

一种新的多渐消因子容积卡尔曼滤波

鲍水达¹, 张安², 高飞²

(1. 西北工业大学 电子信息学院, 西安 710129; 2. 西北工业大学 航空学院, 西安 710072)

摘要: 将强跟踪思想引入容积卡尔曼滤波 (cubature Kalman filter, CKF), 建立强跟踪 CKF 能有效克服 CKF 在模型不确定、状态突变等情况下, 滤波性能下降的问题; 通过分析现有多渐消因子计算方法, 发现它们均只利用了协方差矩阵的对角线元素, 并没有考虑各个状态之间的相关性, 不能充分发挥多渐消因子的优势; 为此, 提出渐消因子矩阵, 基于正交原理推导渐消因子矩阵的求解方法, 提出多渐消因子强跟踪 CKF 算法; 多渐消因子强跟踪 CKF 算法突破了传统多渐消因子为向量的限制, 也不再要求渐消因子取值要大于 1; 仿真验证了算法具有更好的滤波精度何鲁棒性, 能更好的满足工程应用的要求。

关键词: 容积卡尔曼滤波; 相关性; 多渐消因子; 鲁棒性

A Novel Multiple Fading Factors Cubature Kalman Filter

Bao Shuida¹, Zhang An², Gao Fei²

(1. School of Electronics and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China;

2. School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The strong tracking idea is introduced into the cubature Kalman filter (CKF), and the strong tracking CKF can effectively overcome the performance degradation problem of CKF under the condition of model uncertainty and state mutation. By analyzing the existing multiple fading factor calculation methods, it is found that they only use the diagonal elements of the covariance matrix, and do not consider the correlation between the states, and cannot give full play to the advantages of multiple fading factors. Aiming to solve this disadvantage, this paper proposes a novel fading factor matrix, based on the orthogonal principle to derive the solution method of the fading factor matrix, and proposes a multiple fading factors strong tracking CKF algorithm. The multiple fading factors strong tracking CKF algorithm breaks through the limitation of the traditional multiple fading factor as a vector, and does not require the value of the fading factor to be greater than 1. The simulation verifies that the algorithm has better filtering accuracy and robustness, and can better meet the requirements of engineering applications.

Keywords: cubature Kalman filter; correlation; multiple fading factors; robustness

0 引言

卡尔曼滤波 (Kalman filter, KF) 是一种经典高效的递归滤波方法, 克服维纳滤波的不足, 被应用在许多实际领域中。然而, 实际中大部分系统都是非线性的, 不满足 KF 中模型为线性的假设。为此, 学者们提出扩展卡尔曼滤波 (extended Kalman filter, EKF)、无迹卡尔曼滤波^[1] (unscented Kalman filter, UKF)、容积卡尔曼滤波^[2] (cubature Kalman filter, CKF) 等非线性滤波算法。UKF 和 CKF 都是确定性采样滤波算法, 将采样点进行传递后加权求和来近似后验均值和协方差, 采样点数量由相关状态向量维数确定, 滤波的计算量也主要由采样点的数量决定。

在实际应用中, 由于系统的高度复杂性和强非线性, 一阶泰勒展开并不能很好的近似实际系统, 模型参数和过

程参数存在较大差异, 导致 EKF 的滤波精度极大下降, 甚至发散。为此, 周东华等人将用于线性系统的最佳渐消因子卡尔曼滤波推广到 EKF 中, 提出强跟踪滤波器 (Strong Tracking Filter, STF)^[3]。基于正交原理, STF 在预测协方差阵中引入渐消因子, 充分利用残差序列中的有效信息, 增强了 EKF 应对模型不准确性、状态突变的鲁棒性。STF 目前仍被广泛的用于诸多领域^[4-6], 文献 [4] 提出了一种对称 STF 用于感应电机无线传感器驱动, 将多渐消因子引入到预测协方差阵, 采用 Cholesky 分解来保证预测协方差阵在迭代中的对称性, 以获得更好的稳定性。文献 [6] 认为 STF 相对于 EKF 的优越性通常是基于仿真和以前的实验, 缺少对应的理论分析, 进而基于均方误差、滤波增益等方面对比分析 STF 和 EKF, 最后认为传统卡尔曼滤波理论的可用性受到严重限制, 其结构易被破坏, 导致滤波性能下降, 在工程应用中研究使用强跟踪类滤波器是有重大意义的。

