau \in (0, 1)$ 且接近 1, 易知: 当 $\tau = 1$ 时, $\bar{\omega}_k(t) = 0, \Delta x_k(t) = \Delta x_{k-1}(t) + \delta\Delta x_k(t)$.

2.4 相关量的计算

本小节计算迭代学习卡尔曼滤波中需要用的量, 相关噪声协方差计算如下:

$$\begin{aligned} E[\delta\omega_k(t)\delta\omega_k^T(t)] &= \\ E[(\omega_k(t) - \omega_{k-1}(t))(\omega_k(t) - \omega_{k-1}(t))^T] &= \\ E[\omega_k(t)\omega_k^T(t)] + E[\omega_{k-1}(t)\omega_{k-1}^T(t)] &= 2Q \\ E[\delta\omega_k(t)\delta\omega_{k-1}^T(t)] &= \\ E[(\omega_k(t) - \omega_{k-1}(t))(\omega_{k-1}(t) - \omega_{k-2}(t))^T] &= \\ -E[\omega_{k-1}(t)\omega_{k-1}^T(t)] &= -Q \end{aligned}$$

所以有:

$$\begin{aligned} E[\delta\omega_k(j)\delta\omega_k^T(t)] &= 2Q\delta_{j,t}, E[\delta\omega_k(t)\delta\omega_{k+1}^T(t)] = -Q, \\ E[\delta v_k(j)\delta v_k^T(t)] &= 2R\delta_{j,t}, E[\delta v_k(t)\delta v_{k+1}^T(t)] = -R, \end{aligned}$$

定义:

$$\bar{P}_k(t) = E[\Delta x_k(t)\Delta x_k^T(t)], \bar{Q}_k(t) = E[\bar{\omega}_k(t)\bar{\omega}_k^T(t)].$$

由式 (14) 得:

$$\bar{P}_k(t) = E[\Delta x_k(t)\Delta x_k^T(t)] = d(t-1)(d(t-1))^T + \Phi(t-1)\bar{P}_k(t-1)(\Phi(t-1))^T + Q \quad (19)$$

且 $\bar{P}_k(0) = \zeta$, 由式 (17) 和 (18) 得:

$$\bar{Q}_k(t) = E[\bar{\omega}_k(t)\bar{\omega}_k^T(t)] = (1-\tau)^2\bar{P}_k(t) \quad (20)$$

注意到 $\bar{P}_k(t)$ 和 $\bar{Q}_k(t)$ 是随着时间进行更新的, 可记为 $\bar{P}(t)$ 和 $\bar{Q}(t)$ 。

3 迭代学习拟线性化卡尔曼滤波

本节针对非线性间歇过程的状态估计问题, 基于 ILKF 方法引入标称轨迹拟线性化方法, 提出了一种迭代学习拟线性化卡尔曼滤波 (ILQKF) 方法。ILQKF 与已有的传统状态估计方法相比有以下三点的改进。

首先, 与现有的非线性滤波方法比, 现有的非线性滤波方法只考虑了时间方向的状态转移, 而 ILQKF 参考 ILKF 的滤波框架可以利用之前所有批次的状态信息, 使得状态估计误差可以随时间和批次两个方向减小。

其次, 与 ILKF 方法比, ILKF 只针对线性系统, 很难运用到非线性间歇生产过程上, 而 ILQKF 引入拟线性化方法可以解决非线性问题, 更适合运用到实际生产过程。

最后, 与 ILKF 方法比, 有着更为宽松的初始条件, 在 ILKF 中, 由于中间量的计算需要, 文献 [12] 给出了假设 3, 即原系统的状态初值满足 0 均值的正态分布。事实上, 如果不满足假设 3, ILKF 的递推式将会变得极复杂, 并且不为 0 的初值可能会使得批次子系统中的误差协方差变大, 从而降低滤波器的性能。然而, ILQKF 不必满足假设 3, 其依据在于拟线性化时引入了标称模型作为中间变量。当系统初值满足任意高斯分布, 将高斯分布的均值作为标称

