

# 对脉冲耦合神经网络中被动神经元的脉冲周期分析

郝敬帅<sup>1,2</sup>, 高媛<sup>1,2</sup>, 程橙<sup>3</sup>, 秦品乐<sup>1,2</sup>, 王丽芳<sup>1,2</sup>

(1. 中北大学 大数据学院, 太原 030051; 2. 山西省生物医学成像与影像大数据重点实验室 (中北大学), 太原 030051; 3. 北京航天测控技术有限公司, 北京 100040)

**摘要:** 研究了离散 PCNN 中被动神经元的被动脉冲周期, 首先定义了动态比较比, 而不是逻辑比较来描述神经内状态与动态阈值之间的线性差异; 然后利用动态比较比的最大下限, 给出了一个近似准确的被动脉冲周期公式, 并通过估计和实际被动脉冲周期的误差分析, 证明了该公式的合理性; 此外, 我们从估计的脉冲周期中推导出一个稳定的脉冲周期, 从而使神经元可以连续地在两个不同的时间阶段进行非周期性和周期性的脉冲; 此外, 还估算了被动神经元开始周期性脉冲的初始阶段, 并举例说明, 结果与理论分析一致。

**关键词:** 脉冲耦合神经网络; 被动神经元; 脉冲周期; 动态比较比

## Pulse Cycle Analysis of Passive Neurons in the Pulse Coupled Neural Network

Hao Jingshuai<sup>1,2</sup>, Gao Yuan<sup>1,2</sup>, Cheng Cheng<sup>3</sup>, Qin Pinle<sup>1,2</sup>, Wang Lifang<sup>1,2</sup>

(1. Data Science & Technology College, North University of China, Taiyuan 030051, China;

2. Shanxi Key Laboratory of Biomedical Imaging and Big Data Imaging,

North University of China, Taiyuan 030051, China;

3. Beijing Aerospace Measurement and Control Technology Co., Ltd., Beijing 100040, China)

**Abstract:** In order to solve the passive pulse period of passive neurons in discrete PCNN. First, the dynamic comparison ratio is defined to describe the linear difference between the inner state of the nerve and the dynamic threshold is defined. Then, using the maximum and minimum of the dynamic comparison ratio, an approximate and accurate formula for the passive pulse period is given. In addition, we derive a stable pulse period from the estimated pulse period, so that the neuron can continuously carry out non-periodic and periodic pulses in two different time stages. In addition, the initial phase of the periodic pulse of the passive neuron is estimated.

**Keywords:** pulse coupled neural network; passive neuron; pulse cycle; dynamic comparison ratio

## 0 引言

对猫<sup>[1-2]</sup>和豚鼠<sup>[3]</sup>等小型哺乳动物视觉皮质的研究结果表明, 皮质神经元在类似刺激下可以同步脉冲。埃克霍恩等人提出了一种链接域模型来模拟这种机制, 并将其应用于图像处理<sup>[4]</sup>。由于连续时间具有相当大的非线性, 约翰逊修等人<sup>[5-6]</sup>改了埃克霍恩的神经元模型, 提出了一种用于图像处理的脉冲耦合神经网络(PCNN)。与多层神经网络(如循环神经网络<sup>[7]</sup>)不同, PCNN是一种单层网络, 类似于Hopfield神经网络<sup>[8]</sup>和Cohen-Grossberg神经网络<sup>[9-10]</sup>。此外, PCNN中的一个神经元与邻近的神经元(如细胞神经网络<sup>[11]</sup>)局部相连。据认PCNN可以在迭代过程中将图

像中的每个像素编码成一系列脉冲, 并基于强度相似性和空间接近性, 利用归一化方法对像素进行分组。因此, PCNN对猫和豚鼠等小型哺乳动物视觉皮质的研究结果表明, 皮质神经元在类似刺激下可以同步脉冲。埃克霍恩等。提出了一种链接域模型来模拟这种机制, 并将其应用于图像处理。由于连续时间具有相当大的非线性, 约翰逊修改了埃克霍恩的神经元模型, 提出了一种用于图像处理的脉冲耦合神经网络(PCNN)。与多层神经网络(如循环神经网络)不同, PCNN是一种单层网络, 类似于Hopfield神经网络和Cohen-Grossberg神经网络。此外, PCNN中的一个神经元与邻近的神经元(如细胞神经网络)局部相连。认为PCNN可以在迭代过程中将图像中的每个像素编码成一系列脉冲, 并基于强度相似性和空间接近性, 利用归一化方法对像素进行分组。因此, PCNN适用于图像分割<sup>[12-16]</sup>、图像融合<sup>[17-20]</sup>特征提取<sup>[21-42]</sup>等图像处理。

特别是, 它是一个非线性系统<sup>[25]</sup>, 不仅适用于神经网络, 而且适用于每个神经元。然而, 作为输出反馈<sup>[26]</sup>, 图像处理中神经元之间的脉冲耦合是通过使用几乎固定的局

收稿日期: 2019-03-28; 修回日期: 2019-04-19。

基金项目: 山西省自然科学基金资助项目(2015011045)。

作者简介: 郝敬帅(1994-), 男, 河北邢台人, 硕士生, 主要从事医疗影像云方向的研究。

高媛(1972-), 女, 山西太原人, 硕士, 副教授, 主要从事机器视觉、大数据处理、三维重建方向的研究。

部突触来实现的, 并且不考虑随机系统<sup>[7-11, 27-30]</sup>中存在的随机时滞。选择合适的 PCNN 神经元参数是获得更好的图像处理性能的关键, 它直接依赖于对 PCNN 神经元正确的理解和对其工作方式的有效分析。文献 [31] 在假定神经内部状态是固定的前提下对脉冲周期进行了分析, 得到了一个稳定的周期。通过严格的数学分析, 文献 [32-33] 证明了 PCNN 神经元与真实生物细胞的一致性。Bressloff 和 Coombes<sup>[34]</sup>对强耦合神经元的动态行为进行了研究, 发现随着耦合强度的增加, 神经元的稳定阶段将不稳定。Burkitt 等人<sup>[35]</sup>研究了神经元群同步行为和平均刺激之间的联系, 注意到在这些工作中对 PCNN 的分析是持续进行的并且基于一些假设。此外, 在离散时间内, Yu 等人<sup>[36]</sup>研究神经元如何改变固定脉冲周期条件的阈值, 推导了被动神经元脉冲的时间相位和周期<sup>[37]</sup>, 得到了不完全的解析公式。分析了简化后的神经网络的神经脉冲周期和捕获特性<sup>[38]</sup>。假设反馈衰减系数和动态阈值相同, 则推导出脉冲周期<sup>[39]</sup>。然而, 这些分析并没有考虑 PCNN 内部状态和阈值之间的逻辑比较所产生的整数转换的量化效应。因此, 这些分析结果总是不准确的。

