

# 基于神经网络的多机械臂固定时间同步控制

高苗苗, 陈强, 徐栋, 南余荣

(浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023)

**摘要:** 针对动力学模型未知的多机械臂系统, 提出了一种基于神经网络的固定时间终端滑模的位置同步控制器; 首先结合相邻交叉耦合同步控制策略, 设计固定时间终端滑模面与控制器, 保证系统的跟踪误差与同步误差在固定时间内收敛, 且收敛时间上界与初始状态无关; 其次, 设计 RBF 神经网络权值更新律估计系统多机械臂未知非线性动力学模型, 该方法无需对系统模型参数的先验知识; 利用 Lyapunov 函数证明系统的固定时间收敛性与稳定性; 最后, 仿真结果验证了所提方法的有效性。

**关键词:** 多机械臂同步; 相邻交叉耦合; RBF 神经网络; 固定时间控制

## Fixed-time Synchronization Control of Multi-manipulator Based on Neural Network

Gao Miaomiao, Chen Qiang, Xu Dong, Nan Yurong

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

**Abstract:** In this paper, a fixed-time sliding mode position synchronization controller based on neural network is proposed for multi-manipulator system with unknown dynamics model. Firstly, a fixed-time terminal sliding mode surface and controller are designed based on the adjacent cross-coupled synchronization control strategy to ensure that the tracking error and synchronization error converge in a fixed-time, and the upper bound of the convergence time is independent of the initial state. Secondly, the weight updating law of RBF neural network is designed to estimate the unknown nonlinear dynamic model of the system. This method does not need prior knowledge of the parameters of the system model. The Lyapunov function is used to prove the fixed-time convergence and stability of the system. Finally, simulation results verify the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** synchronization of multi-manipulator; adjacent cross coupling; RBF neural network; fixed-time control

## 0 引言

随着机械臂的应用越来越广泛, 操作要求越来越复杂化, 精密化, 单个机械臂系统已经逐渐不能够满足控制要求。与单个机械臂相比, 两个或多个机械臂可以完成更复杂的生产任务, 如运输、涂装、焊接和装配等<sup>[1-2]</sup>。多机械臂系统是一个多输入多输出, 高度非线性, 耦合性强的复杂系统, 并且又存在着参数摄动, 内部摩擦、外界干扰以及未建模动态等不确定性, 这些因素给多机械臂同步跟踪控制增加了难度。因此, 提高多机械臂系统的稳定性和精确性, 实现多机械臂同步控制, 具有重要的研究意义和实用价值<sup>[3-4]</sup>。

在多机械臂的同步控制过程中, 最重要的是保持机械臂之间的同步性能, 所以同步控制方法是保证多机械臂系

统同步运动的关键手段。基于多机械臂同步控制技术重要的研究意义及现实意义, 近年来, 许多国内外学者进行了研究和探索, 并且提出了一系列的同步控制策略, 如: 主从控制, 领导者-跟随者控制, 相邻交叉耦合控制等<sup>[5-7]</sup>。文献 [5] 结合反馈控制器和非线性观测器, 设计了两个机械臂的主从同步控制策略。主从控制方式的缺点是当主机机械臂受到扰动时对从属机械臂产生影响, 反之, 当从属机械臂受到扰动时, 主机机械臂无法获得从属机械臂的反馈信号。文献 [6] 中, 提出一种领导者-跟随者通信网络拓扑同步控制方法, 设计的通信网络拓扑定义领导者相互之间以及跟随者之间的同步误差, 并且通过所设计的控制器来实现领导机械臂和跟随机械臂的精确跟踪轨迹。文献 [7] 采用了交叉耦合同步控制策略, 实现了多机械臂系统的位置误差和同步误差的渐进收敛。上述提到的同步控制算法中, 相邻交叉耦合策略在多伺服系统中的运用最为普遍<sup>[8]</sup>。相邻交叉耦合控制是将每个机械臂自身反馈误差和与之相邻的两个机械臂之间的同步误差作为反馈信号。其优点是当机械臂的数量增多时, 控制器设计的复杂性不会随之增加。文献 [8] 提出了一种基于相邻交叉耦合同步控制策略的多电机系统控制方法, 保证了位置跟踪误差和同步误差同时收敛。

为了进一步提高位置跟踪控制性能, 多机械臂的控制算法逐渐得到国内外学者的关注。目前应用于多机械臂系

收稿日期: 2019-03-06; 修回日期: 2019-03-22。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61403343); 浙江省自然科学基金资助项目(LY17F030018)。

