

带有输入时滞的领导跟随系统扰动抑制一致性

杨仕斌, 陈 珺, 刘 飞

(江南大学 自动化研究所, 江苏 无锡 214122)

摘要: 针对一类受到外部干扰且有输入时滞的多智能体系统, 讨论了在固定有向拓扑下的领导跟随扰动抑制一致性问题; 首先, 对于存在外部干扰的多智能体系统, 给出分布式状态观测器, 使得每个智能体的系统状态和外部干扰被同时估计; 其次, 基于截取预测方法, 利用邻居智能体相对输出信息获得的状态估计和自身干扰估计为每个智能体设计一致性协议; 然后, 用 Lyapunov-Krasovskii 理论对系统的观测性和稳定性进行分析, 获得满足多智能体系统稳定的充分条件, 并将控制器增益和观测器增益求解转化为求解线性矩阵不等式 (LMIs) 的形式; 最后, 通过一个仿真例子来验证所得结果的可行性和有效性。

关键词: 多智能体系统; 领导跟随一致性; 输入时滞; 分布式状态观测器; 截取预测

Consensus Disturbance Rejection for Leader-following Multi-agent Systems with Input Delay

Yang Shibin, Chen Jun, Liu Fei

(Institute of Automation, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: The problem of the leader-follower consensus disturbance rejection under the directed network with fixed topology for a class of multi-agent systems with input delay and exogenous disturbances is discussed. Firstly, for the multi-agent systems with exogenous disturbances, a distributed state observer is given to estimate the state and disturbance simultaneously. Secondly, based on the truncated prediction approach, a consensus protocol is proposed for each agent by utilizing the estimated state and its own disturbance estimate information, which are obtained by using the relative output information between neighbors. Then sufficient conditions for the stability and the observability of the multi-agent systems are constructed by using Lyapunov-Krasovskii theory and the problem of solving feedback gain matrix and observer gain matrix are transformed into calculating linear matrix inequalities (LMIs). Finally, a simulation example is given to demonstrate the feasibility and effectiveness of the results.

Keywords: multi-agent systems; leader-follower; input delay; distributed state observer; truncated prediction

0 引言

近十年来, 多智能体系统协同控制问题越来越成为控制界关注的焦点, 这些系统在无人机编队协作, 多机器人协作, 卫星编队飞行, 传感器网络等方面得到广泛应用^[1-2]。其中, 多智能体系统领导跟随一致性问题作为一个重要的协同控制问题同样是学者们关注的热点, 其领导者不受跟随者影响, 且要求跟随者和领导者目标一致。文献 [3] 基于 M 矩阵理论进行一致性收敛分析, 讨论了采样数据框架下的一阶多智能体系统领导跟随一致性问题。文献 [4] 研究了一类二阶非线性多智能体系统的领导跟随一致性问题, 利用相邻智能体之间的相对信息给出分布式自适应非线性控制率。

事实上, 多智能体系统常常受到外部干扰的影响, 使得一致性问题变得更具挑战性。目前, H_∞ 鲁棒控制是最常见的处理干扰的方法, 对抑制干扰简单有效。文献 [5] 对存在干扰和模型不确定参数的二阶多智能体系统, 给出了鲁棒 H_∞ 一致性控制协议。文献 [6] 研究了存在干扰和模型不确定性的多时变时滞系统的鲁棒 H_∞ 一致性问题。文献 [7] 对不确定高阶多智能体系统, 讨论了满足 L_2-L_∞ 性能指标下的一致性。文献 [8] 针对一类有时滞的 Lipschitz 非线性多智能体系统, 设计动态输出反馈一致性协议使得多智能体系统满足 H_∞ 性能的平均一致性。然而实际工程问题中的干扰往往是周期性的, 对于这类干扰, 一个有效的方法是基于观测器的估计信息设计控制器来消除干扰。文献 [9] 基于干扰估计信息, 针对存在外部干扰的二阶多智能体系统, 提出了扰动抑制的一致性协议。文献 [10] 进一步研究了由外部非线性系统产生的干扰的二阶多智能体的一致性。文献 [11] 针对存在外部干扰的二阶多智能体系统, 给出了基于内模的自适应一致性协议。文献 [9-11] 都是不考虑系统存在时滞的情况下研究多智能体系统的扰动抑制一致性问题。然而一个实际的多智能体系统往往会伴随着时间的延迟, 时滞的存在会影响系统的性能, 甚至导致系统不稳定。文献 [12-13] 通过预测时滞期间状态

收稿日期: 2018-12-20; 修回日期: 2019-01-19。

基金项目: 国家自然科学基金项目(61403167)。

作者简介: 杨仕斌 (1994-), 男, 贵州毕节人, 硕士研究生, 主要从事多智能体协调控制方向的研究。

陈 珺 (1980-), 女, 江苏无锡人, 硕士生导师, 副教授, 主要从事模糊控制和智能控制方向的研究。

刘 飞 (1965-), 男, 江苏无锡人, 教授, 博士生导师, 主要从事先进控制、模型预测控制、智能控制和智能控制等方向的研究。

的变化来设计控制器, 解决了线性系统存在时滞的问题。针对文献 [12-13] 中设计的控制器包含过去控制输入积分的缺陷问题, 文献 [14-15] 做了相应的优化和改进, 并将该方法称为截取预测方法。文献 [16] 进一步用该方法解决了有输入时滞的 Lipschitz 非线性多智能体系统一致性问题。截取预测方法相对于传统的预测方法其优势在于设计的控制器中没有积分, 使得设计的控制器便于实现, 且能很好的弥补输入时滞造成影响, 是解决输入时滞比较实用有效的方法。

目前, 针对系统存在的外部干扰, 基于观测器干扰估计信息设计一致性协议已经做了大量的研究, 而同时考虑系统状态信息不可测且有输入时滞的研究比较缺乏。因此, 本文主要考虑状态信息不可测情况下, 研究有输入时滞且存在外部干扰的多智能体系统领导跟随一致性问题。主要利用邻居智能体相对输出信息, 给出能同时估计状态和干扰的观测器结构。然后发展了文献 [14-15] 中解决输入时滞的截取预测方法, 并根据邻居智能体相对输出信息获得的状态估计和干扰估计设计一致性协议, 其中, 控制协议中干扰估计的引入对外部干扰有很好的抑制作用。为保证系统稳定性, 除使用李雅普诺夫方法进行稳定性分析外, 同时考虑 Krasovskii 泛函处理系统存在的积分项, 给出描述闭环系统稳定性充分条件的线性矩阵不等式 (LMIs)。最后, 用一个仿真例子来验证所得结果的有效性。