轨迹初值, 则新状态仍是 0 均值的正态分布, 即 ILQKF 可以用于初值期望不为 0 的非线性系统的状态估计。

3.1 ILQKF 估计结构

与 ILKF 类似, 基于 ILQKF 设计状态估计器分为两个阶段: 时间方向状态估计和批次方向状态估计。时间方向状态估计包括对时间子系统 Σ_T 的时间更新和测量更新; 批次方向状态估计包括对批次子系统 Σ_B 的批次更新和测量更新。ILQKF 的双向动态特性与图 1 不同点在于系统估计对象不是原系统状态 $x_k(t)$, 而是状态与标称轨迹的误差 $\Delta x_k(t)$ 。

将 $\Delta x_k(t)$ 与 $\delta\Delta x_k(t-1)$ 的状态估计分别记为 $\Delta\hat{x}_k(t)$ 与 $\delta\Delta\hat{x}_k(t-1)$, 可以得到式 (16) 与式 (18) 两个子系统的估计器基本结构分别如式 (21) 与式 (22) 所示。

时间子系统 Σ_T 的状态估计器如下:

$$\begin{aligned} \delta\Delta\hat{x}_k(t) &= \Phi(t-1)\delta\Delta\hat{x}_k(t-1) + \\ L_1^{t,k}[\delta\Delta z_k(t) - H(t)\Phi(t-1)\delta\Delta\hat{x}_k(t-1)] \end{aligned} \quad (21)$$

批次子系统 Σ_B 的状态估计器如下:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{x}_k(t) &= \tau[\Delta\hat{x}_{k-1}(t) + \delta\Delta\hat{x}_k(t)] + \\ L_2^{t,k}\{\Delta z_k(t) - \tau H(t)[\Delta\hat{x}_{k-1}(t) + \delta\Delta\hat{x}_k(t)]\} \end{aligned} \quad (22)$$

其中: $L_1^{t,k}$ 和 $L_2^{t,k}$ 是卡尔曼增益, 可分别通过最小化两个系统的估计误差协方差得到。

为了求解 $L_1^{t,k}$ 与 $L_2^{t,k}$, 将 $\delta\Delta x_k(t-1)$ 与 $\Delta x_k(t)$ 的估计误差分别记为 $\delta\Delta\hat{x}_k(t-1)$ 与 $\Delta\hat{x}_k(t)$:

$$\begin{aligned} \delta\Delta\hat{x}_k(t) &= \delta\Delta x_k(t) - \delta\Delta\hat{x}_k(t), \\ \Delta\hat{x}_k(t) &= \Delta x_k(t) - \Delta\hat{x}_k(t) \end{aligned}$$

基于式 (16) 与式 (21) 得到 Σ_T 的估计误差系统为:

$$\begin{aligned} \delta\Delta\hat{x}_k(t) &= (\Phi(t-1) - L_1^{t,k}H(t))\delta\Delta\hat{x}_k(t-1) + \\ (I - L_1^{t,k}H(t))\delta\omega_k(t-1) - L_1^{t,k}\delta v_k(t). \end{aligned} \quad (23)$$

基于式 (18) 与式 (22) 得到 Σ_B 的估计误差系统为:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{x}_k(t) &= (\tau I - \tau L_2^{t,k}H(t))\Delta\hat{x}_{k-1}(t) + \\ (\tau I - \tau L_2^{t,k}H(t))\delta\Delta\hat{x}_k(t) + \\ (I - L_2^{t,k}H(t))\bar{\omega}_k(t) - L_2^{t,k}v_k(t) \end{aligned} \quad (24)$$

定义下列误差协方差矩阵:

$$\begin{aligned} P_k(t) &= E[\delta\Delta\hat{x}_k(t)\delta\Delta\hat{x}_k^T(t)], \\ C_k(t) &= E[\Delta\hat{x}_k(t)\Delta\hat{x}_k^T(t)], \\ Cov_k(t) &= E[\delta\Delta\hat{x}_k(t)\Delta\hat{x}_{k-1}^T(t)] \end{aligned}$$