作者简介: 高苗苗(1992-), 女, 安徽阜阳人, 硕士研究生, 主要从事多机械臂系统方向的研究。

陈强(1984-), 男, 山东德州人, 副教授, 硕士生导师, 主要从事非线性伺服系统建模与控制方向的研究。

南余荣(1966-), 男, 浙江乐清人, 教授, 博士生导师, 主要从事电力传动和电机控制方向的研究。

统的算法主要有基于模型控制、PID 控制、滑模控制、自适应控制和鲁棒控制等。在众多的方法中, 滑模控制因为其鲁棒性好, 稳定性高, 并且易于实现等优点受到了广泛关注<sup>[9-11]</sup>。文献 [9] 设计了基于自适应神经网络的积分滑模控制策略, 实现两个机械臂的同步控制。文献 [10] 结合参数自适应和干扰观测器提出了一种多机械臂分散模糊控制, 以保证跟踪误差渐进收敛。文献 [11] 针对多个机械臂系统开发了一种基于自适应终端滑模的同步控制算法, 以保证跟踪误差和同步误差在有限时间内收敛到零。在大多数有限时间控制方案中, 收敛时间的上限与系统初始条件有关, 这意味着当初始系统状态发生变化时, 收敛时间上限也随之改变。近年来, 在文献 [12] 中提出了一种固定时间的控制方案, 其收敛时间的上限与系统初始状态无关。随后, 固定时间控制方案被广泛应用于航天器、多智能体系统等领域<sup>[13]</sup>。然而, 固定时间控制在具有模型不确定性的多机械臂系统中的研究比较少。

因此, 文中针对多机械臂同步系统提出一种基于相邻交叉耦合的固定时间同步控制算法。通过每个机械臂自身反馈误差和与之相邻的两个机械臂之间的同步误差作为反馈信号, 结合机械臂的跟踪误差, 得到相邻交叉耦合误差, 用于固定时间滑模控制器, 实现多机械臂的跟踪误差与同步误差在固定时间内收敛。同时, 设计 RBF 神经网络权值更新律估计系统非线性动力学模型, 从而减小其对系统控制的影响。然后通过李雅普诺夫定理分析系统的收敛性及稳定性。最后, 仿真结果证明方法的有效性。

## 1 系统模型及预备知识

### 1.1 RBF 神经网络

RBF 神经网络是一种性能良好的前向网络, 具有良好的函数逼近能力、收敛速度快等优点, 通常用于对未知干扰及模型不确定部分的估计。径向基函数是中心径向对称的、局部分布的、非负衰减的非线性函数, 下面给出的 RBF 神经网络用于近似连续函数  $f(x): R^a \rightarrow R^b$ :

$$f(x) = W^* T \varphi(x) + \delta \quad (1)$$

其中:  $W^* T = [\tau_{w_1} \ \dots \ \tau_{w_l}] \in R^{b \times l}$  为神经网络的理想权重向量,  $x \in R^a$  是输入向量,  $l$  为隐藏节点数,  $\delta$  为模型误差,  $\varphi(x) = [\varphi_1(x) \ \dots \ \varphi_l(x)]^T$ ,  $\varphi_i(x)$  采用的是高斯函数并且  $0 < \varphi_i(x) \leq 1$ , 其表达式为:

$$\varphi_i(x) = \exp\left[-\frac{(x - \mu_i)^T (x - \mu_i)}{\sigma_i^2}\right], i = 1, 2, \dots, l \quad (2)$$

其中:  $\mu_i = [\mu_{i1} \ \dots \ \mu_{in}]^T$  代表高斯函数的中心值,  $\sigma_i$  代表高斯函数的宽度值。

### 1.2 多机械臂系统模型

考虑由  $n$  个机械臂组成的多机械臂系统, 其中每个机械臂有  $m$  个关节, 则其动力学方程为<sup>[14]</sup>:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (3)$$

其中:  $q = [q_1^T \ \dots \ q_n^T]^T \in R^{nm}$  为关节角位置;  $\dot{q} = [\dot{q}_1^T \ \dots \ \dot{q}_n^T]^T \in R^{nm}$  为关节角速度;  $\ddot{q} = [\ddot{q}_1^T \ \dots \ \ddot{q}_n^T]^T \in$

$R^{nm}$  为关节角加速度;  $H(q) = \text{diag}([H_1(q_1) \ \dots \ H_n(q_n)])$  为机械臂惯性矩阵;  $C(q, \dot{q}) = \text{diag}([C_1(q_1, \dot{q}_1) \ \dots \ C_n(q_n, \dot{q}_n)])$  表示离心力和哥氏力矩阵;  $\tau = [\tau_1^T \ \dots \ \tau_n^T]^T \in R^{nm}$  为输入力矩;  $G(q) = [G_1^T(q_1) \ G_2^T(q_2) \ \dots \ G_n^T(q_n)]^T$  为重力项矩阵。