1 预备知识

考虑一个领导跟随多智能体系统。选择有向通信拓扑图, 有向通信相比无向通信, 对实际智能体系统更具适用性。无向通信需满足双向通信, 而有向通信只需要满足单向通信即可, 使得智能体通信网络计算交换能力更低, 可以大大简化系统复杂度, 也能节约系统成本。定义跟随者之间有向通信图 $G = (\nu, \epsilon)$, 其中 $\nu = \{1, 2, \dots, N\}$ 表示节点集合, ϵ 表示边的集合, 与 G 有关的邻接矩阵定义为 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in R^{N \times N}$, 其中 $a_{ii} = 0$; 当 $(i, j) \in \epsilon$ 时, $a_{ij} > 0$; 否则 $a_{ij} = 0$ 。 $N_i = \{j: (i, j) \in \epsilon\}$ 表示跟随者节点 i 所有邻接点集合。该多智能体系统入度矩阵表示为 $\mathbf{D}_m = \text{diag}\{d_m(1), d_m(2), \dots, d_m(N)\}$, 则图 G 的拉普拉斯矩阵定义为 $\mathbf{L} = \mathbf{D}_m - \mathbf{A}$ 。智能体系统中有领导者, 领导者只能单向传输信息给跟随者, 而跟随者只能接受不能传输信息给领导者。定义一个对角矩阵 $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_N)$, 其中, 如果领导者是跟随者的邻居, 则 $d_i > 0$, 否则 $d_i = 0$ 。定义领导者与跟随者的通信图为 \hat{G} 以及矩阵 $\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{D}$ 。

引理 1^[17]: 0 是拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 的一个特征值, 1 作为对应的右特征向量满足 $\mathbf{L}_1 = 0$ 。矩阵 \mathbf{L} 其余特征值均有非负实部。

引理 2^[15]: 存在一个正定矩阵 \mathbf{P} , 并且 $x \in [\lambda_1, \lambda_2] \rightarrow R^n, \lambda_1, \lambda_2 \in R$ 且 $\lambda_2 > \lambda_1$, 使得下列不等式成立:

$$\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathbf{x}^T(\tau) d\tau\right) \mathbf{P} \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathbf{x}(\tau) d\tau\right) \leq$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathbf{x}^T(\tau) \mathbf{P} \mathbf{x}(\tau) d\tau\right) \quad (1)$$

引理 3^[15]: 存在一个正定矩阵 \mathbf{P} , 使得下列等式成立:

$$e^{A^T t} \mathbf{P} e^{At} - e^{at} \mathbf{P} = -e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} e^{A^T \tau} \mathbf{S} e^{A\tau} d\tau \quad (2)$$

其中:

$$\mathbf{S} = -\mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A} + \omega \mathbf{P}$$

如果 \mathbf{S} 是正定的, 则满足:

$$e^{A^T t} \mathbf{P} e^{At} < e^{at} \mathbf{P} \quad (3)$$

引理 4^[18]: 根据有向拓扑图信息, 满足矩阵 \mathbf{M} 是一个非奇异 M-矩阵, 其所有特征值均有正实部, 同时存在一个对角矩阵 $\boldsymbol{\theta} = \text{diag}\{\theta_1, \dots, \theta_n\} > 0$ 满足 $\boldsymbol{\theta} \mathbf{M} + \mathbf{M}^T \boldsymbol{\theta} > 0$ 。

2 问题描述

考虑由 N 个跟随者和 1 个领导者组成的有输入时滞且有外部干扰的多智能体系统, 跟随者 i 的动力学方程描述为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}_i(t-h) + \mathbf{B}_f \mathbf{f}_i(t), \\ \mathbf{y}_i(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}_i(t), i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $h > 0$ 表示每个智能体输入时滞。 $\mathbf{x}_i(t) \in R^n, \mathbf{u}_i(t) \in R^q$ 和 $\mathbf{y}_i(t) \in R^r$ 分别表示第 i 个跟随者系统状态, 系统控制输入和可测量输出, 矩阵 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B}_f, \mathbf{C})$ 是已知常系数矩阵。假设系统参数 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 是可控且可观的。 $\mathbf{f}_i(t) \in R^q$ 是外部线性系统产生的干扰, 其动力学方程满足如下形式:

$$\dot{\mathbf{f}}_i(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{f}_i(t) \quad (5)$$

其中: 常系数矩阵 \mathbf{A}_1 是外线性系统干扰的参数, 并且是已知的。

注 1: 外部线性系统产生的干扰在实际工程中是普遍存在的, 对系统的稳定性有极大挑战性, 因此, 研究这类外部干扰有重要的实际意义。同时, 外部线性系统产生的干扰大多满足式 (5) 的形式, 例如, 文献 [19] 中提到的未知常数扰动以及未知相位和幅值的谐波扰动等均可以描述成式 (5) 的形式, 从而可以将这些外部干扰归纳为一类干扰进行研究。

针对本系统中的外部干扰, 采用补偿的原理对干扰抑制, 从而实现多智能体系统一致性。首先, 考虑到传感器不能精确测量外部干扰信号, 根据邻居智能体相对输出信息用分布式观测器对外部干扰实时估计。其次, 运用前馈控制的思想, 将外部干扰实时估计值设计一致性协议实现对外部干扰的补偿。

领导者的动力学方程描述为:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_0(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}_0(t), \\ \mathbf{y}_0(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}_0(t) \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $\mathbf{x}_0(t) \in R^n, \mathbf{y}_0(t) \in R^r$ 分别表示领导者的系统状态和输出。

假设 1: 每个跟随者智能体伴随的外部干扰 $\mathbf{f}_i(t)$ 以及导数 $\dot{\mathbf{f}}_i(t)$ 均是有界的。

定义 1: 对于每一个跟随者智能体, 如果设计的扰动抑

制一致性协议 $u_i(t)$ 使得该系统在任何初始条件下均满足:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t)\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

则解决了领导跟随一致性问题。

3 主要结果

3.1 分布式观测器设计

考虑到系统状态信息未知以及外部干扰不能被传感器精准测量, 利用邻居智能体相对输出信息, 给出同时观测状态和外部干扰的分布式观测器:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_i(t) &= \mathbf{A}\hat{x}_i(t) + \mathbf{B}u_i(t-h) + \mathbf{B}_f\hat{f}_i(t) + \mathbf{L}_1v_i(t), \\ \dot{\hat{f}}_i(t) &= \mathbf{A}_1\hat{f}_i(t) + \mathbf{L}_2v_i(t) \end{aligned} \quad (7)$$

其中:

$$v_i(t) = (\alpha \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\tilde{y}_j(t) - \tilde{y}_i(t)) + ad\tilde{y}_i(t))$$