3.2 时间方向状态估计

通过最小化估计误差协方差 $P_k(t) = E[\delta\Delta\hat{x}_k(t)\delta\Delta\hat{x}_k^T(t)]$ 得到 $L_1^{t,k}$, 与标准的卡尔曼滤波类似, 其估计步骤如下:

1) 子系统 Σ_T 的时间更新:

$$\delta\Delta\hat{x}_k^{priori}(t) = \Phi(t-1)\delta\Delta\hat{x}_k(t-1) \quad (25)$$

$$P_k^{priori}(t) = \Phi(t-1)P_k(t-1)(\Phi(t-1))^T + 2Q \quad (26)$$

2) 子系统 Σ_T 的测量更新:

$$L_1^{t,k} = P_k^{priori}(t)(H(t))^T[H(t)P_k^{priori}(t)(H(t))^T + 2R]^{-1} \quad (27)$$

$$\delta\Delta\hat{x}_k(t) = \delta\Delta\hat{x}_k^{priori}(t) + L_1^{t,k}[\delta\Delta z_k(t) - H(t)\delta\Delta\hat{x}_k^{priori}(t)] \quad (28)$$

$$P_k(t) = (I - L_1^{t,k}H(t))P_k^{priori}(t) \quad (29)$$

其中: $\delta\Delta\hat{x}_k^{priori}(t)$ 是 $\delta\Delta x_k(t)$ 的先验估计。从式 (15)、式 (25)、式 (27) 和式 (29) 可以发现参数 $L_1^{t,k}$ 和 $P_k(t)$ 的计算与状态无关, 只与 $\Phi(t), H(t), Q, R$ 以及 $P_k(0)$ 有关。因此, 在给定相同的 $P_k(0)$ 时, 每批 $L_1^{t,k}$ 与 $P_k(t)$ 是一样的, 可以离线计算, 可以简写为 L_1^t 与 $P(t)$ 。

3.3 批次方向状态估计

基于时间方向的估计数据, 批次方向的状态估计流程如下: 首先计算批次方向的相关协方差 $Cov_k(t)$ 和 $C_k(t)$ 关于 $L_2^{t,k}$ 的解析表达式, 然后通过最小化估计误差协方差 $C_k(t)$ 来求解批次方向卡尔曼增益 $L_2^{t,k}$, 最后给出估计流程。

为了简略计, 在批次更新中省略时间符号用 $C_k, \Delta z_k, \Delta\hat{x}_k, \Delta\hat{x}_k, \delta\Delta\hat{x}_k, \nu_k, \bar{\omega}_k, \bar{Q}, P, Cov_k$ 来表示 $C_k(t), \Delta z_k(t), \Delta\hat{x}_k(t), \Delta\hat{x}_k(t), \delta\Delta\hat{x}_k(t), \nu_k(t), \bar{\omega}_k(t), \bar{Q}(t), P(t), Cov_k(t)$ 。

通过式 (18)、式 (22), 可得计算批次系统的估计误差协方差 C_k :

$$C_k = (\tau I - \tau L_2^{t,k}H(t))[P + C_{k-1}](\tau I - \tau L_2^{t,k}H(t))^T + L_2^{t,k}R(L_2^{t,k})^T + (\tau I - \tau L_2^{t,k}H(t))\{E[\delta\Delta\hat{x}_k\Delta\hat{x}_{k-1}^T] + E[\Delta\hat{x}_{k-1}\delta\Delta\hat{x}_k^T]\}(\tau I - \tau L_2^{t,k}H(t))^T - (\tau I - \tau L_2^{t,k}H(t))E[\delta\Delta\hat{x}_k\nu_k^T(L_2^{t,k})^T] - (\tau I - \tau L_2^{t,k}H(t))E[\Delta\hat{x}_{k-1}\nu_k^T(L_2^{t,k})^T] - (\tau I - \tau L_2^{t,k}H(t))E[\Delta\hat{x}_{k-1}\nu_k^T(L_2^{t,k})^T] - (\tau I - \tau L_2^{t,k}H(t))E[\Delta\hat{x}_{k-1}\nu_k^T(L_2^{t,k})^T]^T + (I - L_2^{t,k}H(t))\bar{Q}(I - L_2^{t,k}H(t))^T$$