机械臂系统的动力学特性<sup>[14]</sup>如下:

特性 1: 惯性矩阵  $H(q)$  是对称正定矩阵, 存在正数  $h_1, h_2$ , 满足如下不等式:

$$h_1 \|x\|^2 \leq x^T H(q)x \leq h_2 \|x\|^2, \forall x \in R^{nm} \quad (4)$$

特性 2:  $\bar{H}(q) - 2C(q, \dot{q})$  是一个斜对称矩阵, 其满足如下关系:

$$x^T [\bar{H}(q) - 2C(q, \dot{q})]x = 0, \forall x \in R^{nm} \quad (5)$$

特性 3: 机械臂系统满足如下线性关系:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta \quad (6)$$

其中:  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in R^{nm \times p}$  为已知函数的回归矩阵,  $\theta \in R^p$  为机械臂的未知参数向量。

### 1.3 相邻交叉耦合同步策略

为了提高多机械臂的同步性能, 减少控制器设计的复杂程度, 本文采用了多机械臂相邻交叉耦合同步控制策略, 其结构如图 1 所示。

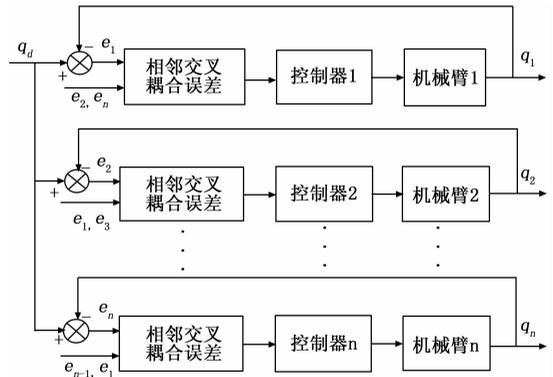


图 1 相邻交叉耦合同步结构

由图 1 可以看出, 多机械臂同步系统中所有机械臂的位置给定信号  $q_d$  保持一致, 定义机械臂位置跟踪误差为  $e = [e_1^T \ \dots \ e_n^T]^T \in R^{nm}$ , 多机械臂的同步误差为  $\epsilon = [\epsilon_1^T \ \dots \ \epsilon_n^T]^T \in R^{nm}$ , 其中,  $e_i$  和  $\epsilon_i$  的表达式如下:

$$e_i = q_d - q_i \quad (7)$$

$$\epsilon_i = 2e_i - e_{i-1} - e_{i+1} \quad (8)$$

根据式 (7) 和 (8) 可以得到如下表达形式:

$$\epsilon = T e \quad (9)$$

其中:

$$T = \begin{bmatrix} 2I & -I & & & -I \\ -I & 2I & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -I & 2I & -I \\ -I & & & & -I & 2I \end{bmatrix}_{nm \times nm} \quad (10)$$

为了保证跟踪误差  $e$  和同步误差  $\epsilon$  同时收敛, 定义交叉

耦合误差  $E = [E_1^T \ \cdots \ E_n^T]^T$ , 则有:

$$E = e + \alpha \varepsilon = (I + \alpha T)e = Ae \quad (11)$$

其中,  $\alpha$  为同步系数且为正定矩阵。由式 (11) 可得  $(I + \alpha T)$  为一个满秩矩阵, 由此可以得到当相邻交叉耦合误差  $E = 0$  时, 位置跟踪误差  $e = 0$ , 同时根据式 (9) 可以得到, 同步误差  $\varepsilon = 0$ 。

本文的控制目标是针对多机械臂系统 (3), 设计固定时间滑模控制器  $\tau$ , 实现相邻交叉耦合误差  $E$  在固定时间内收敛到零, 从而实现跟踪误差  $e$  和同步误差  $\varepsilon$  在固定时间内收敛到零。

## 2 固定时间同步控制

在本节中, 针对动力学模型未知的多机械臂系统, 构造固定时间滑模面, 并在此基础上设计固定时间滑模控制器, 保证系统的跟踪误差与同步误差在固定时间滑模控制器, 保证系统的跟踪误差与同步误差在固定时间内收敛。同时设计神经网络更新律来逼近系统未知动力学模型, 从而提高系统的鲁棒性。然后利用李雅普诺夫理论证明系统的稳定性。

### 2.1 固定时间滑模面

针对系统 (3), 设计如下固定时间终端滑模面:

$$S = \bar{E} + \lambda_1 \text{sign}^{\gamma_1} E + \lambda_2 \text{sign}^{\gamma_2} E = A(u_r - \bar{q}) \quad (12)$$