定义状态估计误差 $\boldsymbol{\varepsilon}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \hat{\mathbf{x}}_i(t)$ 和干扰估计误差 $\boldsymbol{\delta}_i(t) = \mathbf{f}_i(t) - \hat{\mathbf{f}}_i(t)$, 结合式 (4) 和式 (7), 得到:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(t) &= \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i(t) - \mathbf{L}_1\mathbf{C}v_i(t) + \mathbf{B}_f\boldsymbol{\delta}_i(t), \\ \dot{\boldsymbol{\delta}}_i(t) &= \mathbf{A}_1\boldsymbol{\delta}_i(t) - \mathbf{L}_2\mathbf{C}v_i(t) \end{aligned} \quad (8)$$

其中:

$$v_i(t) = (\alpha \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}_j(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)) + ad\boldsymbol{\varepsilon}_i(t))$$

令 $\boldsymbol{\mu}_i(t) = [\boldsymbol{\varepsilon}_i^T(t) \quad \boldsymbol{\delta}_i^T(t)]^T$, $\boldsymbol{\mu}_j(t) = [\mathbf{v}_j^T(t) \quad \boldsymbol{\delta}_j^T(t)]^T$, 式 (8) 被组合成如下增广形式:

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}_i(t) = \bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\mu}_i(t) - \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}_j(t) \quad (9)$$

其中:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_f \\ 0 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}} = [\mathbf{C} \quad 0]$$

3.2 一致性协议

定义协同误差 $\boldsymbol{\eta}_i(t) = x_i(t) - x_0(t)$, 结合式 (4) 和 (6), 得到如下形式:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_i(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_i(t) + \mathbf{B}u_i(t-h) + \mathbf{B}_f\mathbf{f}_i(t) \quad (10)$$

根据式 (5) 有 $\mathbf{f}_i(t) = e^{\mathbf{A}_1 h}\mathbf{f}_i(t-h)$, 根据协同误差式 (10) 可得:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_i(t) &= e^{\mathbf{A}t}\boldsymbol{\eta}_i(t-h) + \\ &\int_{t-h}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}(\mathbf{B}u_i(\tau-h) + \mathbf{B}_f\mathbf{f}_i(\tau))d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

每个智能体处理信息时, 反应时间, 计算速度等都会导致输入时滞的存在, 时滞的存在会影响系统的性能, 本文用预测状态的方法解决时滞。类似文献[14-15]中的截取预测方法, 利用式 (8) 估计的状态和干扰信息设计如下一致性协议:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= -\gamma d\mathbf{K}e^{\mathbf{A}h}(\hat{\mathbf{x}}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)) + \\ &\gamma\mathbf{K}e^{\mathbf{A}h} \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(\hat{\mathbf{x}}_j(t) - \hat{\mathbf{x}}_i(t)) - \mathbf{F}e^{\mathbf{A}_1 h}\hat{\mathbf{f}}_i(t) \end{aligned} \quad (12)$$

其中: γ 是耦合强度参数, \mathbf{K} 是反馈增益矩阵, \mathbf{F} 是已知矩阵。

3.3 一致性分析

将控制协议式 (12) 和式 (11) 代入式 (10) 中, 结

合估计误差 $\boldsymbol{\varepsilon}_i(t)$ 和 $\boldsymbol{\delta}_i(t)$, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i(t) &= \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_i(t) - \gamma\mathbf{B}d\mathbf{K}\boldsymbol{\eta}_i(t) + \\ &\gamma\mathbf{B}d\mathbf{K}e^{\mathbf{A}h}\boldsymbol{\varepsilon}_i(t-h) + \mathbf{B}_f e^{\mathbf{A}_1 h}\boldsymbol{\delta}_i(t-h) - \\ &\gamma\mathbf{B}\mathbf{K} \sum_{j=1}^N l_{ij}\boldsymbol{\eta}_j(t) + \gamma\mathbf{B}d\mathbf{K}e^{\mathbf{A}h} \sum_{j=1}^N l_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}_j(t-h) + \\ &\gamma\mathbf{B}\mathbf{K} \sum_{j=1}^N l_{ij} \int_{t-h}^t e^{\mathbf{A}(\tau-t)}(\mathbf{B}u_j(\tau-h) + \mathbf{B}_f\mathbf{f}_j(\tau))d\tau + \\ &\gamma\mathbf{B}d\mathbf{K} \int_{t-h}^t e^{\mathbf{A}(\tau-t)}(\mathbf{B}u_i(\tau-h) + \mathbf{B}_f\mathbf{f}_i(\tau))d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

令 $\boldsymbol{\mu}(t) = [\boldsymbol{\mu}^T(t), \dots, \boldsymbol{\mu}^T(t)]^T$ 和 $\boldsymbol{\eta}(t) = [\boldsymbol{\eta}_1^T(t), \dots, \boldsymbol{\eta}_N^T(t)]^T$, 运用 Kronecker 积, 估计误差 (9) 和协同误差 (13) 分别表示为:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) &= (\mathbf{I}_N \otimes \bar{\mathbf{A}})\boldsymbol{\mu}(t) - \alpha(\mathbf{M} \otimes \bar{\mathbf{L}}\mathbf{C})\boldsymbol{\mu}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\boldsymbol{\eta}(t) - \gamma(\mathbf{M} \otimes \mathbf{B}\mathbf{K})\boldsymbol{\eta}(t) + \\ &\gamma(\mathbf{M} \otimes \mathbf{B}\mathbf{K}e^{\mathbf{A}h})\boldsymbol{\varepsilon}(t-h) + \gamma(\mathbf{M} \otimes \mathbf{B}\mathbf{K})\boldsymbol{\Lambda} + \\ &(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_f e^{\mathbf{A}_1 h})\boldsymbol{\delta}(t-h) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{其中: } \boldsymbol{\Lambda} = \int_{t-h}^t (\mathbf{I}_N \otimes e^{\mathbf{A}(\tau-t)}(\mathbf{B}u(\tau-h) + \mathbf{B}_f e^{\mathbf{A}_1 h}\mathbf{f}(\tau)))d\tau.$$