UKF 和 CKF 是现在最具有代表性的非线性滤波方法。与 EKF 相比, UKF 和 CKF 不需要求解雅克比矩阵, 具有更高的泰勒展开逼近精度, 逐渐替代 EKF, 应用于各个领域^[7-9]。CKF 采用三阶向径容积规则, 数学推导严谨, 设计简洁, 调节参数少, 有效克服了 UKF 中高阶非线性时不稳

收稿日期: 2018-10-26; 修回日期: 2018-12-12。

基金项目: 国家自然科学基金(61573283)。

作者简介: 鲍水达(1991-), 男, 浙江丽水人, 博士研究生, 主要从事非线性滤波研究。

张安(1962-), 男, 陕西人, 博士生导师, 教授, 主要从事一体化智能火力指挥与控制技术、一体化作战飞机航空平台电子综合技术研究。

定的问题^[10]。同样地, UKF 和 CKF 也延续了传统卡尔曼滤波理论思想的不足, 当理论模型和实际模型不匹配时, 会导致滤波性能下降, 故强跟踪滤波思想在非线性滤波方法中同样适用, 引起了众多学者的关注^[11-14]。文献 [11] 基于预测协方差和互协方差的理论关系, 得到雅克比矩阵在 UKF 中的等价求解方法, 建立渐消因子在非线性滤波方法中的等效求解方法, 避免了强跟踪 UKF 在使用中对雅克比矩阵的依赖, 扩大了应用范围。这些研究均证明与 UKF/CKF 相比, 强跟踪 UKF/CKF 具有更好的鲁棒性, 获得更好的滤波性能。文献 [12] 基于飞行器姿态估计模型中量测函数的特性, 建立新的多重渐消因子求解方法, 获得了比单渐消因子强跟踪 UKF 更好的鲁棒性和滤波性能。

然而, 现有研究虽然尝试对多渐消因子的求解方法进行提高完善, 总的来说仍然沿用了传统多重渐消因子的引入方法, 只利用了协方差矩阵中对角线的信息, 即各个状态本身的方差, 而没有考虑各个变量之间的相关性。为此, 本文提出渐消因子矩阵, 建立新的多重渐消因子强跟踪 CKF (multiple fading factors strong tracking cubature Kalman filter, MSTCKF), 克服原来方法的不足, 充分提取协方差矩阵中的信息, 提高渐消因子对各个变量保持良好跟踪的能力。仿真表明, MSTCKF 在鲁棒性和滤波精度方面均明显优于 CKF, 具有良好应对状态突变的能力。

1 容积卡尔曼滤波

考虑如下非线性离散系统:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态向量, $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^m$ 为量测向量, n 和 m 为对应维数; $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 分别为非线性系统的状态转移函数和量测函数; $\mathbf{w}_{k-1} \in \mathbf{R}^n$ 为系统噪声, $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^m$ 为量测噪声, 二者均为高斯白噪声, 且互不相关, 协方差矩阵为 \mathbf{Q}_k 和 \mathbf{R}_k 。

CKF 算法流程如下:

1) 假设已知系统 $k-1$ 时刻的估计状态 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ 和协方差矩阵 \mathbf{P}_{k-1} 。

2) 时间更新

① 选取容积点 $i = (1, 2, \dots, l)$

$$\mathbf{X}_{i,k-1} = \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (3)$$

其中: $l = 2n$, 其中 \mathbf{S}_{k-1} 为 \mathbf{P}_{k-1} 平方根。

② 计算传递后容积点

$$\mathbf{X}_{i,k/k-1}^* = f(\mathbf{X}_{i,k-1}) \quad (4)$$

③ 计算 k 时刻状态预测值

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \mathbf{X}_{i,k/k-1}^* \quad (5)$$

④ 计算 k 时刻未引入渐消因子的预测误差协方差阵平方根

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \mathbf{X}_{i,k/k-1}^* \mathbf{X}_{i,k/k-1}^{*T} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^T + \mathbf{Q}_k \quad (6)$$