其中:  $S = [s_1^T \ s_2^T \ \cdots \ s_n^T]^T \in \mathbf{R}^m, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \gamma_1 > 1, 0 < \gamma_2 < 1$  为滑模面参数  $\text{sign}^{\gamma_i}(E) = [|E_1|^{\gamma_i} \text{sgn}(E_1) \ \cdots \ |E_n|^{\gamma_i} \text{sgn}(E_n)]^T, u_r$  为辅助矩阵且其表达式为:

$$u_r = \bar{q}_d + A^{-1} \lambda_1 \text{sign}^{\gamma_1} E + A^{-1} \lambda_2 \text{sign}^{\gamma_2} E \quad (13)$$

对固定时间滑模面  $S$  求导可得:

$$\dot{S} = \bar{E} + \gamma_1 \lambda_1 E^{\gamma_1 - 1} + \gamma_2 \lambda_2 E^{\gamma_2 - 1} = A(\dot{u}_r - \dot{\bar{q}}) \quad (14)$$

由于  $\gamma_2 - 1 < 0$ , 所以当  $E = 0$  时滑模面会存在奇异值问题, 为了避免奇异值的出现, 将  $u_r$  调整为:

$$u_r = \bar{q}_d + A^{-1} \lambda_1 \text{sign}^{\gamma_1} E + A^{-1} \lambda_2 \varphi(E) \quad (15)$$

其中:

$$\varphi(E) = \begin{cases} \text{sign}^{\gamma_2} E, & S = 0 \text{ or } S \neq 0, |E| > E_s \\ l_1 E + l_2 E^2, & S \neq 0, |E| \leq E_s \end{cases} \quad (16)$$

$l_1 = (2 - \gamma_2) E_s^{\gamma_2 - 1}, l_2 = (\gamma_2 - 1) E_s^{2 - \gamma_2}, E_s$  为一个极小的正数。由此可以得到调整后的滑模面为:

$$S = \bar{E} + \lambda_1 \text{sign}^{\gamma_1} E + \lambda_2 \varphi(E) \quad (17)$$

### 2.2 控制器设计

根据式 (14) 可以得到:

$$\dot{\bar{q}} = \dot{u}_r - A^{-1} \dot{S} \quad (18)$$

将公式 (18) 代入多机械臂系统 (3) 可得:

$$H(q)A^{-1}\dot{S} = -C(q, \dot{q})A^{-1}S - \tau - f \quad (19)$$

其中非线性机械臂方程为:

$$f = H(q)\dot{u}_r + C(q, \dot{q})u_r + G(q) \quad (20)$$

如果非线性机械臂方程是已知的, 则控制器可以设计为:

$$\tau = f + \mathbf{K}_1 S^{\rho_1} + \mathbf{K}_2 S^{\rho_2} \quad (21)$$

其中:  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 > 0$  且为正定对角矩阵,  $\rho_1 > 1, 0 < \rho_2 < 1$  为控制器参数。将控制器 (21) 带入多机械臂系统 (3) 可以得到如下闭环系统:

$$HA^{-1}\dot{S} + CA^{-1}S + \mathbf{K}_1 S^{\rho_1} + \mathbf{K}_2 S^{\rho_2} = 0 \quad (22)$$

根据李雅普诺夫定理可以很容易证明出闭环系统的稳定性, 但是如果  $f$  中的系统参数和结构是未知的, 上述的控制器则不能保证系统的稳定性。因此, 采用神经网络来逼近非线性方程  $f$ 。

假设存在一个理想权重向量  $W^*$ , 根据公式 (1) 可以将非线性机械臂方程 (20) 写为如下形式:

$$f = W^{*T} \varphi(x) + \delta \quad (23)$$

其中: 输入向量  $x = [q^T, \dot{q}^T, u^T, \dot{u}^T] \in \mathbf{R}^{4m}, \delta$  是一个有界的误差, 并且存在一个正数  $\delta_N$ , 使其满足  $\|\delta\| \leq \delta_N$ 。此时将固定时间控制器设计为:

$$\tau = \hat{f} + \mathbf{K}_1 A^T S^{\rho_1} + \mathbf{K}_2 A^T S^{\rho_2} + u_0 = \hat{W}^T \varphi(x) + \mathbf{K}_1 A^T S^{\rho_1} + \mathbf{K}_2 A^T S^{\rho_2} + u_0 \quad (24)$$

其中:

$$u_0 = \begin{cases} (\eta + \eta_1) \frac{S}{\|S\|}, & S \neq 0 \\ 0, & S = 0 \end{cases} \quad (25)$$