矩阵 $\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{D}$ 在预备知识部分有定义, 同时有 $\mathbf{B}_f = \mathbf{B}\mathbf{F}$. 结合式 (12), 估计误差 $\boldsymbol{\varepsilon}_i(t)$ 和 $\boldsymbol{\delta}_i(t)$, $\boldsymbol{\Lambda}$ 等价于:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda} &= \boldsymbol{\Lambda}^+ \boldsymbol{\Lambda}^2 + \boldsymbol{\Lambda}^3 = \\ &\int_{t-h}^t -\gamma(\mathbf{I}_N \otimes e^{\mathbf{A}(\tau-t)}\mathbf{B})(\mathbf{M} \otimes \mathbf{K}e^{\mathbf{A}h})\boldsymbol{\eta}(\tau-h)d\tau + \\ &\int_{t-h}^t \gamma(\mathbf{I}_N \otimes e^{\mathbf{A}(\tau-t)}\mathbf{B})(\mathbf{M} \otimes \mathbf{K}e^{\mathbf{A}h})\boldsymbol{\varepsilon}(\tau-h)d\tau + \\ &\int_{t-h}^t (\mathbf{I}_N \otimes e^{\mathbf{A}(\tau-t)}\mathbf{B}_f e^{\mathbf{A}_1 h})\boldsymbol{\delta}(\tau-h)d\tau \end{aligned} \quad (16)$$

引理 5^[20]: 系统 (4) 中 (\mathbf{A}, \mathbf{C}) 是能观测的, 为保证增广误差式 (9) 的稳定性, $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{C}})$ 满足可观测的。

定理 1: 考虑由一个领导者和 N 个跟随者构成的有输入时滞且有外部干扰的线性多智能体系统。如果存在对称正定矩阵 \mathbf{P}_1 和 \mathbf{P}_2 , 令 $\mathbf{X} = \mathbf{P}_2^{-1}$, 参数 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \gamma, \alpha, \omega, \omega_1, \pi_1 > 0$, 使得下列条件成立:

$$\pi_1 \mathbf{X} \geq \mathbf{B}\mathbf{B}^T \quad (17)$$

$$\mathbf{X}(\mathbf{A} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbf{I})^T + (\mathbf{A} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbf{I})\mathbf{X} < 0 \quad (18)$$

$$(\mathbf{A} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1\mathbf{I})^T + (\mathbf{A} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1\mathbf{I}) < 0 \quad (19)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^T\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1\bar{\mathbf{A}} - 2\alpha\bar{\mathbf{C}}^T\bar{\mathbf{C}} < 0 \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X} & -c^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

其中:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{X} +$$

$$(k_1 - \lambda_1\boldsymbol{\gamma}\theta_{\max}^{-1})\mathbf{B}\mathbf{B}^T + (k_2 + 2k_3 + k_4)\mathbf{I},$$

$$c = \theta_{\min}^{-1}\theta_{\max}k_3^{-1}\pi_1^4 h\gamma^4 e^{2\omega_1 h} \|\mathbf{M}\|_F^4$$

则在控制协议式 (12) 作用下, 多智能体系统的领导跟随一致性问题的得到解决。这里: $\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{P}_1^{-1}\bar{\mathbf{C}}^T$, $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T\mathbf{P}_2$ 。

证明: 考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) =$$

$$\boldsymbol{\mu}^T(t)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}_1)\boldsymbol{\mu}(t) + \boldsymbol{\zeta}^T(t)(\boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{P}_2)\boldsymbol{\eta}(t)$$

这里: ζ 是一个较小的正实数。

根据式 (14), 对 $V_1(t)$ 两边求导得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= 2\boldsymbol{\mu}^T(t)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}_1) \\ &[(\mathbf{I}_N \otimes \bar{\mathbf{A}})\boldsymbol{\mu}(t) - \alpha(\mathbf{M} \otimes \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}})\boldsymbol{\mu}(t)] \leq \\ &\boldsymbol{\mu}^T(t)(\mathbf{I}_N \otimes (\bar{\mathbf{A}}^T\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1\bar{\mathbf{A}} - 2\alpha\bar{\mathbf{C}}^T\bar{\mathbf{C}}))\boldsymbol{\mu}(t) \end{aligned} \quad (22)$$

其中: $\lambda = \lambda_{\min} \operatorname{Re}(\mathbf{M}), \bar{\mathbf{L}} = \mathbf{P}_1^{-1}\bar{\mathbf{C}}^T$ 。

根据式 (15), 对 $V_2(t)$ 两边求导得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= 2\boldsymbol{\eta}^T(t)(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{P}_2)[(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A})\boldsymbol{\eta}(t) - \\ &\gamma(\mathbf{M} \otimes \mathbf{BK})\boldsymbol{\eta}(t) + \gamma(\mathbf{M} \otimes \mathbf{BK}e^{A_h})\boldsymbol{\varepsilon}(t-h) + \\ &\gamma(\mathbf{M} \otimes \mathbf{BK})\boldsymbol{\Delta} + (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_j e^{A_j h})\boldsymbol{\delta}(t-h)] \leq \\ &\boldsymbol{\eta}^T(t)(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\theta} \otimes (\mathbf{A}^T\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2\mathbf{A} - \lambda_1\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\theta}_{\max}^{-1}\mathbf{P}_2\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_2))\boldsymbol{\eta}(t) + \\ &2\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\eta}^T(t)(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{P}_2)(\mathbf{M} \otimes \mathbf{BK}e^{A_h})\boldsymbol{\varepsilon}(t-h) + \\ &2\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\eta}^T(t)(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{P}_2)(\mathbf{M} \otimes \mathbf{BK})(\boldsymbol{\Delta}_1 + \boldsymbol{\Delta}_2 + \boldsymbol{\Delta}_3) + \\ &2\boldsymbol{\eta}^T(t)(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{P}_2)(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}_j e^{A_j h})\boldsymbol{\delta}(t-h) \leq \\ &\boldsymbol{\eta}^T(t)(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\theta} \otimes ((\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4)\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2 + \\ &\mathbf{A}^T\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2\mathbf{A} + (\kappa_1 - \lambda_1\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\theta}_{\max}^{-1})\mathbf{P}_2\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_2))\boldsymbol{\eta}(t) + \\ &\boldsymbol{\varepsilon}^T(t-h)(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{I}_N \otimes \kappa_1^{-1}\lambda_2\boldsymbol{\gamma}^2\pi_1 e^{A_h}\mathbf{P}_2)\boldsymbol{\varepsilon}(t-h) + \\ &\boldsymbol{\delta}^T(t-h)(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{I}_N \otimes \kappa_2^{-1}\boldsymbol{\theta}_{\max}\pi_2 e^{\pi_3 h}\mathbf{I})\boldsymbol{\delta}(t-h) + \\ &\boldsymbol{\zeta}\kappa_3^{-1}\boldsymbol{\theta}_{\max} \|\gamma(\mathbf{M} \otimes \mathbf{BK})\boldsymbol{\Delta}_1\|^2 + \\ &\boldsymbol{\zeta}\kappa_3^{-1}\boldsymbol{\theta}_{\max} \|\gamma(\mathbf{M} \otimes \mathbf{BK})\boldsymbol{\Delta}_2\|^2 + \\ &\boldsymbol{\zeta}\kappa_4^{-1}\boldsymbol{\theta}_{\max} \|\gamma(\mathbf{M} \otimes \mathbf{BK})\boldsymbol{\Delta}_3\|^2 \end{aligned} \quad (23)$$