性质 1^[12]: 如果 $\Delta x_k(0)$ 满足假设 3, 那么有 $E(\delta\Delta x_k\delta\Delta x_{k-1}^T) = -\frac{1}{2}P$ 。

根据式 (23), 式 (24) 和性质 1, 我们可以计算得到下面这些相关协方差:

$$E[\Delta\hat{x}_{k-1}\nu_k^T] = 0, \\ E[\delta\Delta\hat{x}_k\nu_k^T] = -L_1^tR, \\ Cov_k = E[\delta\Delta\hat{x}_k\Delta\hat{x}_{k-1}^T] = -\frac{1}{2}P(\tau I - \tau L_2^{t,k-1}H(t))^T - L_1^tR(L_2^{t,k-1})^T$$

通过求解 $\frac{\partial C_k(L_2^{t,k})}{\partial L_2^{t,k}} = 0$ 得到:

$$L_2^{t,k} = [(\tau^2(P + C_{k-1} + Cov_k + (Cov_k)^T) + \bar{Q}) \cdot (H(t))^T - \tau L_1^tR] \cdot [H(t)\tau^2(P + C_{k-1} + Cov_k + (Cov_k)^T + \bar{Q}) \cdot (H(t))^T + R - \tau H(t)L_1^tR - \tau H(t)(L_1^t)^T(H(t))^T]^{-1}$$

批次方向状态估计流程:

1) 子系统 \sum_B 的批次更新:

$$\Delta\hat{x}_k^{priori} = \tau[\Delta\hat{x}_{k-1} + \delta\Delta\hat{x}_k] \quad (30)$$

$$Cov_k = -\frac{1}{2}P(\tau I - \tau L_2^{t,k-1}H(t))^T - L_1^tR(L_2^{t,k-1})^T \quad (31)$$

$$C_k^{priori} = P + C_{k-1} + Cov_k + (Cov_k)^T \quad (32)$$

2) 子系统 \sum_B 的测量更新:

$$L_2^{t,k} = [(\tau^2C_k^{priori} + \bar{Q})(H(t))^T - \tau L_1^tR] \cdot [H(t)(\tau^2C_k^{priori} + \bar{Q})(H(t))^T + R - \tau H(t)L_1^tR - \tau H(t)(L_1^t)^T(H(t))^T + \sigma I]^{-1} \quad (33)$$

$$C_k = \tau^2C_k^{priori} + \bar{Q}_k -$$

$$L_2^{t,k}[\tau^2C_k^{priori} + \bar{Q})(H(t))^T - \tau L_1^tR]^T \quad (34)$$

$$\Delta\hat{x}_k = \Delta\hat{x}_k^{priori} + L_2^{t,k}[\Delta z_k - H(t)\Delta\hat{x}_k^{priori}] \quad (35)$$

其中, σ 是一个非常小的正数^[14]。由式 (35) 得到 $\Delta\hat{x}_k(t)$, 最后, 我们计算 $x_k(t)$ 的估计 $\hat{x}_k(t)$ 为:

$$\hat{x}_k(t) = \Delta\hat{x}_k(t) + x_k^{nom}(t) \quad (36)$$

下面给出 ILQKF 算法:

算法开始:

输入: $\varphi(x_k(t-1)), h(x_k(t)), Q, R, z_k(t), M, K$;

循环开始, $t = 1$;

通过式(8)更新 $x_k^{nom}(t)$, 通过式(11)更新 $\Phi(t-1)$, 通过式(13)

更新 $H(t)$;

通过式(19)更新 $\bar{P}(t)$, 通过式(20)更新 $\bar{Q}(t)$;

通过式(26)更新 $P^{priori}(t)$, 通过式(27)更新 L_1^t , 通过式(29)更新 $P(t)$;

存储 $L_1^t, P(t), \bar{Q}(t), x_k^{nom}(t)$ 。

当 $t = M$, 循环结束, 否则 $t = t + 1$ 。

滤波开始, $k = 1$;

循环开始, $t = 1$;