其中:  $\hat{f}$  是  $f$  的估计值,  $\hat{W}$  是理想权重  $W^*$  的估计值,  $u_0$  为消除模型及神经网络估计误差而设计的鲁棒项,  $\eta$  与  $\eta_1$  为正实数, 并且  $\eta$  的选择满足  $\eta > \delta_N$ 。

将控制器 (24) 带入式 (19) 可以得到以下方程:

$$H(q)A^{-1}\dot{S} = -C(q, \dot{q})A^{-1}S - \mathbf{K}_1 A^T S^{\rho_1} - \mathbf{K}_2 A^T S^{\rho_2} + \hat{W}^T \varphi(x) + \delta - (\eta + \eta_1) \frac{S}{\|S\|} \quad (26)$$

其中:  $\tilde{W}$  为神经网络权值估计误差且  $\tilde{W} = W^* - \hat{W}$ 。此时, 神经网络权重自适应更新律设计为:

$$\dot{\tilde{W}} = \mathbf{\Gamma} \varphi(x) (A^{-1} S)^T \quad (27)$$

其中:  $\mathbf{\Gamma}$  为正定对角矩阵。

### 2.3 稳定性证明

引理 1<sup>[14]</sup>: 考虑如下非线性系统:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \quad (28)$$

其中:  $x(0) = 0, F(0) = 0, x \in \mathbf{R}^n$ 。假设存在李雅普诺夫函数  $V(x)$ , 满足以下不等式:

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha V(x)^p - \beta V(x)^g \quad (29)$$

其中:  $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < p < 1, g > 1$ , 则系统固定时间稳定, 系统状态变量收敛时间上界满足下列不等式关系:

$$t < T_{\max} \leq \frac{1}{\alpha(1-p)} + \frac{1}{\beta(g-1)} \quad (30)$$

定理 1: 针对多机械臂系统 (3), 当采用固定时间滑模面 (17) 时, 在固定时间滑模控制器 (24) 和权重自适应更新律 (27) 的作用下, 系统的稳定性可以得到保证, 并且可以得到系统的所有信号均有界。

证明: 构造如下李雅普诺夫函数:

$$V_1(t) = \frac{1}{2} S^T A^{-T} H A^{-1} S + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{W}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \tilde{W}) \quad (31)$$

对  $V_1$  求时间导数, 并将式 (26) 代入, 可得:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1(t) = & -S^TK_1S^{\rho_1} - S^TK_2S^{\rho_2} + S^TA^{-T}\delta - \\ & (\eta + \eta_1)SA^{-T} + \frac{1}{2}S^TA^{-T}[\bar{H} - 2C]A^{-1}S + \\ & \text{trace}[\bar{W}^T\varphi(x)(A^{-1}S)^T - S^TA^{-T}\bar{W}^T\varphi(x)] \end{aligned} \quad (32)$$

根据机械臂的特性 2, 并且对式 (32) 的进一步化简可以得到如下关系式:

$$\bar{V}_1(t) \leq -S^TK_1S^{\rho_1} - S^TK_2S^{\rho_2} - \eta_1 \|S\| \quad (33)$$

由式 (33) 可以看出, 在控制器 (24) 和更新律 (27) 作用下, 可以保证多机械臂系统的稳定性, 并且  $S$  与  $\bar{W}$  是有界的。然而, 目前不能够说明滑模面  $S$  在固定时间收敛。为了保证滑模面  $S$  在固定时间收敛, 我们给出定理 2 进行证明。

定理 2: 针对多机械臂系统 (3), 若将控制器 (24) 中参数  $\eta_1$  的设计满足  $\eta_1 \geq \|\bar{W}^T\varphi(x)\|_F$ , 则有以下结论成立: 1) 滑模面  $S$  在固定时间收敛, 收敛时间满足  $t_1 \leq T_1$ ; 2) 相邻交叉耦合误差  $E$  在固定时间内收敛, 收敛时间满足  $t < T_1 + T_2$ 。

其中:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{2}{\kappa_1(\rho_1 - 1)} + \frac{2}{\kappa_2(1 - \rho_2)} \\ T_2 = \frac{2}{\lambda_1(\gamma_1 - 1)} + \frac{2}{\lambda_2(1 - \gamma_2)} \end{cases} \quad (34)$$

证明:

(a) 构造如下李雅普诺夫函数:

$$V_2(t) = \frac{1}{2}S^TA^{-T}HA^{-1}S \quad (35)$$

对  $V_2(t)$  求时间导数, 并将式 (26) 代入, 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & S^TA^{-T}HA^{-1}\dot{S} + \frac{1}{2}S^TA^{-T}\dot{H}A^{-1}S \leq \\ & -S^TK_1S^{\rho_1} - S^TK_2S^{\rho_2} \end{aligned} \quad (36)$$