这里, $\lambda_1 = \lambda_{\min}(\mathbf{M}^T\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\mathbf{M}), \lambda_2 = \lambda_{\max}(\mathbf{M}^T\boldsymbol{\theta}\mathbf{M}), \mathbf{K} = \mathbf{B}^T\mathbf{P}_2, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ 均是正实数, 存在正实数 π_1, π_2 和 π_3 分别满足:

$$\pi_1 \mathbf{I} \geq \mathbf{P}_2^{1/2} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_2^{1/2} \quad (24)$$

$$\pi_2 > \lambda_{\max}(\mathbf{B}_j^T \mathbf{B}_j) \quad (25)$$

$$\pi_3 > \lambda_{\max}(\mathbf{A}_j^T + \mathbf{A}_j) \quad (26)$$

由引理 3 可得, 这里存在一个正实数 ω 满足: $e^{A^T} \mathbf{P}_2 e^{A_h} < e^{\omega h} \mathbf{P}_2$ 。矩阵 \mathbf{S} 表示为:

$$\mathbf{S} = -\mathbf{A}^T \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_2 \mathbf{A} + \omega \mathbf{P}_2 > 0 \quad (27)$$

令 $\|\Delta_1\|^2 = \|\mathbf{N}\|^2 = \|\gamma(\mathbf{M} \otimes \mathbf{BK})\boldsymbol{\Delta}_1\|^2$, 结合式 (16) 中的 $\boldsymbol{\Delta}_1$ 可得:

$$\mathbf{N}_i = \boldsymbol{\gamma} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_2 \sum_{j=1}^N m_{ij} \int_{t-h}^t -\boldsymbol{\gamma} e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_2 e^{A_h} \sum_{k=1}^N m_{jk} \boldsymbol{\eta}_k(\tau-h) d\tau$$

同时有:

$$\|\mathbf{N}_i\|^2 = \boldsymbol{\gamma}^4 \sum_{j=1}^N m_{ij}^2 \int_{t-h}^t (e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_2 e^{A_h} \sum_{k=1}^N m_{jk} \boldsymbol{\eta}_k(\tau-h))^T d\tau$$

$$\mathbf{P}_2 \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_2 \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_2 e^{A_h} \sum_{k=1}^N m_{jk} \boldsymbol{\eta}_k(\tau-h) d\tau$$

结合引理 2 和引理 3 以及式 (24), 有:

$$\|\mathbf{N}_i\|^2 \leq h\boldsymbol{\gamma}^4 \pi_1^2 \sum_{j=1}^N m_{ij}^2 \sum_{k=1}^N m_{jk}^2 \int_{t-h}^t \boldsymbol{\eta}_k^T(\tau-h) e^{A^T h}$$

$$\mathbf{P}_2 \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{A^T(t-\tau)} e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_2 e^{A_h} \boldsymbol{\eta}_k(\tau-h) d\tau \leq$$

$$h\boldsymbol{\gamma}^4 \pi_1^4 \sum_{j=1}^N m_{ij}^2 \sum_{k=1}^N m_{jk}^2 e^{2\omega_1 h} \int_{t-h}^t \boldsymbol{\eta}_k^T(\tau-h) \boldsymbol{\eta}_k(\tau-h) d\tau \leq$$

$$h\boldsymbol{\gamma}^4 \pi_1^4 \|\mathbf{m}_i\|^2 \|\mathbf{M}\|_F^2 e^{2\omega_1 h} \int_{t-h}^t \boldsymbol{\eta}^T(\tau-h) \boldsymbol{\eta}(\tau-h) d\tau,$$

$$\|\Delta_1\|^2 = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{N}_i\|^2 = \|\gamma(\mathbf{M} \otimes \mathbf{BK})\boldsymbol{\Delta}_1\|^2 \leq$$

$$\sigma_1 \int_{t-h}^t \boldsymbol{\eta}^T(\tau-h) \boldsymbol{\eta}(\tau-h) d\tau \quad (28)$$

其中: $\sigma_1 = h\boldsymbol{\gamma}^4 \pi_1^4 \|\mathbf{M}\|_F^2 e^{2\omega_1 h}$, $\|\mathbf{M}\|_F$ 是 Frobeniu 范数。由引理 3 知, 令 $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, 存在一个正实数 ω_1 满足: $e^{A^T h} \mathbf{I} e^{A_h} < e^{\omega_1 h} \mathbf{I}$, 矩阵 \mathbf{S}_1 表示为:

$$\mathbf{S}_1 = -\mathbf{A}^T - \mathbf{A} + \omega_1 \mathbf{I} > 0 \quad (29)$$

令 $\|\Delta_2\|^2 = \|\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{M} \otimes \mathbf{BK})\boldsymbol{\Delta}_2\|^2$, 因积分项 $\boldsymbol{\Delta}_2$ 处理方法和积分项 $\boldsymbol{\Delta}_1$ 一致, 证明略, 直接给出:

$$\begin{aligned} \|\Delta_2\|^2 &= \|\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{M} \otimes \mathbf{BK})\boldsymbol{\Delta}_2\|^2 \leq \\ &\sigma_2 \int_{t-h}^t \boldsymbol{\varepsilon}^T(\tau-h) \boldsymbol{\varepsilon}(\tau-h) d\tau \end{aligned} \quad (30)$$

其中: $\sigma_2 = h\boldsymbol{\gamma}^4 \pi_1^4 \|\mathbf{M}\|_F^2 e^{2\omega_2 h}$ 。

令 $\|\Delta_3\|^2 = \|\mathbf{L}\|^2 = \|\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{M} \otimes \mathbf{BK})\boldsymbol{\Delta}_3\|^2$, 结合式 (15) 中的 $\boldsymbol{\Delta}_3$ 可得:

$$\mathbf{L}_i = \boldsymbol{\gamma} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_2 \sum_{j=1}^N m_{ij} \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}_j e^{A_j h} \boldsymbol{\delta}_j(\tau-h) d\tau$$

同时有:

$$\|\mathbf{L}_i\|^2 = \boldsymbol{\gamma}^2 \sum_{j=1}^N m_{ij}^2 \int_{t-h}^t (e^{A(t-\tau)} e^{A_j h} \boldsymbol{\delta}_j(\tau-h))^T d\tau$$

$$\mathbf{P}_2 \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_2 \int_{t-h}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}_j e^{A_j h} \boldsymbol{\delta}_j(\tau-h) d\tau$$