本文对无源 PCNN 神经元在离散时间内的脉冲周期进行了分析, 得到了无源脉冲周期的解析估计。其主要贡献是: 1) 通过定义比较比率而不是 PCNN 中的逻辑比较, 给出了一个近似准确的被动 PCNN 神经元的估计被动周期; 2) 分析并证明了估计被动周期和实际被动周期之间的误差; 3) 推导了神经元开始脉冲的初始阶段, 并给出了一个稳定的初始阶段。脉冲周期; 4) 给出了一些实验实例来验证对 PCNN 的分析。

本文的其余部分组织如下。在第二节中, 我们回顾了 PCNN 以及如何改变被动 PCNN 神经元的内部状态。然后在第三节中对被动脉冲周期进行了详细的分析。在第 4 节中执行了一些验证我们的分析的示例。最后, 结论显示在第 5 节。

## 2 脉冲耦合神经网络

PCNN 中的神经元由两个通道组成。与此不同的是, F 通道不仅接收来自邻近区域的耦合脉冲 Y, 还接收外部刺激 S, 而 L 通道只接收耦合脉冲。此外, 在微分方程<sup>[30, 40]</sup>的描述中, 两个通道的输出在每次迭代时都呈指数衰减。

$$F(n) = V^F Y(n-1) \otimes W + F(n-1)e^{-\alpha^F} + S \quad (1)$$

$$L(n) = V^L Y(n-1) \otimes M + L(n-1)e^{-\alpha^L} \quad (2)$$

其中:  $n$  是神经元的当前迭代;  $V^F$  和  $\alpha^F$  分别是  $F$  通道的大小和衰减系数, 类似  $V^L$  和  $\alpha^L$  于  $L$ ;  $W$  和  $M$  分别表示  $F$  和  $L$  相邻的局部突触。然后使用两个通道输出进行调制以产生内部状态, 然后:

$$U(n) = F(n)[1 + \beta L(n)] \quad (3)$$

其中:  $\beta$  表示连接强度。

当满足内部状态和动态阈值的逻辑比较时, PCNN 中

的脉冲发生器将输出一个脉冲。

$$Y(n) = \begin{cases} 1, & U(n) > \theta(n) \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $\theta(n)$  是动态阈值, 如下所示:

$$\theta(n) = e^{-\alpha^\theta} (n-1) + V^\theta Y(n-1) \quad (5)$$

具有系数  $\alpha^\theta$  的动态阈值在迭代中也呈指数衰减。然而, 一旦神经元脉冲, 因为有一个大幅度的  $V^\theta$ , 阈值将急剧增加。

PCNN 中的神经元在相邻脉冲和外界刺激的耦合作用下, 将持续地脉冲, 但由于外界刺激的存在, 只接受外界刺激的神经元也能持续地脉冲。为了区分这两种情况, 我们分别将前、后两种情况下的神经元称为主动神经元和被动神经元, 分别描述相邻两种情况下耦合脉冲的存在和缺失。值得注意的是, 上述 PCNN 不考虑随机时滞或随机噪声等随机因素, 如以下某些随机系统<sup>[7-11, 25-30, 40]</sup>。

假设 1: PCNN 神经元中  $L$  的初始状态为零, 即  $L(0) = 0$ 。

$$U(n) = F(n) \quad (6)$$

其  $L$  通道输出为:

$$F(n) = F(n-1)e^{-\alpha^F} + S \quad (7)$$

从式 (7) 开始, 我们可以将式 (6) 改写为:

$$U(n) = U(n-1)e^{-\alpha^F} + S \quad (8)$$

结论 1: 被动神经元只呈现一个接受外源性刺激的通道, 可以用式 (4)、(5) 和 (8) 来描述。

假设 2: 被动神经元内部状态的初始状态为零, 即  $U(0) = 0$ 。

论点 1: 假设 2 下, 被动神经元的内部状态满足:

$$U(n) = \frac{S(1 - e^{-n\alpha^F})}{1 - e^{-\alpha^F}}$$

证明: 从假设 2 和式 (8), 我们得到:

$$U(1) = S$$

$$U(2) = F(1)e^{-\alpha^F} + S = S(1 + e^{-\alpha^F})$$

类似的,  $n=3, 4, 5, \dots$

$$U(n) = S(1 + e^{-\alpha^F} + e^{-2\alpha^F} + \dots + e^{-(n-1)\alpha^F}) = \frac{S(1 - e^{-n\alpha^F})}{1 - e^{-\alpha^F}}$$

这就完成了证明。

## 3 被动脉冲周期分析

被动脉冲周期是反映 PCNN 中被动神经元的脉冲频率如何随外界刺激的不同和神经参数的不同而变化的, 也可以揭示神经元如何工作。为了方便、准确地分析下一节中被动神经元的脉冲周期, 在定义 1 给出了被动脉冲周期。

定义 1. 将  $n_m$  和  $n_{m+1}$  表示为时间阶段, 此时被动神经元分别在迭代期间  $m$  和  $m+1$  时间点进行脉冲。所以在  $n_{m+1}$  处的被动脉冲周期可表示为:

$$T(n_{m+1}) = n_{m+1} - n_m \quad (9)$$

### 3.1 实际被动脉冲周期

假设一个 PCNN 神经元分别在  $n_m$  和  $n_{m+1}$  处脉冲。从

(5) 开始, 我们有:

$$\theta(n_{m+1}) = \theta(n_m + 1)e^{-(n_{m+1}-n_m-1)\alpha^\delta} = [\theta(n_m)e^{-\alpha^\delta} + V^\theta]e^{-(n_{m+1}-n_m-1)\alpha^\delta}$$

从式 (4) 考虑到  $U(n_{m+1}) \approx \theta(n_{m+1})$ , 我们得到:

$$T(n_{m+1}) = n_{m+1} - n_m = \left[ \frac{1}{\alpha^\delta} \ln \frac{\theta(n_m)e^{-\alpha^\delta} + V^\theta}{U(n_{m+1})} \right] + 1 \quad (10)$$