通过式(25)更新 $\delta\Delta\hat{x}_k^{priori}(t)$, 通过式(28)更新 $\delta\Delta\hat{x}_k(t)$;

通过式(31)更新 $Cov_k(t)$, 通过式(30)更新 $\Delta\hat{x}_k^{priori}(t)$;

通过式(32)更新 $C_k^{priori}(t)$, 通过式(33)更新 $L_2^{t,k}$;

通过式(34)更新 $C_k(t)$, 通过式(35)更新 $\Delta\hat{x}_k(t)$;

通过式(36)更新 $\hat{x}_k(t)$;

输出: $\hat{x}_k(t)$;

当 $t = M$, 循环结束, 否则 $t = t + 1$;

当 $k = K$, 滤波结束, 否则 $k = k + 1$;

算法结束。

4 啤酒发酵过程仿真

啤酒发酵过程是一种输入为生物质(酵母), 基质(糖)和水, 输出为酒精, 二氧化碳和水的间歇反应过程。发酵过程中, 糖类和酵母的浓度都必须控制在合理的范围之内^[15], 因此十分有必要对啤酒发酵过程中的糖浓度和酵母浓度进行状态估计。

将所提出的 ILQKF 方法应用到啤酒发酵过程的步骤如下:

步骤 1: 根据已有数据或者机理确定啤酒发酵的非线性标称模型。

步骤 2: 初始批生产开始时, 用 EKF 算法对糖浓度与酵母浓度进行估计。

步骤 3: 从第二批生产开始, 以上一批的估计数据和标称模型为基础, 用 ILQKF 算法进行估计, 直到生产结束。

啤酒发酵过程中的糖浓度和酵母浓度的状态空间模型^[16]如下所示:

$$S_k(t) = \frac{-\mu_s t_c S_k(t-1) X_k(t-1)}{K_S + S_k(t-1)} + S_k(t-1) + d(t-1) + \omega_{S_k}(t-1)$$

$$X_k(t) = \frac{\mu_X t_c S_k(t-1) X_k(t-1)}{K_X + S_k(t-1)} - b t_c X_k(t-1) + X_k(t-1) + d(t-1) + \omega_{X_k}(t-1)$$

$$z_{S_k}(t) = S_k(t) + v_{S_k}(t)$$

$$z_{X_k}(t) = X_k(t) + v_{X_k}(t)$$

其中： $S_k(t)$ 、 $X_k(t)$ 、 $z_{S_k}(t)$ 、 $z_{X_k}(t)$ 、 $\omega_k(t)$ 、 $v_k(t)$ 分别代表第 k 批次、第 t 时刻糖浓度，酵母菌丝的浓度，糖浓度的测量值，酵母菌浓度的测量值，过程噪声，测量噪声， $\omega_k(t)$ 和 $v_k(t)$ 相互独立。 $d(t)$ 表示每批只随时间变化的重复性干扰， t_c 表示采样间隔。模型参数如表 1 所示。

表 1 模型参数表

Parameter	Value
μ_s	0.78
μ_X	0.058
K_S	0.025 2
K_X	0.746 4
b	0.025 1

设定步长为 $[0, 3000]$ ，初始值 $x(0) = x^{(0)}(0) = [S(0), X(0)] = [30; 3]$ ，白噪声协方差矩阵 $Q = [0.00001, 0; 0, 0.00001]$ ， $R = [0.25, 0; 0, 0.0025]$ ，设置 $\tau = 0.96, \sigma = 10^{-12}$ 。

仿真时，初始批，即 $k = 0$ 批时，直接采用 EKF 进行状态估计；从 $k = 1$ 批开始，将第 0 批由 EKF 得到的状态估计值与标称状态之差作为 ILQKF 第 1 批的初始估计值，再采用 ILQKF 算法得到之后每一批的状态估计值。

图 2 显示了啤酒发酵中基质（糖）和生物质（酵母）的状态估计结果图，实线代表实际值，虚线代表估计值。计算第 20 批基质浓度和生物质浓度平均估计误差分别为 0.082 203 与 0.017 091；计算第 100 批基质浓度和生物质浓度平均估计误差分别为 0.014 453 与 0.01 033。可以发现估计精度随批次增加而增加。这是由于 ILQKF 建立了批次间的传递关系，可以过滤批次间的重复干扰，随着批次的增加，滤波使用的信息越来越多，估计效果也越来越好。