3) 量测更新

① 选取容积点 $i = (1, 2, \dots, l)$

$$\mathbf{X}_{i,k/k-1} = \mathbf{S}_{k-1} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \quad (7)$$

② 计算传递后容积点

$$\mathbf{y}_{i,k/k-1} = h(\mathbf{X}_{i,k/k-1}) \quad (8)$$

③ 计算 k 时刻观测预测值

$$\hat{\mathbf{y}}_{k/k-1} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \mathbf{y}_{i,k/k-1} \quad (9)$$

④ 计算互相关协方差阵

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y},k/k-1} = \boldsymbol{\chi}_{k/k-1} (\mathbf{Y}_{k/k-1})^T \quad (10)$$

其中:

$$\mathbf{Y}_{k/k-1} = \frac{1}{\sqrt{l}} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1,k/k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k/k-1} & \mathbf{y}_{2,k/k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k/k-1} \\ \dots & \mathbf{y}_{l,k/k-1} - \hat{\mathbf{y}}_{k/k-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{k/k-1} = \frac{1}{\sqrt{l}} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{1,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} & \mathbf{X}_{1,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \\ \dots & \mathbf{X}_{l,k/k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

⑤ 计算 k 时刻新息协方差阵

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}\mathbf{y},k/k-1} = \mathbf{Y}_{k/k-1} \mathbf{Y}_{k/k-1}^T + \mathbf{R}_k \quad (13)$$

⑥ 计算 k 时刻滤波增益阵

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{y},k/k-1} / \mathbf{P}_{\mathbf{y}\mathbf{y},k/k-1} \quad (14)$$

⑦ 计算 k 时刻状态估计值

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k/k-1}) \quad (15)$$

⑧ 计算 k 时刻状态误差协方差阵

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\mathbf{y},k/k-1} \mathbf{K}_k^T \quad (16)$$

2 多渐消因子容积卡尔曼滤波

2.1 多渐消因子计算方法分析

与通常滤波器相比, STF 具有以下优良的特性:

- 1) 较强的关于模型不确定性的鲁棒性。
- 2) 极强的关于突变状态的跟踪能力, 甚至在系统达到平稳状态时, 仍保持对缓变状态与突变状态的跟踪。
- 3) 适中的计算复杂度。

STF 基于正交原理, 在线选取一个适当的时变增益矩阵 \mathbf{K}_k , 使得以下条件成立

$$E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)^T] = \min \quad (17)$$

$$E[\mathbf{e}_{k+j} \mathbf{e}_k^T] = 0, k = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots \quad (18)$$

其中: \mathbf{e}_k 为 k 时刻的残差。式 (17) 是滤波器性能指标, 式 (18) 要求滤波器中不同时刻的残差序列保持处处正交, 也是正交性原理这一名称的由来。

为此, STF 利用衰减记忆滤波思想, 将渐消因子引入预测误差协方差矩阵, 进而实时调整增益矩阵, 强迫滤波残差满足式。多渐消因子引入位置具体如下:

$$\mathbf{P}_{k-1} = \mathbf{LMD}_k \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q} \quad (19)$$

其中: $\mathbf{LMD}_k = \text{diag}[\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, \dots, \lambda_{n,k}]$ 为多重渐消因子, \mathbf{F}_k 为雅可比矩阵。

目前对 \mathbf{LMD}_k 的计算主要有两种方法:

- (1) 基于先验知识的比例系数^[15]
当系统的先验知识可以大致确定 $\lambda_{1,k}; \lambda_{2,k}; \dots; \lambda_{n,k} = a_1;$

a_2, \dots, a_n 时, 多重渐消因子计算方法如下:

$$\lambda_{1,i} = \begin{cases} \lambda_{1,i}, & \lambda_{1,i} > 1 \\ 1, & \lambda_{1,i} \leq 1 \end{cases} \quad (20)$$

其中:

$$\lambda_{1,k} = a_k C_k \quad (21)$$

$$C_k = \frac{tr(\mathbf{N}_k)}{\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{M}_{ii,k}} \quad (22)$$

$$\mathbf{N}_k = \mathbf{V}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{Q} \mathbf{H}_k^T - \mathbf{R} \quad (23)$$

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_k^T \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k \quad (24)$$