另一方面, 利用式 (4) 中  $U(n)$  和  $\theta(n)$  之间的逻辑比较来确定神经元是否脉冲, 导致难以进一步分析式 (9)。因此, 我们现在定义:

$$\theta(n_m) = \delta U(n_m) \quad (11)$$

其中,  $\delta \in (0, 1)$  称为动态比较比, 用来描述迭代中  $U(n)$  和  $\theta(n)$  之间的线性差异。然后式 (6) 可以改写为使用式 (9):

$$T(n_{m+1}) = \left[ \frac{1}{\alpha^\delta} \ln \frac{\delta U(n_m)e^{-\alpha^\delta} + V^\theta}{U(n_{m+1})} \right] + 1 \quad (12)$$

### 3.2 估计被动脉冲周期

虽然式 (11) 中的动态比较比  $\delta$  在  $0 \sim 1$  之间, 但我们可以假设 1 和论点 2 下得到更精确的动态范围。

论点 2: 比较比  $\delta$  满足:

$$\frac{e^{-\alpha^\delta} - e^{-n_m \alpha^\delta}}{e^{\alpha^\delta - \alpha^\delta} (1 - e^{-n_m \alpha^\delta})} \delta < 1$$

证明: 从式 (4) 和式 (5) 中可以得出, 神经元的内部状态与动态阈值之间的关系满足以下约束条件:

$$U(n_m) > \theta(n_m) \quad (13a)$$

$$U(n_m - 1) < \theta(n_m - 1) \quad (13b)$$

从式 (13a) 和式 (11) 我们很容易得出:

$$\delta < 1 \quad (14)$$

因为:

$$U(n_m) = U(n_m - 1)e^{-\alpha^\delta} + S$$

根据式 (8), 和从 (5) 改写的:

$$\theta(n_m) = \theta(n_m - 1)e^{-\alpha^\delta}, \text{ 我们把 (13-b) 重写为 } U(n_m) - S < \theta(n_m)e^{\alpha^\delta - \alpha^\delta}$$

鉴于式 (11), 我们有:

$$\delta > \frac{U(n_m) - S}{U(n_m)e^{\alpha^\delta - \alpha^\delta}} \quad (15)$$

使用论点 1 简化式 (15), 然后得到:

$$\delta > \frac{e^{-\alpha^\delta} - e^{-n_m \alpha^\delta}}{e^{\alpha^\delta - \alpha^\delta} (1 - e^{-n_m \alpha^\delta})} \quad (16)$$

因此, 式 (14) 和 (16) 完成证明。

推论 1. 在论点 2 和一些  $w, r, t, n_m$  约束下, 我们可以进一步接近更精确的  $\delta$  动态范围:

1)  $0 < \delta < 1$ , 为  $n_m \geq 1$ ;

2)  $\frac{e^{-\alpha^\delta}}{1 + e^{-\alpha^\delta}} < \delta < 1$ , 为  $n_m \geq 2$ ;

3)  $e^{-\alpha^\delta} < \delta < 1$ , 为  $n_m \rightarrow +\infty$

结论 2: 从推论 1 可以看出, 随着  $n_m$  的增加,  $\delta$  的下限从 0 增加到  $e^{-\alpha^\delta}$ 。

如果存在  $n_s \ll +\infty$  时, 被动神经元开始周期性地脉冲,

由于相同的脉冲周期和结论 2, 在  $n_s$  和随后的脉冲迭代时的动态比较比  $\delta'$  将接近于在  $+\infty$  时的动态比较比。因此, 我们可以反过来选择  $\delta = e^{-\alpha^\delta}$  在  $n_m \rightarrow +\infty$  处的下限作为其他脉冲周期稳定的脉冲迭代的估计动态比较比。此外, 由于  $n_s$  更接近  $n_t$ ,  $n_t < n_s$ , 我们也可以使用  $\delta = e^{-\alpha^\delta}$  作为  $n_t$  处的估计动态比较比。因此, 从式 (12) 开始, 被动神经元的估计被动脉冲周期可以表示为:

$$T_E(n_{m+1}) = \left[ \frac{1}{\alpha^\delta} \ln \frac{U(n_m)e^{-2\alpha^\delta} + V^\theta}{U(n_{m+1})} \right] + 1 \quad (17)$$

然后利用定理 1 进一步计算估计的无源脉冲周期。

定理 1: 被动神经元的估计被动脉冲周期满足:

$$T_E(n_{m+1}) = \left[ \frac{1}{\alpha^\delta} \ln \left( \gamma e^{-2\alpha^\delta} + \frac{\lambda V^\theta}{S} \right) \right] + 1$$

其中:

$$\gamma = \frac{1 - e^{-n_m \alpha^\delta}}{1 - e^{-n_{m+1} \alpha^\delta}}, \lambda = \frac{1 - e^{-\alpha^\delta}}{1 - e^{-n_{m+1} \alpha^\delta}}$$

证明: 从论点 1, 我们有:

$$U(n_m) = \frac{S(1 - e^{-n_m \alpha^\delta})}{1 - e^{-\alpha^\delta}} \quad (18)$$

$$U(n_{m+1}) = \frac{S(1 - e^{-n_{m+1} \alpha^\delta})}{1 - e^{-\alpha^\delta}} \quad (19)$$

通过使用式 (18) 和 (19) 简化式 (17), 我们很容易得到:

$$T_E(n_{m+1}) = \left[ \frac{1}{\alpha^\delta} \ln \left( \gamma e^{-2\alpha^\delta} + \frac{\lambda V^\theta}{S} \right) \right] + 1$$

其中:

$$\gamma = \frac{1 - e^{-n_m \alpha^\delta}}{1 - e^{-n_{m+1} \alpha^\delta}}, \lambda = \frac{1 - e^{-\alpha^\delta}}{1 - e^{-n_{m+1} \alpha^\delta}}$$

推论 2: 在定理 1 的假设下, 估计的被动脉冲周期将接近一个稳定周期:

$$T_E = \left[ \frac{1}{\alpha^\delta} \ln \left[ e^{-2\alpha^\delta} + \frac{V^\theta(1 - e^{-\alpha^\delta})}{S} \right] \right] + 1$$