结合引理 2 和引理 3 以及式 (24~26), 有:

$$\|\mathbf{L}_i\|^2 \leq h\boldsymbol{\gamma}^2 \pi_1^2 \sum_{j=1}^N m_{ij}^2 \int_{t-h}^t \boldsymbol{\delta}_j^T(\tau-h) e^{A_j^T h} \mathbf{B}_j^T$$

$$e^{A^T(t-\tau)} e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}_j e^{A_j h} \boldsymbol{\delta}_j(\tau-h) d\tau \leq$$

$$h\boldsymbol{\gamma}^2 \pi_1^2 \pi_2 \sum_{j=1}^N m_{ij}^2 e^{(\omega_1 + \pi_1)h} \int_{t-h}^t \boldsymbol{\delta}_j^T(\tau-h) \boldsymbol{\delta}_j(\tau-h) d\tau \leq$$

$$h\boldsymbol{\gamma}^2 \pi_1^2 \pi_2^2 \|\mathbf{m}_i\|^2 e^{(\omega_1 + \pi_1)h} \int_{t-h}^t \boldsymbol{\delta}^T(\tau-h) \boldsymbol{\delta}(\tau-h) d\tau,$$

$$\|\Delta\|^2 = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{L}_i\|^2 = \|\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{M} \otimes \mathbf{BK})\boldsymbol{\Delta}_3\|^2 \leq$$

$$\sigma_3 \int_{t-h}^t \boldsymbol{\delta}^T(\tau-h) \boldsymbol{\delta}(\tau-h) d\tau \quad (31)$$

其中: $\sigma_3 = \boldsymbol{\gamma}^2 h \pi_1^2 \pi_2 e^{(\omega_1 + \pi_1)h} \|\mathbf{M}\|_F^2$ 。

结合式 (23)、(28)、(30) 以及式 (31), 式 (23) 重构为:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &\leq \boldsymbol{\eta}^T(t)(\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\theta} \otimes (\mathbf{A}^T\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2\mathbf{A} + \\ &(\kappa_1 - \lambda_1\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\theta}_{\max}^{-1})\mathbf{P}_2\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_2 + (\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4)\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2))\boldsymbol{\eta}(t) + \\ &\boldsymbol{\varepsilon}^T(t-h)(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{I}_N - \otimes k_1^{-1}\lambda_2\boldsymbol{\gamma}^2\pi_1 e^{A_h}\mathbf{P}_2)\boldsymbol{\varepsilon}(t-h) + \\ &\boldsymbol{\delta}^T(t-h)(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{I}_N - \otimes k_2^{-1}\boldsymbol{\theta}_{\max}\pi_2 e^{\pi_3 h}\mathbf{I})\boldsymbol{\delta}(t-h) + \\ &\boldsymbol{\zeta}\kappa_3^{-1}\boldsymbol{\theta}_{\max}\sigma_1 \int_{t-h}^t \boldsymbol{\eta}^T(\tau-h) \boldsymbol{\eta}(\tau-h) d\tau + \\ &\boldsymbol{\zeta}\kappa_3^{-1}\boldsymbol{\theta}_{\max}\sigma_2 \int_{t-h}^t \boldsymbol{\varepsilon}^T(\tau-h) \boldsymbol{\varepsilon}(\tau-h) d\tau + \\ &\boldsymbol{\zeta}\kappa_4^{-1}\boldsymbol{\theta}_{\max}\sigma_3 \int_{t-h}^t \boldsymbol{\delta}^T(\tau-h) \boldsymbol{\delta}(\tau-h) d\tau \end{aligned} \quad (32)$$

根据文献 [15], 对于第一个积分项 (28), 考虑如下 Krasovskii 函数:

$$Z_1(t) = e^{\int_{t-h}^t} \boldsymbol{\eta}^T(\tau) \boldsymbol{\eta}(\tau) d\tau +$$

$$e^{\int_{t-h}^t} e^{-\tau} \boldsymbol{\eta}^T(\tau-h) \boldsymbol{\eta}(\tau-h) d\tau$$

进一步对 $Z_1(t)$ 求导得到:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1(t) = & -e^h \int_{t-h}^t e^{-\tau} \boldsymbol{\eta}^T(\tau-h) \boldsymbol{\eta}(\tau-h) d\tau + \\ & e^h \|\boldsymbol{\eta}(t)\|^2 - \|\boldsymbol{\eta}(t-2h)\|^2 \leq \\ & - \int_{t-h}^t \boldsymbol{\eta}^T(\tau-h) \boldsymbol{\eta}(\tau-h) d\tau + e^h \|\boldsymbol{\eta}(t)\|^2 \end{aligned} \quad (33)$$

对于第二个积分项 (30), 考虑如下 Krasovskii 函数:

$$\begin{aligned} Z_2(t) = & e^h \int_{t-h}^t e^{-\tau} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\tau) \boldsymbol{\varepsilon}(\tau) d\tau + \\ & e^h \int_{t-h}^t \boldsymbol{\varepsilon}^T(\tau-h) \boldsymbol{\varepsilon}(\tau-h) d\tau \end{aligned}$$

进一步对 $Z_2(t)$ 求导得到:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_2(t) = & -e^h \int_{t-h}^t e^{-\tau} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\tau-h) \boldsymbol{\varepsilon}(\tau-h) d\tau + \\ & + e^h \|\boldsymbol{\varepsilon}(t)\|^2 - \|\boldsymbol{\varepsilon}(t-2h)\|^2 \leq \\ & - \int_{t-h}^t \boldsymbol{\varepsilon}^T(\tau-h) \boldsymbol{\varepsilon}(\tau-h) d\tau + e^h \|\boldsymbol{\varepsilon}(t)\|^2 \end{aligned} \quad (34)$$

对于第三个积分项 (31), 考虑如下 Krasovskii 函数:

$$\begin{aligned} Z_3(t) = & e^h \int_{t-h}^t e^{-\tau} \boldsymbol{\delta}^T(\tau) \boldsymbol{\delta}(\tau) d\tau + \\ & e^h \int_{t-h}^t \boldsymbol{\delta}^T(\tau-h) \boldsymbol{\delta}(\tau-h) d\tau \end{aligned}$$