其中: $tr(\cdot)$ 为矩阵求迹运算, \mathbf{H}_k 和 \mathbf{F}_k 分别为对应雅克比矩阵, \mathbf{V}_k 为实际输出残差序列的协方差矩阵, 估算如下:

$$\mathbf{V}_k = \begin{cases} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T, & k = 0 \\ \frac{\rho \mathbf{V}_{k-1} + \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T}{1 + \rho}, & k > 0 \end{cases} \quad (25)$$

其中是 ρ 遗忘因子, $0 < \rho \leq 1$, 通常取 $\rho = 0.95$ 。

从式 (22) 可以看出, 该多渐消因子计算方法实际上只计算一个标量渐消因子, 然后通过提前设定的好的比例因子, 得出最后的多渐消因子。

该方法的优点是计算简洁, 与单渐消因子类似, 不需要对雅克比矩阵 H_k 进行求逆等运算。不足是:

- 1) 基于先验知识的比例系数在实际应用中难以确定, 限制了它的使用范围;
- 2) 提前确定的比例系数, 实际上只能对应特定类型的故障, 不能很好处理实际应用中可能出现复杂多变的故障。例如:

$\lambda_{1,k} : \lambda_{2,k} : \dots : \lambda_{n,k} = 5 : 1 : \dots : 1$ 时, 则与第一个状态相关的故障更容易被检测到, 而与第一个状态无关的故障, 一定程度上会被弱化, 且求得其他的渐消因子分量也会小于 $\lambda_{1,k}$, 不符合实际。

(2) 基于部分量测函数雅克比矩阵信息^[12-14]

当 $n \neq m$ 时, 若量测矩阵 \mathbf{H}_k 的秩为:

$$rank(\mathbf{H}_k) = \min(n, m) \quad (26)$$

则有:

$$\mathbf{H}_k \mathbf{LMD}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T = \mathbf{D}_k \mathbf{J}_k \mathbf{D}_k^T \quad (27)$$

其中: \mathbf{D}_k 为 \mathbf{H}_k 中不为 0 的行或者列组成的满秩矩阵, \mathbf{J}_k 为 $\mathbf{LMD}_k \mathbf{P}_{k/k-1}$ 中对应行列形成的满秩矩阵。则有:

$$\mathbf{N}_k = \mathbf{D}_k \mathbf{J}_k \mathbf{D}_k^T \quad (28)$$

\mathbf{D}_k 为满秩矩阵, 故 \mathbf{D}_k 可逆, 有:

$$\mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{N}_k (\mathbf{D}_k^T)^{-1} = \mathbf{J}_k \quad (29)$$

令上式中两边矩阵对角线元素相等, 则有:

$$(\mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{N}_k (\mathbf{D}_k^T)^{-1})_{ii} = (\mathbf{J}_k)_{ii} \quad (30)$$

从而求得:

$$\lambda_{2,k} = \frac{(\mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{N}_k (\mathbf{D}_k^T)^{-1})_{ii}}{(\mathbf{J}_k)_{ii}} \quad (31)$$

该多渐消因子计算方法的优点是避免了对先验知识的依赖, 降低应用限制, 使多渐消因子能适用于更多场景。

该方法的不足也很明显, 它能求得渐消因子个数为量

测矩阵 \mathbf{H}_k 的秩, 即 $\min(n, m)$, 显然的, 当 $n > m$ 时, 并不能为每一个状态提供一个渐消因子, 不能达到每个状态单独优化的目的。另一方面, 从 \mathbf{H}_k 中选取不为 0 的行或者列组成的满秩 \mathbf{D}_k 时, 并没有给出合理的选取方法, 仅当 \mathbf{H}_k 中不为 0 的行或者列恰好为 $\min(n, m)$ 时, \mathbf{D}_k 是唯一的。当 \mathbf{H}_k 中不为 0 的行或者列大于 $\min(n, m)$ 时, \mathbf{D}_k 并不唯一, 不能分辨哪个 \mathbf{D}_k 是最合理的, 也就无法确定多渐消因子与各个状态变量之间的对应关系, 导致不能使用。