图 3 比较了 EKF 和 ILQKF 的状态估计误差。由于 EKF 估计对于每一批次都是独立的，估计精度只依赖于初始值与动态噪声的大小，随着批次的增加，EKF 的估计误差没有很大变化。而 ILQKF 可以利用上一批次的估计信息更新初始值减小初始误差，还同时考虑了重复干扰与动态噪声，随着批次的增加，ILQKF 状态估计误差逐渐收敛。图 3 结果也表明 ILQKF 估计误差随批次递减，而 EKF 估计误差随批次变化不大，所以 ILQKF 在多批次运行时的状态估计效果明显优于 EKF。

5 结束语

本文基于迭代学习和标称轨迹线性化的思想，设计了一种用于间歇过程的迭代学习拟线性化卡尔曼滤波器。该

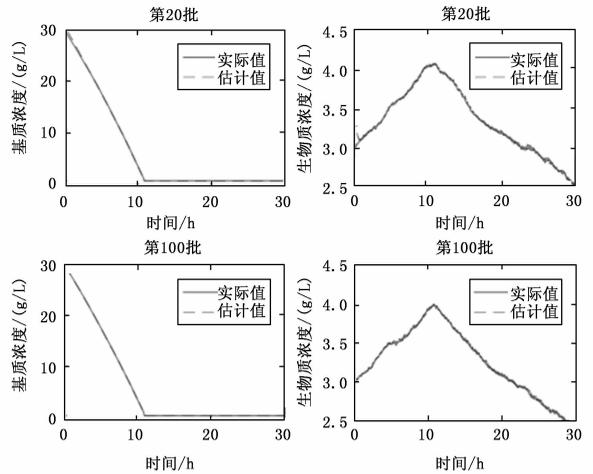


图 2 啤酒发酵状态估计结果

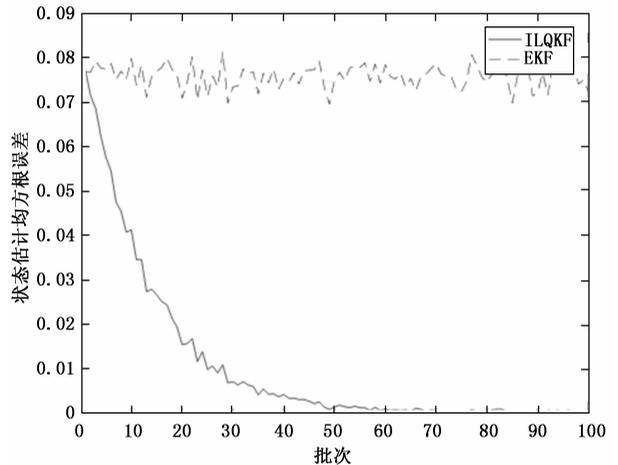


图 3 ILQKF 和 EKF 的状态估计误差对比

ILQKF 方法将文献 [12] 的 ILKF 方法扩展到非线性过程中，利用了间歇过程多个批次的信息，设计了时间方向和批次方向相应的卡尔曼滤波器，得到当前批次当前时刻的状态估计值。啤酒发酵过程的仿真结果表明，状态估计误差随批次的增加而减小直至收敛，相对于传统的估计方法有一定的优势。

参考文献：

[1] Komives C, Parker R S. Bioreactor state estimation and control [J]. Current Opinion in Biotechnology, 2003, 14 (5): 468 - 474.
 [2] Wang J, Zhao L, Tao Y U. On-line estimation in fed-batch fermentation process using state Space model and unscented Kalman filter [J]. Chinese Journal of Chemical Engineering, 2010, 18 (2): 258 - 264.
 [3] Wang J, Feng X, Zhao L, et al. Unscented transformation based robust Kalman filter and its applications in fermentation process [J]. Chinese Journal of Chemical Engineering, 2010, 18 (3): 412 - 418.