$n_m \rightarrow \infty$  时

从推论 2 可以看出, 随着  $n_m$  的增加, 被动神经元的被动脉冲周期估计值趋于稳定。在实践中, 估计的被动脉冲周期将稳定在  $n_m \ll +\infty$ , 这将在第 3.4 中得到证明。

### 3.3 估计脉冲周期和实际脉冲周期之间的误差

定理 2: 估计脉冲周期和实际脉冲周期之间的误差满足:

$$T_E(n_{m+1}) - T(n_{m+1}) = \epsilon \in \{s \mid s = -1, 0\} \quad (20)$$

$$\delta \geq e^{-\alpha^\delta} \text{ 时}$$

证明: 定义一个以  $\delta$  作为自变量的函数:

$$f(\delta) = \frac{1}{\alpha^\delta} \ln \frac{\delta U(n_m)e^{-\alpha^\delta} + V^\theta}{U(n_{m+1})} \quad (21)$$

由于  $f(\delta)$  是单调递增的, 证明  $w, r, t$ . (20) 可转换为证明以下不等式:

$$\epsilon_1 = f(1) - f(e^{-\alpha^\delta}) < 1 \quad (22)$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\alpha^\delta} \ln \left[ \frac{U(n_m)e^{-\alpha^\delta} + V^\theta}{U(n_{m+1})} \right] - \frac{1}{\alpha^\delta} \ln \left[ \frac{e^{-2\alpha^\delta} U(n_m) + V^\theta}{U(n_{m+1})} \right] =$$

$$\frac{1}{\alpha^\theta} \ln \left[ \frac{U(n_m)e^{-\alpha^\theta} + V^\theta}{U(n_m)e^{-2\alpha^\theta} + V^\theta} \right] = \frac{1}{\alpha^\theta} \ln \left[ \frac{U(n_m)e^{-\alpha^\theta} + V^\theta}{U(n_m)e^{-\alpha^\theta} + V^\theta} \right] <$$

$$\frac{1}{\alpha^\theta} \ln \left[ \frac{e^{\alpha^\theta} U(n_m)e^{-\alpha^\theta} + V^\theta}{U(n_m)e^{-\alpha^\theta} + V^\theta} \right] = 1$$

因此得到:

$$f(1) - [f(e^{-\alpha^\theta})] = \{s \mid s = 0, 1\} \quad (23)$$

基于式 (12) 和定理 1, 在满足  $\delta \geq e^{-\alpha^\theta}$  时我们有:

$$\epsilon = T_E(n_{m+1}) - T(n_{m+1}) = [f(e^{-\alpha^\theta})] - [f(\delta)] \Leftrightarrow [f(e^{-\alpha^\theta})] - [f(1)] \leq \epsilon \leq 0$$

从式 (23), 我们得到:

$$\epsilon \in \{s \mid s = -1, 0\}, \delta \geq e^{-\alpha^\theta}$$

### 3.4 具有稳定脉冲周期的初始相位

定理 3. 假设 2, PCNN 中的神经元在以下式子或之后会以稳定周期  $T_E$  脉冲:

$$N_s \in \{n \mid n = N_1, N_1 + 1, \dots, N_1 + T_E - 1\}$$

对于  $N_1 \in \mathbf{R}^+, N_2 \notin \mathbf{R}^+$  (24a)

$$N_s \in \{n \mid n = N_2 + 1, N_2 + 2, \dots, N_2 + T_E\}$$

对于  $N_1 \notin \mathbf{R}^+, N_2 \in \mathbf{R}^+$  (24b)

其中:

$$N_1 = \left\lceil \frac{1}{\alpha^F} \ln \frac{S(e^{(T_E-1)\alpha^\theta} - e^{T_E\alpha^\theta-2\alpha^\theta})}{\mu} \right\rceil$$

$$\mu = S(e^{(T_E-1)\alpha^\theta} - e^{-2\alpha^\theta}) - V^\theta(1 - e^{-\alpha^\theta})$$

$$N_2 = \left\lceil \frac{Se^{-2\alpha^\theta}(e^{T_E\alpha^\theta} - e^{T_E\alpha^\theta})}{\eta} \right\rceil$$

$$\eta = Se^{-2\alpha^\theta}(e^{T_E\alpha^\theta} - 1) - V^\theta(1 - e^{-\alpha^\theta})$$

证明: 根据定理 2 和推论 1, 一个具有稳定被动周期  $T_E$  的神经元脉冲, 其必要和充分条件是:

$$T_E(n_{m+1}) - T_E = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{1}{\alpha^\theta} \ln \left( \gamma e^{-2\alpha^\theta} + \frac{\lambda V^\theta}{S} \right) \right] = T_E - 1$$

$$\Leftrightarrow T_E - 1 \geq \frac{1}{\alpha^\theta} \ln \left( \gamma e^{-2\alpha^\theta} + \frac{\lambda V^\theta}{S} \right) \quad (25a)$$

$$T_E - 2 < \frac{1}{\alpha^\theta} \ln \left( \gamma e^{-2\alpha^\theta} + \frac{\lambda V^\theta}{S} \right) \quad (25b)$$

对于 (25a), 我们有:

$$(T_E - 1)\alpha^\theta \geq \ln \left( \gamma e^{-2\alpha^\theta} + \frac{\lambda V^\theta}{S} \right) \Leftrightarrow Se^{(T_E-1)\alpha^\theta} \geq \gamma Se^{-2\alpha^\theta} + \lambda V^\theta \quad (26)$$

其中:

$$\gamma = \frac{1 - e^{-n_m\alpha^\theta}}{1 - e^{-n_{m+1}\alpha^\theta}}$$

$$\lambda = \frac{1 - e^{-\alpha^\theta}}{1 - e^{-n_{m+1}\alpha^\theta}}$$

考虑到  $n_m = n_{m+1} - T_E$ , 式 (26) 的右边可以表示为:

$$\frac{Se^{-2\alpha^\theta}(1 - e^{-(n_{m+1}-T_E)\alpha^\theta}) + V^\theta(1 - e^{-\alpha^\theta})}{1 - e^{-n_{m+1}\alpha^\theta}}$$