(3) 基于量测函数雅克比矩阵信息

与方法 (2) 相比, 该方法不考虑量测矩阵 \mathbf{H}_k 的秩, 直接使用量测矩阵 \mathbf{H}_k 的广义逆, 即:

$$\mathbf{LMD}_k \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_k^T = (\mathbf{H}_k)^{-1} (\mathbf{V}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{Q} \mathbf{H}_k^T - \mathbf{R}) (\mathbf{H}_k^T)^{-1} \quad (32)$$

令:

$$\mathbf{N}_k = (\mathbf{H}_k)^{-1} (\mathbf{V}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{Q} \mathbf{H}_k^T - \mathbf{R}) (\mathbf{H}_k^T)^{-1} \quad (33)$$

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_k^T \quad (34)$$

则 \mathbf{LMD}_k 计算如下:

$$\lambda_{1,i} = \begin{cases} \lambda_{1,i}, & \lambda_{1,i} > 1 \\ 1, & \lambda_{1,i} \leq 1 \end{cases} \quad (35)$$

其中:

$$\lambda_{1,i} = \frac{(\mathbf{N}_k)_{ii}}{(\mathbf{M}_k)_{ii}} \quad (36)$$

与前面两种方法相比, 该方法即避免了对先验知识的依赖, 也不存在无法确定 \mathbf{D}_k 的问题, 具有更好的实用性。

综上, 3 种多渐消因子求解方法均存在明显的不足。从它们计算多渐消因子的过程中也可以看出, 它们只利用了协方差矩阵中对角线上的信息, 并没有考虑协方差矩阵中其他元素对滤波精度和鲁棒性的影响, 即没有充分考虑状态之间的相关性, 这一定程度上会导致降低强跟踪滤波方法的鲁棒性和滤波精度, 不能充分发挥多渐消因子对各个变量分开修正的优势。

2.2 一种新的多渐消因子求解方法

自从强跟踪思想提出以来, 对于多渐消因子的定义一直为:

$$\mathbf{LMD}_k = \text{diag}[\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, \dots, \lambda_{n,k}] \quad (37)$$

其中: \mathbf{LMD}_k 是一个对角矩阵。

从 \mathbf{LMD}_k 定义可知, \mathbf{LMD}_k 从一开始就没有考虑各个状态之间的相关性, 认为各个变量是独立的。从前面分析的 \mathbf{LMD}_k 计算方法看, 均只利用了各个状态本身的方差, 而并没有充分利用各个状态之间的相关性。

为此, 本文提出一种新的多渐消因子定义, 将多渐消因子从向量扩展为渐消因子矩阵:

$$\mathbf{MD}_k = \lambda_{i,j}, i, j = 1, 2, \dots, n \quad (38)$$

则 CKF 中引入渐消因子矩阵如下式:

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \mathbf{MD}_k \left(\frac{1}{2l} \sum_{i=1}^{2l} \Psi(X_{i,k/k-1}^* - \hat{x}_{k/k-1} \hat{x}_{k/k-1}^T) \right) + \mathbf{Q} \quad (39)$$

对于式 (18), 在 CKF 中有:

$$E[\mathbf{e}_{k+j} \mathbf{e}_k^T] = \mathbf{H}_{k+j} \mathbf{F}_{k+j-1, k+j-2} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+j-1} \mathbf{H}_{k+j-1}) \cdot \mathbf{F}_{k+1, k} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{F}_{k+1, k} (\mathbf{P}_{xy, k/k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{V}_k) = 0 \quad (40)$$

即有：

$$P_{xy,k/k-1} - K_k V_k = 0 \quad (41)$$

式成立的充要条件为：

$$P_{yy,k} = V_k \quad (42)$$

即理论残差协方差矩阵和实际残差协方差矩阵相等。

将式 (39) 带入上式，并进行简化后得：

$$MD_k \left(\frac{1}{2l} \sum_{i=1}^{2l} \Psi(X_{i,k/k-1}^*) - \hat{x}_{k/k-1} \hat{x}_{k/k-1}^T \right) = (H_k)^{-1} (V_k - H_k Q H_k^T - R) (H_k^T)^{-1} \quad (43)$$