根据性质 1 可以得到:

$$\dot{V}_2(t) \leq -\kappa_1 V_2^{-\rho_1} - \kappa_2 V_2^{-\rho_2} \quad (37)$$

其中:  $\kappa_1 = \lambda_{\min}(K_1) \cdot \left(\frac{2}{\lambda_{\max}(A^{-T}HA^{-1})}\right)^{\frac{\rho_1}{1-\rho_1}}$ ,  $\kappa_2 = \lambda_{\min}(K_2)$

$\cdot \left(\frac{2}{\lambda_{\max}(A^{-T}HA^{-1})}\right)^{\frac{\rho_2}{1-\rho_2}}$ 。 $\lambda_{\min}(\cdot)$  和  $\lambda_{\max}(\cdot)$  分别代表矩阵的最大和最小特征值。

根据引理 1 可知, 滑模面  $S$  在固定时间内收敛到零, 且收敛时间满足  $t_1 \leq T_1$ 。

(b) 当  $S = 0$  时, 根据式 (17) 可得:

$$\dot{E} = -\lambda_1 \text{sign}^\gamma E - \lambda_2 \text{sign}^\gamma E \quad (38)$$

构建如下李雅普诺夫函数:

$$V_3(t) = \frac{1}{2}E^TE \quad (39)$$

对  $V_3(t)$  求导数, 并将式 (38) 带入, 可得:

$$\dot{V}_3(t) = E^T(-\lambda_1 \text{sign}^\gamma E - \lambda_2 \text{sign}^\gamma E) \leq -\lambda_1 V_3^{\frac{\gamma+1}{2}} - \lambda_2 V_3^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (40)$$

根据引理 1, 可以推断出相邻交叉耦合误差  $E$  在固定时间内收敛到零, 收敛时间满足  $t < T_1 + T_2$ 。根据相邻交叉耦合误差的定义式 (11), 可以得到跟踪误差  $e$  与同步误差  $e$

在固定时间内收敛到零。

注 1: 由于  $0 < \varphi_i(x) \leq 1$ , 则  $\varphi(x)$  满足  $\|\varphi(x)\| \leq \sqrt{l}$ , 其中  $\varphi(x) = [\varphi_1(x) \ \cdots \ \varphi_l(x)]^T$ 。根据 Frobenius 范数, 可以得到  $\|\bar{W}^T\varphi(x)\|_F \leq \|\bar{W}^T\|_F \|\varphi(x)\|$ 。由此可以推断出  $\|\bar{W}^T\varphi(x)\|_F$  是有界的, 所以控制器中的参数  $\eta_1$  的设计可以满足  $\eta_1 \geq \|\bar{W}^T\varphi(x)\|_F$ 。

### 3 仿真分析

#### 3.1 系统参数设置

为验证上述方法的有效性, 选取 4 个二关节多机械臂系统为研究对象进行仿真验证, 其表达式为:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H_{i_1}(q) & H_{i_2}(q) \\ H_{i_1}(q) & H_{i_2}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{i_1} \\ \ddot{q}_{i_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{i_1}(q) \\ G_{i_2}(q) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} C_{i_1}(q, \dot{q}) & C_{i_2}(q, \dot{q}) \\ C_{i_1}(q, \dot{q}) & C_{i_2}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{i_1} \\ \dot{q}_{i_2} \end{bmatrix} = \tau_i \end{aligned} \quad (41)$$

其中,  $H_{i_1}(q) = H_{i_2}(q) = m_{i_2}r_{i_2}^2 + m_{i_2}r_{i_1}r_{i_2}\cos(q_{i_2})$ ,  $H_{i_1}(q) = (m_{i_1} + m_{i_2})r_{i_1}^2 + m_{i_2}r_{i_2}^2 + 2m_{i_2}r_{i_1}r_{i_2}\cos(q_{i_2})$

+  $J_{i_1}$

$H_{i_2}(q) = m_{i_2}r_{i_2}^2 + J_{i_2}$ ,  $C_{i_1}(q, \dot{q}) = -m_{i_2}r_{i_1}r_{i_2}\sin(q_{i_2})\dot{q}_{i_1}$

$C_{i_2}(q, \dot{q}) = -2m_{i_2}r_{i_1}r_{i_2}\sin(q_{i_2})\dot{q}_{i_1}$ ,  $C_{i_1}(q, \dot{q}) = 0$ ,

$C_{i_2}(q, \dot{q}) = m_{i_2}r_{i_1}r_{i_2}\sin(q_{i_2})\dot{q}_{i_1}$ ,

$G_{i_1}(q) = (m_{i_1} + m_{i_2})gr_{i_1}\cos(q_{i_2}) + m_{i_2}gr_{i_2}\cos(q_{i_1} + q_{i_2})$