然后 (26) 可以写为:

$$V^\theta(1 - e^{-\alpha^\theta}) \leq Se^{(T_E-1)\alpha^\theta}(1 - e^{-n_{m+1}\alpha^\theta}) - Se^{-2\alpha^\theta}(1 - e^{-(n_{m+1}-T_E)\alpha^\theta}) \Leftrightarrow$$

$$V^\theta(1 - e^{-\alpha^\theta}) \leq Se^{(T_E-1)\alpha^\theta} - Se^{-2\alpha^\theta} - Se^{(T_E-1)\alpha^\theta}e^{-n_{m+1}\alpha^\theta} +$$

$$Se^{-2\alpha^\theta}e^{-(n_{m+1}-T_E)\alpha^\theta} \Leftrightarrow e^{-n_{m+1}\alpha^\theta} S(e^{(T_E-1)\alpha^\theta} - e^{T_E\alpha^\theta-2\alpha^\theta}) \leq$$

$$S(e^{(T_E-1)\alpha^\theta} - e^{-2\alpha^\theta}) - V^\theta(1 - e^{-\alpha^\theta})$$

$$e^{n_{m+1}\alpha^\theta} \geq \frac{S(e^{(T_E-1)\alpha^\theta} - e^{T_E\alpha^\theta-2\alpha^\theta})}{\mu} \Leftrightarrow n_{m+1} \geq \frac{1}{\alpha^F} \ln \frac{S(e^{(T_E-1)\alpha^\theta} - e^{T_E\alpha^\theta-2\alpha^\theta})}{\mu}$$

其中:

$$\mu = S(e^{(T_E-1)\alpha^\theta} - e^{-2\alpha^\theta}) - V(1 - e^{-\alpha^\theta})$$

假设  $n_{m+1}$  是一个正整数, 那么:

$$n_{m+1} \geq N_1 \quad (27)$$

其中:

$$N_1 = \left\lceil \frac{1}{\alpha^F} \ln \frac{S(e^{(T_E-1)\alpha^\theta} - e^{T_E\alpha^\theta-2\alpha^\theta})}{\mu} \right\rceil \quad (28)$$

这意味着在式 (23) 中, 被动神经元在  $N_1$  或之后会以稳定周期  $T_E$  脉冲。

同样地, 对于 (25a), 我们有:

$$Se^{(T_E-2)\alpha^\theta} < \gamma Se^{-2\alpha^\theta} + \lambda V^\theta \Leftrightarrow V^\theta(1 - e^{-\alpha^\theta}) >$$

$$Se^{(T_E-2)\alpha^\theta}(1 - e^{-n_{m+1}\alpha^\theta}) - Se^{-2\alpha^\theta}(1 - e^{-(n_{m+1}-T_E)\alpha^\theta})$$

$$\Leftrightarrow V^\theta(1 - e^{-\alpha^\theta}) > Se^{(T_E-2)\alpha^\theta} - Se^{-2\alpha^\theta} -$$

$$Se^{(T_E-2)\alpha^\theta}e^{-n_{m+1}\alpha^\theta} + Se^{-2\alpha^\theta}e^{-(n_{m+1}-T_E)\alpha^\theta}$$

$$\Leftrightarrow e^{-n_{m+1}\alpha^\theta} S(e^{(T_E-2)\alpha^\theta} - e^{T_E\alpha^\theta-2\alpha^\theta}) >$$

$$S(e^{(T_E-2)\alpha^\theta} - e^{-2\alpha^\theta}) - V^\theta(1 - e^{-\alpha^\theta})$$

$$\Leftrightarrow e^{n_{m+1}\alpha^\theta} < \frac{Se^{-2\alpha^\theta}(e^{T_E\alpha^\theta} - e^{T_E\alpha^\theta})}{\eta}$$

其中:

$$\eta = Se^{-2\alpha^\theta}(e^{T_E\alpha^\theta} - 1) - V^\theta(1 - e^{-\alpha^\theta})$$

然后得到:

$$n_{m+1} \leq N_2 \quad (29)$$

其中:

$$N_2 = \left\lceil \frac{Se^{-2\alpha^\theta}(e^{T_E\alpha^\theta} - e^{T_E\alpha^\theta})}{\eta} \right\rceil \quad (30)$$

注意到式 (28) 可能导致负整数或复数, 即  $N_1 \notin \mathbf{R}^+$ , 而  $N_2$  是正整数, 即  $N_2 \in \mathbf{R}^+$ 。这意味着被动神经元不能从  $N_1$  开始以稳定时间  $T_E$  脉冲; 换句话说, 在  $N_2$  之后, 神经元将以  $T_E$  周期性脉冲。因此, 具有  $T_E$  的初始相位满足:

$$N_s \in \{n \mid n = N_2 + 1, N_2 + 2, \dots, N_2 + T_E\}$$

在  $N_1 \notin \mathbf{R}^+, N_2 \in \mathbf{R}^+$

同样, 当  $N_1$  为正整数时, 式 (30) 中的  $N_2$  也可以是负整数或复数。即,  $N_1 \in \mathbf{R}^+$ 。也就是说, 被动神经元可以从:

$$N_s \in \{n \mid n = N_1, N_1 + 1, \dots, N_1 + T_E - 1\}$$

在  $N_1 \in \mathbf{R}^+, N_2 \notin \mathbf{R}^+$

结论 3: 根据定理 3, 有一个理想的初始相位  $N_s \ll +\infty$ , 从中被动神经元可以开始周期性地脉冲。

结论 4: 根据推论 2, 利用期望的初始相位  $N_s$ , 被动 PCNN 神经元的迭代可以依次分为两个时间阶段: 非周期和周期阶段。

根据定理 1 和推论 2, 如果  $\alpha^F \rightarrow +\infty$ , 估计的被动脉冲周期及其稳定周期将是:

$$\lim_{\alpha^F \rightarrow +\infty} T_E = \lim_{\alpha^F \rightarrow +\infty} T_E(n_{m+1}) = \left\lceil \frac{1}{\alpha^\theta} \ln \left[ e^{-2\alpha^\theta} + \frac{V^\theta}{S} \right] \right\rceil + 1 \quad (31)$$

此外, 当  $\alpha^F \rightarrow +\infty$  时, 定理 3 中  $N_1$  和  $N_2$  将是负整数或复数, 这样由于迭代中只存在周期性相位, 被动神经元将从一开始就周期性地脉冲。实际上, 在这种情况下, 被动神经元的 F 通道输出将固定为外部刺激 S。因此, 在一些修正版本中<sup>[19,21-22,24]</sup>, 通过将 F 通道简化为外部激励, 将 PCNN 简化, 显然, 修正版本的 PCNN 在迭代中只保持周期性阶段。