当 H_k 不是方阵时， $(H_k)^{-1}$ 为广义逆矩阵。令：

$$N_k = (H_k)^{-1} (V_k - H_k Q H_k^T - R) (H_k^T)^{-1} \quad (44)$$

$$M_k = \frac{1}{2l} \sum_{i=1}^{2l} \Psi(X_{i,k/k-1}^*) - \hat{x}_{k/k-1} \hat{x}_{k/k-1}^T \quad (45)$$

则 MD_k 计算如下：

$$MD_k = N_k M_k^{-1} \quad (46)$$

式中， M_k 的计算比较复杂，结合式进一步简化得：

$$M_k = P_{k/k-1}^s - Q \quad (47)$$

其中：上标 ‘s’ 为引入渐消因子前的对应变量。

在传统多渐消因子方法中，需要对各个渐消因子的值进行判断，保证渐消因子的值大于 1，而在本文提出渐消因子矩阵 MD_k 中，对角线元素的变化，也会影响和别的变量之间的相关系数，故不在做渐消因子大于 1 的要求，直接使用求解得到的渐消因子矩阵 MD_k 。

2.3 算法流程

基于式 (1) 和式 (2) 所确定的非线性模型，MSTCKF 算法流程如下：

1) 假设已知系统 $k-1$ 时刻的估计状态 \hat{x}_{k-1} 和协方差矩阵 P_{k-1} 。

2) 时间更新：由式 (3) ~ 式 (6) 求解得 k 时刻状态预测值 $\hat{x}_{k/k-1}$ 和 k 时刻引入渐消因子前的预测误差协方差矩阵 $P_{k/k-1}^s$ 。

3) 计算渐消因子：由式 (44)、(45) 和 (46) 计算得到多渐消因子，带入式 (39) 得到引入渐消因子后的预测误差协方差矩阵 $P_{k/k-1}$ 。

4) 量测更新：由式 (7) ~ 式 (16) 求解得 k 时刻状态估计值 x_k 和 k 时刻引入渐消因子前的误差协方差矩阵 P_k 。

3 仿真结果与分析

采用某一强耦合非线性随机系统^[16]来验证 MSTSCKF 的有效性，并对量测方程做了相应修改，具体如下：

$$\begin{cases} x_{k,1} = 0.001(d_{k-1}z_{k-1} - g_{k-1}b_{k-1})/c_{k-1} + x_{k-1,1} + w_{k-1,1} \\ x_{k,2} = 0.001(-g_{k-1}z_{k-1} + a_3b_{k-1})/c_{k-1} + x_{k-1,2} + w_{k-1,2} \\ x_{k,3} = 0.001x_{k-1,1} + x_{k-1,3} + w_{k-1,3} \\ x_{k,4} = 0.001x_{k-1,2} + x_{k-1,4} + w_{k-1,4} \\ y_{k,1} = x_{k,1} + v_{k,1} \\ y_{k,2} = x_{k,2} + v_{k,2} \\ y_{k,3} = x_{k,3} + x_{k,4} + v_{k,3} \end{cases}$$

其中： $d_{k-1} = a_1 + a_2 \cos(x_{k-1,4})$, $g_{k-1} = a_3 + 0.5a_2 \cos(x_{k-1,4})$, $z_{k-1} = a_2 \sin(x_{k-1,4})(x_{k-1,1}x_{k-1,2} + 0.5x_{k-1,2}^2 - a_4 \cos(x_{k-1,3}) - a_5 \cos(x_{k-1,3} + x_{k-1,4}) + u_{k-1,1})$, $b_{k-1} = -0.5a_2 \sin(x_{k-1,4})^2 - a_5 \cos(x_{k-1,3} + x_{k-1,4}) + u_{k-1,2}$, $c_{k-1} = a_3d_{k-1} - g_{k-1}^2$, $a_1 = 3.82$, $a_2 = 2.12$, $a_3 = 0.71$, $a_4 = 81.82$, $a_5 = 24.6$, $u_{k-1,1} = 125 - 5(1 - \exp(-0.2(k-1)))$, $u_{k-1,2} = 125 - 10(1 - \exp(-0.2(k-1)))$ ，在滤波过程中，设 $R = \text{diag}[0.01, 0.01, 0.01]$, $Q = 0$ 。