进一步对 $Z_3(t)$ 求导得到:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_3(t) = & -e^h \int_{t-h}^t e^{-\tau} \boldsymbol{\delta}^T(\tau-h) \boldsymbol{\delta}(\tau-h) d\tau + \\ & e^h \|\boldsymbol{\delta}(t)\|^2 - \|\boldsymbol{\delta}(t-2h)\|^2 \leq \\ & - \int_{t-h}^t \boldsymbol{\delta}^T(\tau-h) \boldsymbol{\delta}(\tau-h) d\tau + e^h \|\boldsymbol{\delta}(t)\|^2 \end{aligned} \quad (35)$$

对于式 (32) 中没有积分的时滞项 $\boldsymbol{\varepsilon}(\tau-h)$, 构造如下 Krasovskii 函数:

$$Z_4(t) = \int_{t-h}^t \boldsymbol{\varepsilon}^T(\tau) \zeta \mathbf{I}_N \otimes k_1^{-1} \lambda_2 \gamma^2 \pi_1 e^{o_h} \mathbf{P}_2 \boldsymbol{\varepsilon}(\tau) d\tau$$

进一步对 $Z_4(t)$ 求导得到:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_4(t) = & \boldsymbol{\varepsilon}^T(t) (\zeta \mathbf{I}_N \otimes k_1^{-1} \lambda_2 \gamma^2 \pi_1 e^{o_h} \mathbf{P}_2) \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \\ & \boldsymbol{\varepsilon}^T(t-h) (\zeta \mathbf{I}_N \otimes k_1^{-1} \lambda_2 \gamma^2 \pi_1 e^{o_h} \mathbf{P}_2) \boldsymbol{\varepsilon}(t-h) \end{aligned} \quad (36)$$

对于式 (32) 中没有积分的时滞项 $\boldsymbol{\delta}(\tau-h)$, 构造如下 Krasovskii 函数:

$$Z_5(t) = \int_{t-h}^t \boldsymbol{\delta}^T(\tau) (\zeta \mathbf{I}_N \otimes k_2^{-1} \theta_{\max} \pi_2 e^{\pi_2 h} \mathbf{I}) \boldsymbol{\delta}(\tau) d\tau$$

进一步对 $Z_5(t)$ 求导得到:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_5(t) = & \boldsymbol{\delta}^T(t) (\zeta \mathbf{I}_N \otimes k_2^{-1} \theta_{\max} \pi_2 e^{\pi_2 h} \mathbf{I}) \boldsymbol{\delta}(t) - \\ & \boldsymbol{\delta}^T(t-h) (\zeta \mathbf{I}_N \otimes k_2^{-1} \theta_{\max} \pi_2 e^{\pi_2 h} \mathbf{I}) \boldsymbol{\delta}(t-h) \end{aligned} \quad (37)$$

重构新的 Lyapunov 函数为:

$$\begin{aligned} V_3(t) = & V(t) + \zeta k_3^{-1} \theta_{\max} Z_1(t) + \zeta k_3^{-1} \theta_{\max} Z_2(t) + \\ & \zeta k_4^{-1} \theta_{\max} Z_3(t) + Z_4(t) + Z_5(t) \end{aligned}$$

结合式 (32~37), 得:

$$\dot{V}_3(t) \leq \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\mu}_i^T(t) (\mathbf{Q}_1 + \zeta \mathbf{E}) \boldsymbol{\mu}_i(t) + \boldsymbol{\eta}^T(t) (\zeta \boldsymbol{\Theta} \otimes \mathbf{Q}_2) \boldsymbol{\eta}(t)$$

其中:

$$\mathbf{Q}_1 = \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \bar{\mathbf{A}} - 2\omega \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{C}} \quad (38)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} c_1 \mathbf{I} + c_2 \mathbf{P}_2 & 0 \\ 0 & (c_3 + c_4) \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_2 = & \mathbf{A}^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{A} + (\kappa_1 - \gamma \lambda \theta_{\max}^{-1}) \mathbf{P}_2 \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_2 + \\ & (\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4) \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_2 + \mathbf{c} \mathbf{I} \end{aligned} \quad (40)$$

这里: $c_1 = \kappa_3^{-1} \theta_{\max} \sigma_2 e^h, c_2 = \kappa_1^{-1} \lambda_2 \gamma^2 \pi_1 e^{o_h}, c_3 = \kappa_4^{-1} \theta_{\max} \sigma_3 e^h, c_4 = \kappa_2^{-1} \theta_{\max} \pi_2 e^{\pi_2 h}$.

条件 (17) ~ (19) 分别等价于条件 (24), (27), (29)。根据矩阵的 Schur 性质以及 LMIs (20-21) 得到, $\mathbf{Q}_1 < 0, \mathbf{Q}_2 < 0$ 。同时, 通过选择一个较小的正实数 ζ 满足 $\mathbf{Q}_1 + \zeta \mathbf{E} < 0$, 进而满足 $\dot{V}_3(t) < 0$ 。因此该多智能体的状态误差, 干扰误差以及协同误差渐近收敛于零, 即满足 $\boldsymbol{\varepsilon}_i(t) = 0, \delta_i(t) = 0$ 以及 $\boldsymbol{\eta}_i(t) = 0$ 。证毕。

注 2: LMIS (17-21) 的未知参数较多, 为获得满足系统的可行解, 可选择用迭代方法求解。需要注意的是参数均是一些较小的正实数, 取值在以内, 如果选取过大, 基本没有可行解。

4 仿真

在本节内容中, 为验证设计理论方案的有效性, 考虑由一个领导者和四个跟随者组成的多智能体系统, 其有向通信拓扑结构如图 1 所示。每个多智能体的系统矩阵形式为:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

与外部干扰相关的矩阵有如下形式:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = [1 \quad 0]$$

根据图 1 所示有向通信拓扑图, 矩阵 \mathbf{M} 可得:

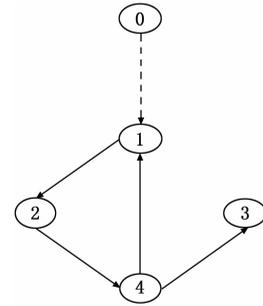


图 1 有向通信拓扑图

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据引理 4, 求得一个满足条件的对角矩阵 $\theta = \text{diag}\{0.3106, 0.5058, 0.5058, 0.5058\}$, 其中, $\theta_{\max} = 0.5058, \theta_{\min} = 0.3106, \lambda = 0.2451, \lambda_1 = 0.0787$ 。选择参数 $\zeta = 0.0001, \omega = 0.05, \omega_1 = 0.1, \pi_1 = 0.0015$, 同时取耦合强度参数 $\gamma = 4.9$ 以及 $\alpha = 2.8555$ 。该多智能体系统的时滞时间是 0.03 s。每个智能体的初始状态选择为 $[-1 \quad 1]$ 。通过求解 LMIS (17-21), 可得反馈增益矩阵 \mathbf{K} 和观测器增益矩阵 $\bar{\mathbf{L}}$ 为:

$$\mathbf{K} = [0.0075 \quad 0.0074], \bar{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 3.1938 \\ 2.0161 \\ 2.0378 \\ 0.0923 \end{bmatrix}$$