### 4 实验分析

本节通过数值模拟验证了理论结果的有效性, 用式 (4) ~ (5) 和 (7) 描述了 PCNN 中的被动神经元。因此, 在下面的示例中设置 5 个参数, 即  $\alpha^F, \alpha^\theta, V^\theta, S$  和  $\theta(0)$ 。

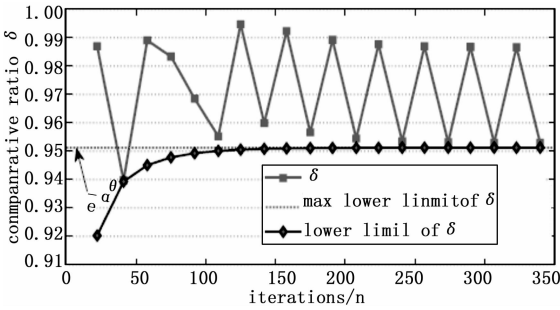


图 1 例 1 中  $\alpha^\theta = 0.05$  的动态比较比

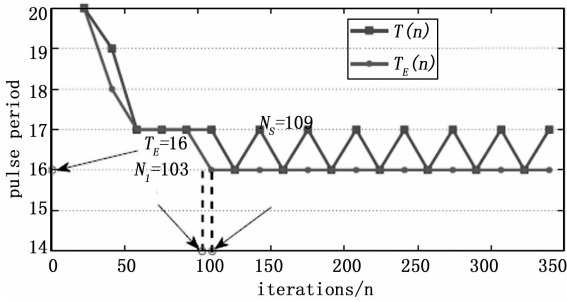


图 2 例 1 中的实际和估计被动脉冲周期  $\alpha^\theta = 0.05$

例 1. 神经参数  $\alpha^F = 0.03, \alpha^\theta = 0.05, V^\theta = 8, S = 0.4, \theta(0) = 0.2$ 。在图 1 中, 除了第二个脉冲迭代外, 所有脉冲迭代的动态比较比大于  $\delta = e^{-\alpha^\theta} = 0.95123$ , 作为动态比较比的最大下限。根据定理 2, 实际被动脉冲周期  $T(n)$  和估计被动脉冲周期  $T_E(n)$  之间的误差  $\epsilon$  在  $-1 \sim 0$  之间。事实上, 这一事实如图 2 所示。此外, 根据定理 2 和 3 的计算, 稳定被动脉冲周期  $T_E$  为 16,  $N_1 = 103, N_2$  是一个复数。从图 2 可以看出, 被动神经元可以在  $N_s = 109$  时开始与  $T_E$  一起脉冲, 这也满足定理 3 中的 (24a)。

在期望的时间相位  $N_s$  之后, 图 2 中的实际被动周期呈现绝对误差, 在前后周期之间为 1。因此, 在这种情况下, 虽然估计被动脉冲周期在  $N_s$  后是稳定的, 但实际被动脉冲周期仅在  $N_s$  后接近稳定。然而, 如果我们选择  $\alpha^\theta = 0.06$ , 如图 3 所示, 神经元将在随后的期望初始阶段以  $T_E = 14$  完全周期性地脉冲。

例 2. 假设神经参数为  $\alpha^F = 0.03, \alpha^\theta = 0.029, V^\theta = 8, S = 0.4, \theta(0) = 0.4$ , 根据定理 3 可以产生正  $N_1 = 23$  和负  $N_2 = -13$ , 稳定脉冲周期  $T_E$  为推论 2 的 16。注意, 根据定理 3, 除了第一个周期, 即使第二个和第三个动态比较比低于图 5 中动态比较比的最大下限, 也可以在图 4 中达成一致。此外, 根据图 4 和定理 3 正确地给出了初始相位。

例 3. 将参数设置为  $\alpha^F = 0.05, \alpha^\theta = 0.03, V^\theta = 8, S = 0.4, \theta(0) = 0.4$ , 这样根据定理 3 得到  $N_1$  是复数,  $N_2 = 66$ 。图 6 所示的结果服从定理 2 和 3。  $T_E(n)$  和  $T(n)$  之间的误差为  $-1$  或  $0$ , 但由于图 7 中  $e^{-\alpha^\theta} = 0.97045$  的值较低, 因此第一个周期的误差为 2。

例 4. 参数为  $\alpha^F = 0.03, \alpha^\theta = 0.02858, V^\theta = 8, S = 0.4, \theta(0) = 0.2$ , 由此得出推论 2 和定理 3 的  $T_E = 17, N_1 = -61, N_2 = 164$ 。显然, 根据论点 2 和推论 1 得到的图 9 所示的动态比较比, 不仅是推论 2 的估计稳定周期  $T_E$ , 定理 2 的估计被动周期和实际被动周期之间的误差, 而且定理 3 的初始相位  $N_s \in [165, 181]$  与图 8 所示的结果吻合得很好。