为验证本文提出的 MSTSCKF 处理状态突变的能力，仿真中采用 3 种方法进行对比：SCKF、基于第 3 种多渐消因子求解方法的 STSCKF 和本文提出的 MSTSCKF。

假设在 $k = 70$ 和 $k = 140$ 时，由于外部干扰， $x_{k,1}$ 分别有 +4 和 -3 的突变。3 种方法对 4 个状态的估计如图 1~4 所示。

从图 1 中可知，在突变发生前，3 种方法对各状态的估计都相当准确，能完美跟踪状态。当 $k = 70$ 突变发生后，SCKF 已经处于稳定状态，增益矩阵趋于极小值，失去跟踪突变状态的能力，不能及时响应状态突变，需要很长一段时间才能对回到正常误差区间，应对干扰能力不足，鲁棒性较差。STSCKF 和 MSTSCKF 由于采用多渐消因子，对各个状态分开修正，均能有效的从残差中提取信息，实现对 $x_{k,1}$ 在 $k = 70$ 和 $k = 140$ 突变状态的跟踪，响应速度快，鲁棒性好，并没有因为 $x_{k,1}$ 突变而导致滤波精度的下降。

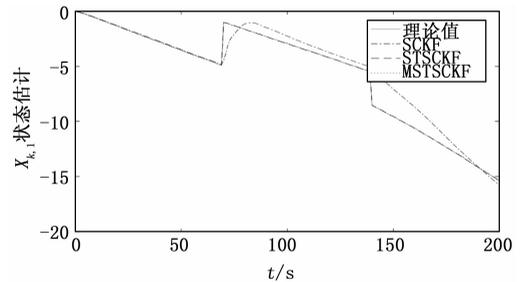


图 1 3 种方法对 $x_{k,1}$ 的状态估计

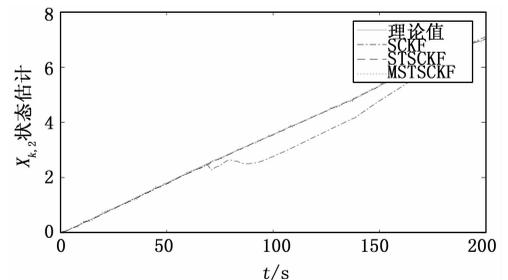
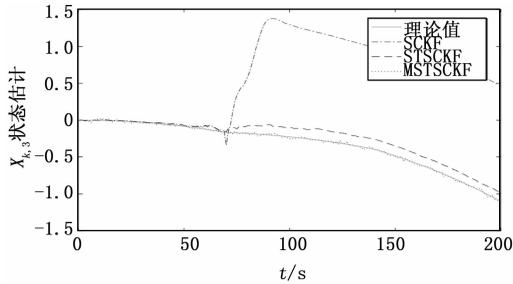
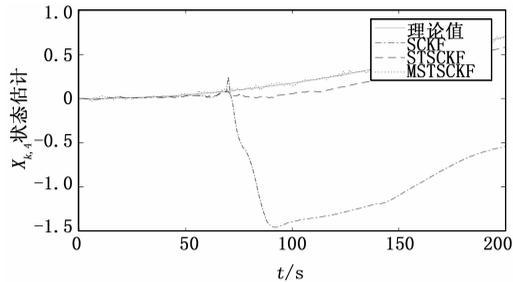


图 2 3 种方法对 $x_{k,2}$ 的状态估计

从图 2、图 3 和图 4 可见，SCKF 受 $x_{k,1}$ 的影响，对其他三个状态的估计也很差，产生了一个明显的偏差和跳变，且到仿真结束也没有收敛到正常值。

在图 1 和图 2 中，STSCKF 和 MSTSCKF 有近乎一样

图3 3种方法对 $x_{k,3}$ 的状态估计图4 3种方法对 $x_{k,4}$ 的状态估计

的滤波性能,从图上并不能明显看出两者的区别。而在图3和图4中,STSCKF仅考虑各个状态的方差,没有考虑状态间相关性的不足凸显出来。STSCKF在突变发生后,对 $x_{k,3}$ 和 $x_{k,4}$ 的估计值都产生了一个明显的跳跃,且在剩下的时间里,估计值一直没有重新收敛到理论值。与STSCKF相反,MSTCKF,对 $x_{k,3}$ 和 $x_{k,4}$ 的估计值在突变前后一直都很稳定,并没有受 $x_{k,1}$ 状态突变的影响。因此,采用多渐消因子矩阵的MSTCKF能真正意义上实现了对各个状态变量进行多通道优化,互不影响,有效地保证了滤波器的最优性,克服了现有多渐消因子方法没有考虑状态间相关性的不足。