$G_{i_2}(q) = m_{i_2}gr_{i_2}\cos(q_{i_1} + q_{i_2})$ 。

$i = 1, 2, 3, 4$ ,  $m_{i_1}, m_{i_2}$  为关节质量,  $r_{i_1}, r_{i_2}$  为关节半径,  $J_{i_1}, J_{i_2}$  为关节转动惯量,  $g$  为重力加速度。

文中设计的针对多机械臂系统提出固定时间同步控制方法, 包含滑模面 (17)、控制器 (24) 及权值更新律 (27)。为了验证所提控制方法能够使系统的收敛时间不受初始值影响, 设置两组系统变量初始值, 利用 MATLAB 软件建立仿真模型并进行仿真分析。

系统参数选择设置为  $m_{i_1} = 0.3 \text{ kg}$ ,  $m_{i_2} = 0.5 \text{ kg}$ ,  $r_{i_1} = 0.2 \text{ m}$ ,  $r_{i_2} = 0.3 \text{ m}$ ,  $J_{i_1} = 0.05 \text{ kg} \cdot \text{m}$ ,  $J_{i_2} = 0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ; 控制参数设置为  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \gamma_1 = \frac{9}{7}, \gamma_2 = \frac{7}{9}, K_1 = \text{diag}(8), K_2 = \text{diag}(3), \rho_1 = \frac{11}{7}, \rho_2 = \frac{9}{11}, \Gamma = \text{diag}(10); \eta = 1, \eta_1 = 1$ ; 4 个机械臂关节角位置状态变量初始值  $I$  设置为:  $q_1(0) = [1.12, 1.22], q_2(0) = [1.15, 1.29], q_3(0) = [1.13, 1.23], q_4(0) = [1.17, 1.25]$ ; 初始值  $II$  设置为:  $q_1(0) = [2.12, 2.22], q_2(0) = [2.15, 2.29], q_3(0) = [2.13, 2.23], q_4(0) = [2.17, 2.25]$ ; 多机械臂系统每个关节的角位置跟踪参考信号为  $q_d = 0.5\sin(t)$ ; 仿真效果如图 2~5 所示。

#### 3.2 仿真实例分析

当系统变量初始值为  $I$  时, 系统仿真结构如图 2~4 所示。由图 2 可见, 多机械臂的每个关节的角位置跟踪误差收敛时间约为 1.8 秒, 误差收敛精度在  $10^{-3} \text{ rad}$ , 由此可见, 固定时间滑模控制方法能够实现较快的位置误差收敛速度