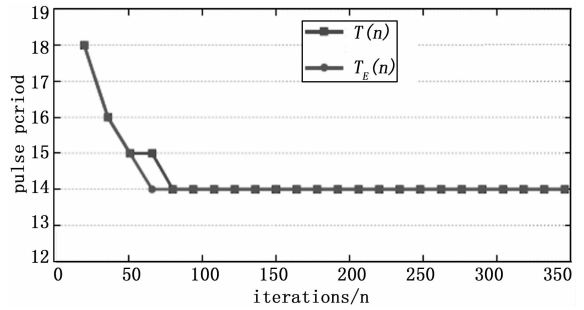


图 3 例 1 中的实际和估计被动脉冲周期  $\alpha^\theta = 0.06$

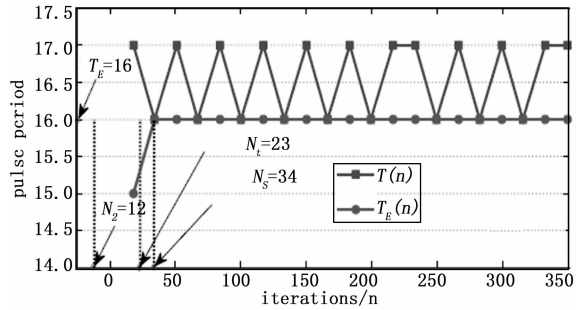


图 4 例 2 中的实际和估计被动脉冲周期

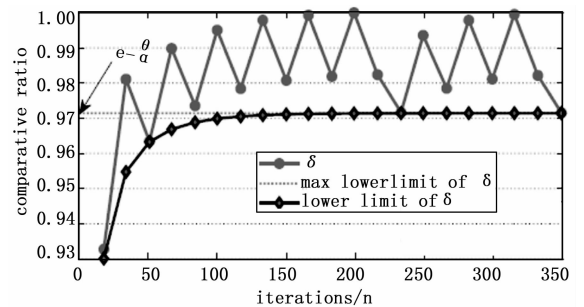


图 5 例 2 中的动态比较比

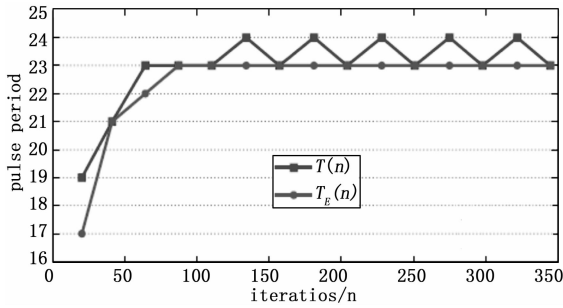


图 6 例 3 中的实际和估计被动脉冲周期

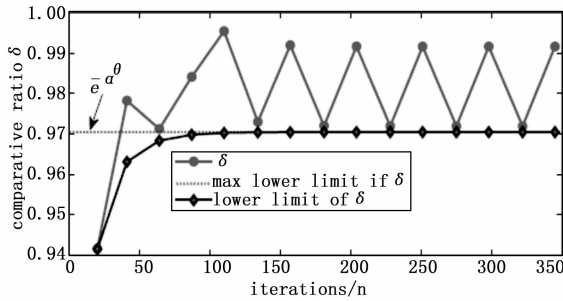


图 7 例 3 中的动态比较比

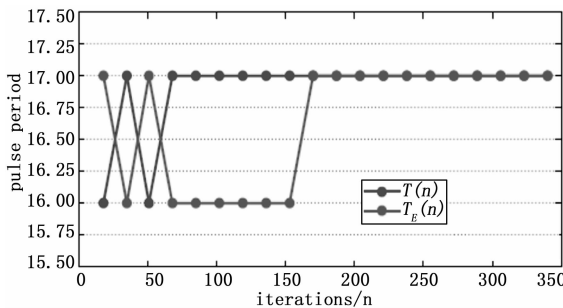


图 8 例 4 中的实际和估计被动脉冲周期

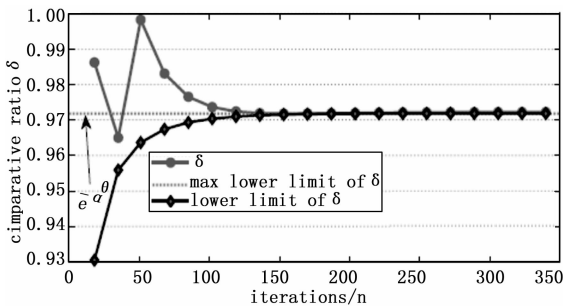


图 9 例 4 中的动态比较比

例 5. 与其他随机系统<sup>[29]</sup>一样, PCNN 中的随机噪声也会对外部刺激产生干扰, 为了研究随机噪声对被动神经元被动脉冲周期的稳定性, 我们设置了与例 3 相同的参数, 而外部刺激则是由不同信噪比的高斯白噪声 (SNR) 产生的。由图 10 所示的结果可知, 当被动神经元的外部刺激不受干扰或受较小噪声 (如 SNR=20 或 30) 的干扰时, 在经过一些迭代后, 被动神经元可以产生一个几乎稳定的真实

被动脉冲周期, 且这些周期之间的绝对差最多为 1 (见图 10)。然而, 当外部刺激受到较大噪声 (如 SNR=10) 的干扰时, 实际被动脉冲周期在任何迭代中都不稳定。因此, 对于较小噪声, 被动 PCNN 神经元将周期性地相位中脉冲, 而对于较大噪声, 神经元将在所有相位中非周期性地脉冲。

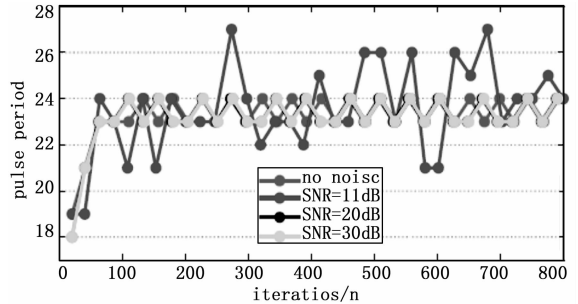


图 10 例 5 中具有不同随机噪声的实际被动脉冲周期

### 5 结论

本文研究了离散 PCNN 中被动神经元的被动脉冲周期。通过定义动态比较比, 而不是神经内状态与动态阈值之间的逻辑比较, 给出了一个近似准确的被动脉冲周期公式, 使得估计和实际被动脉冲周期之间的误差为 -1 或 0。此外, 由于被动神经元没有稳定周期, 因此估计了一个初始阶段, 从中被动神经元可以在这个稳定周期内开始周期性脉冲。文中给出了一些例子, 并与被动神经元的相关分析结果相一致。

### 参考文献:

- [1] Eckhorn R, Bauer R, Jordan W, et al. Coherent oscillations: a mechanism of feature linking in the visual cortex? multiple electrode and correlation analyses in the cat [J]. Biol. Cybernet., 1988, 60 (2): 121.
- [2] Gray C M, et al. Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflects global stimulus properties [J]. Nature, 1989, 338 (6213): 334.
- [3] Rybak I A, Shevtsova N A, Podladchikova L N, et al. A visual cortex domain model and its use for visual information processing [J]. Neural Netw., 1991, 4 (1): 3-13.
- [4] Eckhorn R, Reitboeck H J, Arndt M, et al. Feature linking via synchronization among distributed assemblies: simulations of results from cat visual cortex [J]. Neural Comput., 1990, 2 (3): 293-307.
- [5] Johnson J L, Ritter D. Observation of periodic waves in a pulse-coupled neural network [J]. Opt. Lett., 1993, 18: 1253.
- [6] Johnson J L. Pulse-coupled neural nets: translation, rotation, scale, distortion, and intensity signal invariance for images [J]. Applied Optics, 1994, 33 (26): 6239-6253.
- [7] Guo Y. Mean square global asymptotic stability of stochastic recurrent neural networks with distributed delays [J]. Appl.