4 结束语

通过分析当前常用的3种多渐消因子强跟踪计算方法优缺点,发现它们均只利用协方差矩阵中对角线元素,没有考虑各个状态之间的相关性。针对该问题,本文将多渐消因子从向量扩展为渐消因子矩阵,克服了当前方法的不足,并根据正交原理推导建立渐消因子矩阵的求解方法,提出MSTCKF。与传统多渐消因子不同,渐消因子矩阵由于考虑状态之间的相关性,修改对角线元素将会影响其他位置元素,故不再限制渐消因子取值必须大于1。仿真表明,在状态突变情况下,MSTCKF的滤波性能和鲁棒性优于STCKF,能真正实现各个状态分开估计,保证其他状态的估计不受突变状态的影响。MSTCKF也能被用于信号处理、目标跟踪、故障检测、捷联惯导等领域中,提高定位跟踪精度,具有一定的实际应用价值。

参考文献:

[1] Li W, Sun S, Jia Y, et al. Robust unscented Kalman filter with

- adaptation of process and measurement noise covariances [J]. Digital Signal Processing, 2016, 48: 93-103.
- [2] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters [J]. IEEE T Automat Control, 2009, 54 (6): 1254-1269.
- [3] 周东华, 席裕康. 非线性系统带次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波 [J]. 控制与决策, 1990, 5 (5): 1-6.
- [4] Yin Z, Li G, Zhang Y, et al. Symmetric-strong-tracking-extended-Kalman-filter-based sensorless control of induction motor drives for modeling error reduction [J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2018.
- [5] He X, Wang Z, Wang X, et al. Networked strong tracking filtering with multiple packet dropouts: algorithms and applications [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2014, 61 (3): 1454-1463.
- [6] Ge Q, Shao T, Chen S, et al. Carrier tracking estimation analysis by using the extended strong tracking filtering [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64 (2): 1415-1424.
- [7] Costanzi R, Fanelli F, Meli E, et al. UKF-based navigation system for AUVs: online experimental validation [J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2018: 1-9.
- [8] Jia B, Blasch E, Pham K D, et al. Space object tracking and maneuver detection via interacting multiple model cubature Kalman filters [A]. 2015 IEEE Aerospace Conference [C]. 2015: 1-8.
- [9] Potnuru D, Chandra K P B, Arasaratnam I, et al. Derivative-free square-root cubature Kalman filter for non-linear brushless DC motors [J]. IET Electric Power Applications, 2016, 10 (5): 419-429.
- [10] Hone D D, Shao W D, Yuan C C, et al. Performance comparison of EKF/UKF/CKF for the tracking of ballistic target [J]. Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science, 2012, 10 (7): 1692-1699.
- [11] 王小旭, 赵琳, 夏全喜. 基于Unscented变换的强跟踪滤波器 [J]. 控制与决策, 2010, 25 (7): 1063-1068.
- [12] 钱华明, 黄蔚, 孙龙, 等. 基于多重次渐消因子的强跟踪UKF姿态估计 [J]. 系统工程与电子技术, 2013 (3): 580-585.
- [13] 钱华明, 葛磊, 彭宇. 多渐消因子卡尔曼滤波及其在SINS初始对准中的应用 [J]. 中国惯性技术学报, 2012 (3): 287-291.
- [14] 薛海建, 郭晓松, 周召发. 基于自适应多重渐消因子卡尔曼滤波的SINS初始对准方法 [J]. 系统工程与电子技术, 2017 (3): 620-626.
- [15] 高伟, 李敬春, 奔粤阳, 等. 基于多重渐消因子的自适应卡尔曼滤波器 [J]. 系统工程与电子技术, 2014 (7): 1405-1409.
- [16] 周东华, 席裕康, 张钟俊. 一种带多重次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波器 [J]. 自动化学报, 1991, 6: 689-695.