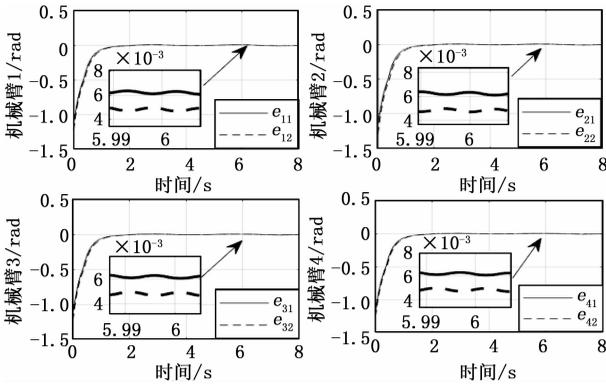


图 2 初始值 I 时多机械臂位置跟踪误差

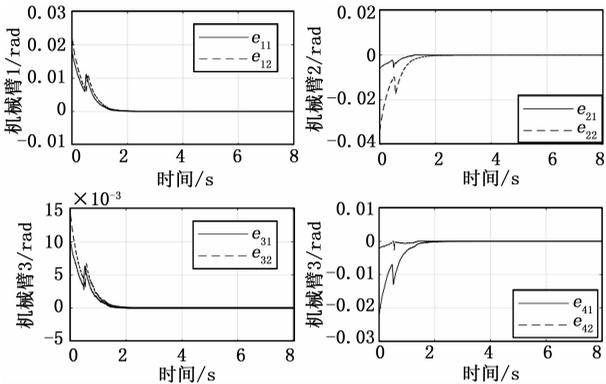


图 3 初始值 I 时多机械臂位置同步误差

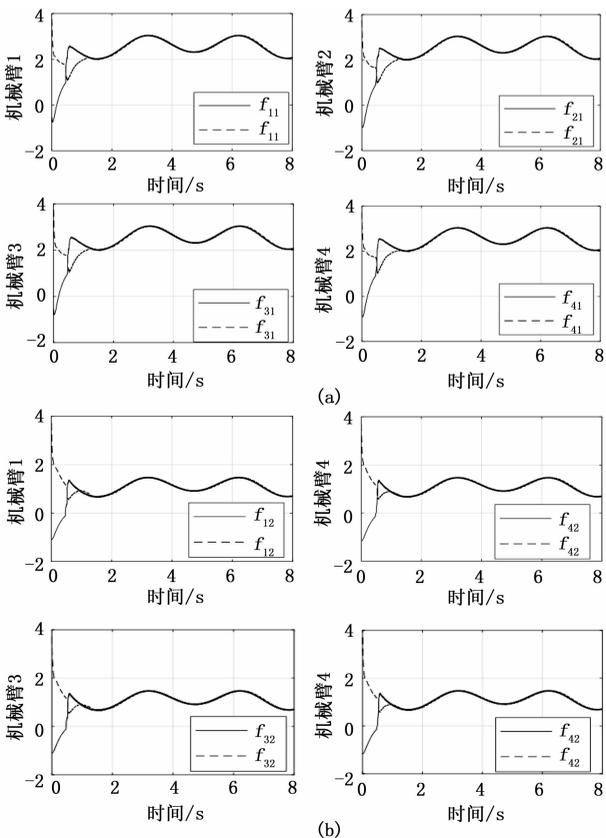


图 4 初始值 I 时神经网络逼近

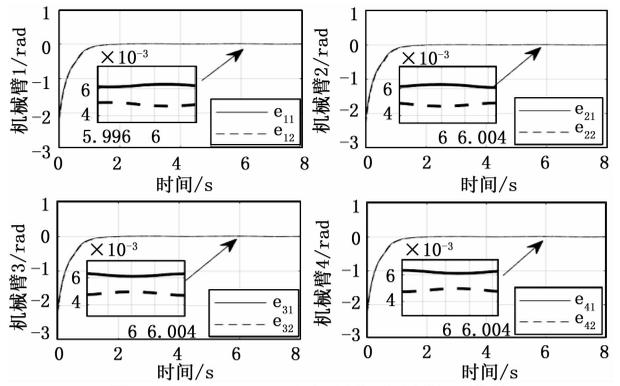


图 5 初始值 II 时多机械臂位置跟踪误差

和较高的误差收敛精度。由图 3 可见，系统同步误差收敛时间为 1.8 秒左右，由此可以看出文中所提的相邻交叉耦合同步控制策略的控制器具有较好的同步性能。为验证神经网络的函数逼近能力，仿真中给出了神经网络对未知动力学方程的跟踪估计曲线，如图 4 所示。从图中可以看出，神经网络在 1.6 s 左右准确跟踪到系统的未知模型，验证了神经网络算法良好的函数逼近能力。

为验证本文的所提方法的固定时间收敛的特性，针对系统初始位置变化的情况下，对比系统位置跟踪误差收敛时间是否改变。如图 5 所示，当系统状态初始变量设置为初始值 II 时，多机械臂的关节角位置跟踪误差收敛时间约为 1.8 秒。与初始值 I 时的收敛时间相比基本不变。仿真结果与文中定理 2 的证明结果保持一致，验证了固定时间控制方法中系统的收敛速度与系统初始状态无关，由此证明了上述所提方法的有效性。

### 4 结论

针对系统模型未知的多机械臂同步系统，提出一种基于神经网络的固定时间滑模控制方法。首先定义了相邻交叉耦合误差，并以此设计固定时间滑模面 and 控制器，从而实现多机械臂的位置同步误差和跟踪误差在固定时间内收敛到零。其次，设计 RBF 神经网络权值更新律，有效实现了对系统未知动力学模型的逼近，提高了控制性能。通过李雅普诺夫定理证明了系统位置跟踪误差与同步误差的固定时间收敛性能。最后，4 个机械臂控制系统的仿真结果表明，该控制方法收敛速度不受初始值影响。

### 参考文献:

[1] 梁骞旗, 米根锁. 基于干扰观测器的机械臂改进趋近律的滑模控制 [J]. 测控技术, 2019, 38 (1): 140 - 144.  
 [2] Smith C, Karayiannidis Y, Nalpantidis L, et al. Dual arm manipulation—A survey [J]. Robotics and Automations systems, 2012, 60 (10): 1340 - 1353.  
 [3] 伍玩秋. 自动化控制下机械手臂运动轨迹研究 [J]. 计算机测量与控制, 2017, 25 (6): 78 - 81.  
 [4] 赵东亚, 赵永瑞, 崔宝华, 等. 机械系统同步控制方法研究进展. 山东科技大学学报, 2013, 32 (3): 1 - 6.