- Math. Comput., 2009, 215 (2): 791–795.
- [8] Liu L, Zhu Q. Almost sure exponential stability of numerical solutions to stochastic delay Hopfield neural networks [J]. Appl. Math. Comput., 2015, 266: 698–712.
- [9] Zhu Q, Li X. Exponential and almost sure exponential stability of stochastic fuzzy delayed Cohen–Grossberg neural networks [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2012, 203: 74–94.
- [10] Guo Y. Globally robust stability analysis for stochastic Cohen–Grossberg neural networks with impulse control and time-varying delays [J]. Ukr. Matematychni Zh., 2017, 69 (8): 1049–1060.
- [11] Guo Y. Mean square exponential stability of stochastic delay cellular neural networks [J]. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 2013 (34): 1–10.
- [12] Na Y, Chen H, Li Y F, et al. Coupled parameter optimization of PCNN model and vehicle image segmentation [J]. J. Transp. Syst. Eng. Inf. Technol., 2012, 12 (1): 48–54.
- [13] Deng X, Yide M A. PCNN model analysis and its automatic parameters determination in image segmentation and edge detection, Chin. J. Electron., 2014, 23 (1): 97–103.
- [14] Liu R, Jia Z, Qin X, et al. Sar image change detection method based on pulse-coupled neural network [J]. J. Indian Soc. Remote Sens., 2016, 44 (3): 443–450.
- [15] Zhou D, Shao Y. Region growing for image segmentation using an extended PCNN model [J]. IET Image Process., 2017, 12 (5): 729–737.
- [16] He F, Guo Y, Gao C. An improved pulse coupled neural network with spectral residual for infrared pedestrian segmentation [J]. Infrared Phys. Technol., 2017, 87: 22–30.
- [17] Kong W, Liu J. Technique for image fusion based on nonsub-sampled shearlet transform and improved pulse-coupled neural network [J]. Opt. Eng., 2013, 52 (1): 0177001.
- [18] Xiang T, Yan L, Gao. A fusion algorithm for infrared and visible images based on adaptive dual-channel unit-linking PCNN in nsct domain [J]. Infrared Phys. Technol., 2015, 69: 53–61.
- [19] Ganasala P, Kumar V. Feature-motivated simplified adaptive PCNN-based medical image fusion algorithm in nsst domain [J]. J. Digit. Imaging, 2016, 29 (1): 73–85.
- [20] Wang Z, Gong C. A multi-faceted adaptive image fusion algorithm using a multi-wavelet-based matching measure in the PCNN domain [J]. Appl. Soft Comput., 2017, 61: 1113–1124.
- [21] Li X, Ma Y, Wang Z. Geometry-invariant texture retrieval using a dual-output pulse-coupled neural network [J]. Neural Comput., 2012, 24 (1): 194–216.
- [22] Mohammed M M, Badr A, Abdelhalim M B. Image classification and retrieval using optimized pulse-coupled neural network [J]. Expert Syst. Appl., 2015, 42 (11): 4927–4936.
- [23] Nie R, Zhou D, He M, et al. Facial feature extraction using frequency map series in PCNN [J]. J. Sens., 2016 (4) (2015) 1–9.
- [24] Wang Z, Sun X, Zhu Y, et al. Leaf recognition based on PCNN [J]. Neural Comput. Appl., 2016, 27 (4): 899–908.
- [25] Wang H, Zhu Q. Global stabilization of stochastic nonlinear systems via  $C1$  and  $C\infty$  controllers [J]. IEEE Trans. Automat. Control, 2017, 62 (11): 5880–5887.
- [26] Zhu Q, Wang H. Output feedback stabilization of stochastic feedforward systems with unknown control coefficients and unknown output function [J]. Automatica, 2018, 87: 166–175.
- [27] Senthilraj S, Raja R, Zhu Q, et al. Delay-interval-dependent passivity analysis of stochastic neural networks with Markovian jumping parameters and time delay in the leakage term [J]. Nonlinear Anal. Hybrid Syst., 2016, 22: 262–275.
- [28] Ali M S, Gunasekaran N, Zhu Q. State estimation of T-fuzzy delayed neural networks with Markovian jumping parameters using sampled data control [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2017, 306: 87–104.
- [29] Zhu Q. Razumikhin-type theorem for stochastic functional differential equations with Lévy noise and Markov switching [J]. Internat. J. Control, 2017, 90 (8): 1703–1712.
- [30] Ranganath H S, Kuntimad G, Johnson J L. Pulse coupled neural networks for image processing [J]. Southeastcon, 1995: 37–43.
- [31] Izhikevich E M. Theoretical foundations of pulse-coupled models, Int. Symp. Neural Netw., 1998, 3: 2547–2550.
- [32] Izhikevich E M. Class 1 neural excitability, conventional synapses, weakly connected networks, and mathematical foundations of pulse coupled models [J]. IEEE Trans. Neural Netw., 1999, 10 (3): 499–507.
- [33] Bressloff P C, Coombes S. Symmetry and phase-locking in a ring of pulse-coupled oscillators with distributed delays [D]. Physica D, 1999.
- [34] Burkitt A N, Clark G M. New technique for analyzing integrate and fire neurons [J]. Neurocomputing, 1999, 26: 93–99.
- [35] Yu J B, Chen H J, Yu W, et al. Parameter determination of pulse coupled neural network [J]. Acta Electron. Sin., 2008, 36 (1): 81–85, 89.
- [36] Deng X Y, Ma Y D. PCNN model automatic parameters determination and its modified model [J]. Acta Electron. Sin., 2012, 5 (5): 955–964.
- [37] Nie R C, Yao S W, Zhou D M, et al. Analyzing of dynamic characteristics for discrete s-PCNN [J]. Adv. Mater. Res., 2013: 1355–1359.
- [38] Deng H Y, Zhou D M, Nie R C. Period characteristics analysis of PCNN [J]. J. Yunnan Univ., 2015, 37 (1): 26–30.
- [39] Wang B, Zhu Q. Stability analysis of Markov switched stochastic differential equations with both stable and unstable subsystems [J]. Systems Control Lett., 2017, 105: 55–61.