图 2~5 表示的是系统的状态和干扰估计误差变化趋势。图 6 表示的是未加控制协议的开环多智能体系统的状态轨迹。图 7~8 表示的是闭环多智能体系统的状态轨迹。

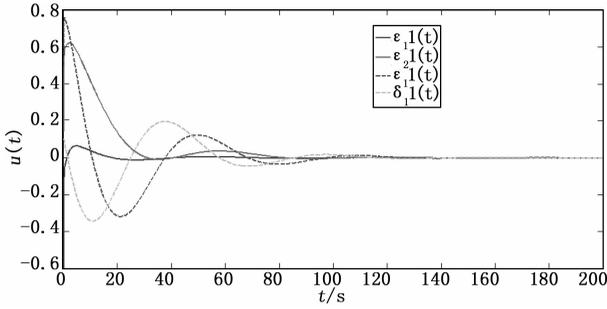


图 2 智能体 1 的状态和干扰估计误差

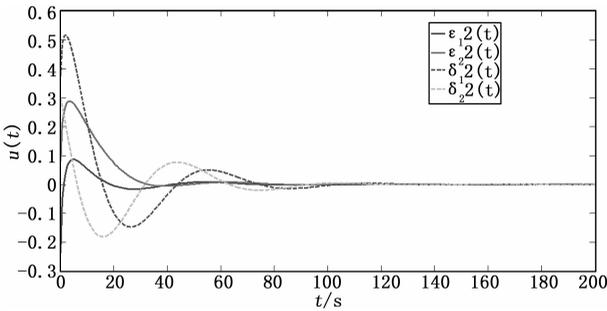


图 3 智能体 2 的状态和干扰估计误差

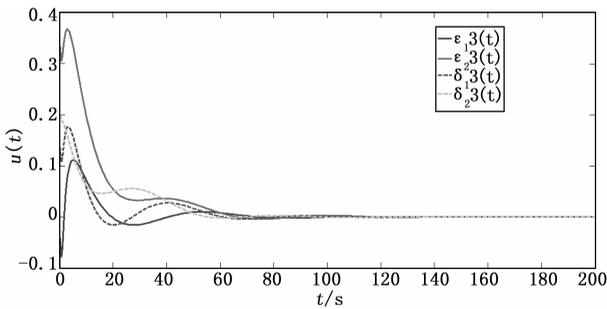


图 4 智能体 3 的状态和干扰估计误差

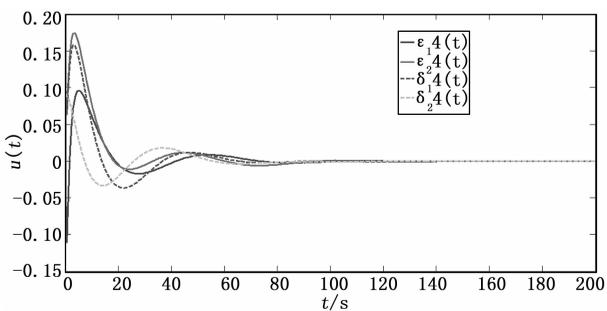


图 5 智能体 4 的状态和干扰估计误差

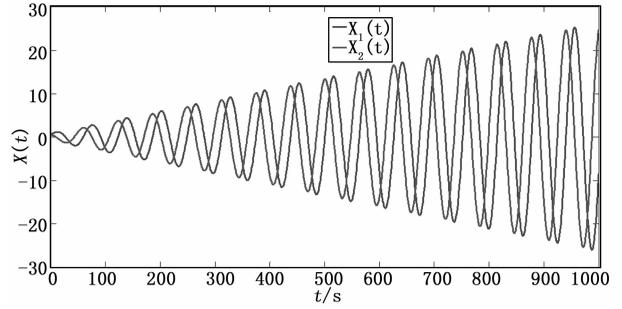


图 6 开环系统状态轨迹

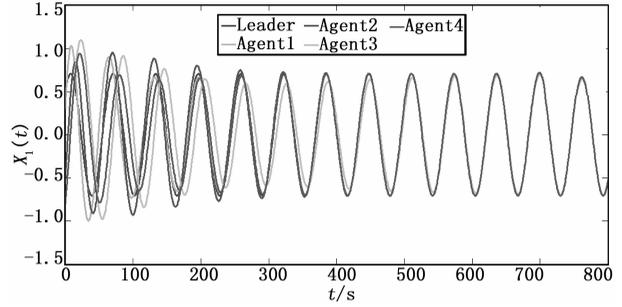


图 7 闭环系统状态轨迹

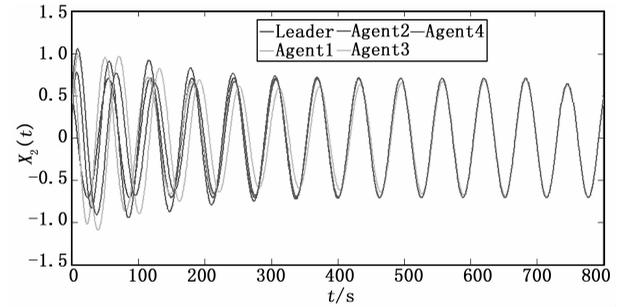


图 8 闭环系统状态轨迹

从图 2~5 可以看到状态和干扰估计误差渐近收敛于零, 说明对状态和干扰的估计是满足设计要求且有效的。由图 6 看出未加控制协议时, 开环多智能体系统的状态是发散的, 而加了控制协议的图 7 和图 8, 可见跟随者和领导者状态最终达到一致, 说明该一致性协议对外部干扰有良好的抑制作用。

5 总结

本文主要研究了一类受到外部干扰且有输入时滞的多智能体领导跟随一致性问题。基于截取预测方法解决输入时滞的基础上, 用分布式状态观测器同时估计状态和干扰, 利用获得的状态和干扰估计信息设计一致性协议, 在 Lyapunov-Krasovskii 函数的系统框架下进行稳定性分析, 得到多智能体系统稳定性充分条件, 将获得的充分条件用具有迭代参数的 LMIs 求解, 从而获得满足条件的可行解。最后, 通过仿真验证了设计方案的可行性, 通过仿真图可以看到外部干扰得到有效的抑制, 同时也实现多智能体

(下转第 84 页)