

# 一种球形滚动机器人的路径跟踪控制器设计

于涛<sup>1</sup>, 孙汉旭<sup>2</sup>, 赵伟<sup>3</sup>, 杨昆<sup>1</sup>

(1. 辽宁工业大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 锦州 121001;

2. 北京邮电大学 自动化学院, 北京 100876; 3. 北京印刷学院 信息工程学院, 北京 102600)

**摘要:** 对一种球形滚动机器人的路径跟踪控制问题进行研究, 设计一种基于自适应滑模控制策略的路径跟踪控制器; 所设计的路径跟踪控制器采用鲁棒滑模自适应增益控制律, 能够有效实现带有扰动和不确定性的实际球形滚动机器人的路径跟踪; 推导球壳纯滚动和无自转非完整约束下球形滚动机器人的运动方程, 并在此基础上设计自适应滑模路径跟踪控制器; 对于给定的参考几何路径, 所设计的路径跟踪控制器能够确保路径跟踪误差在有限时间内收敛至很小的零邻域内; 基于 Lyapunov 稳定性理论证明了闭环控制系统的稳定性, 数值仿真与样机实验结果进一步验证了所设计的路径跟踪控制器的有效性。

**关键词:** 球形滚动机器人; 路径跟踪; 自适应增益; 滑模控制; 不确定性

## Design of a Path Following Controller for a Spherical Rolling Robot

Yu Tao<sup>1</sup>, Sun Hanxu<sup>2</sup>, Zhao Wei<sup>3</sup>, Yang Kun<sup>1</sup>

(1. College of Mechanical Engineering and Automation, Liaoning University of Technology, Jinzhou 121001, China;

2. School of Automation, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China;

3. School of Information Engineering, Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing 102600, China)

**Abstract:** The path following control problem of a spherical rolling robot is studied, and a path following controller based on an adaptive sliding mode control scheme is designed. The designed path following controller adopts a robust sliding mode adaptive gain control law, and it can efficiently realize path following control of the real spherical rolling robot with perturbations and uncertainties. The motion equations of the spherical rolling robot subject to pure rolling and non-spinning constraints of the spherical shell are derived, based on which the adaptive sliding mode path following controller is developed. With respect to a specified reference geometry path, the designed path following controller can guarantee that the path following error converges to a small zero region within a finite time. The stability of the closed-loop control system is proven based on Lyapunov stability theory, and the results of numerical simulation and prototype experiment further verify the efficacy of the designed path following controller.

**Keywords:** spherical rolling robot; path following; adaptive gain; sliding mode control; uncertainties

## 0 引言

球形滚动机器人是近些年发展起来的一种新型移动机器人, 此类移动机器人采用内部驱动单元实现外部球壳滚动。球形滚动机器人具有完全封闭、滚动灵活、抗倾翻和耗能低等特性, 这些特性使此类移动机器人对外界环境表现出很强的适应力, 因而逐渐受到国内外学者的关注<sup>[1-11]</sup>。球形滚动机器人是一种内驱动式非完整滚动球体, 点接触式滚动形式虽然减小了球形滚动机器人的运动阻力, 但也增大了球形滚动机器人的控制难度。因此, 球形滚动机器人的控制问题逐渐成为球形机器人领域的研究热点之一。

球形滚动机器人的跟踪控制问题一般包括球形滚动机器人的轨迹跟踪控制问题和球形滚动机器人的路径跟踪控制问题。与轨迹跟踪控制<sup>[11]</sup>相比, 路径跟踪控制<sup>[1-8]</sup>仅要求

球形滚动机器人的运动路径与参考几何路径一致, 而不要求球形滚动机器人于指定时刻到达指定位置。文献 [1-3] 提出了基于曲率控制的球形滚动机器人路径跟踪控制方法, 通过调节球形滚动机器人的横向姿态和纵向速度来实现球形滚动机器人对于期望路径的渐近跟踪。文献 [4] 提出了一种基于相对曲率半径控制的球形滚动机器人路径跟踪控制方法, 通过改变球形滚动机器人的滚动轴水平倾角来实现球形滚动机器人对于参考路径的跟踪控制。文献 [5] 提出了一种基于运动学模型和动力学模型分析的球形滚动机器人路径跟踪控制策略, 并基于所提出的控制策略分别设计了 PD 控制器和自适应滑模控制器。文献 [6] 提出了一种基于模糊分级滑模控制的球形滚动机器人路径跟踪控制方法, 所提出的控制方法能够实现球形滚动机器人稳定的路径跟踪。文献 [7] 基于滑模控制设计了一种球形滚动机器人的路径跟踪控制器, 实现了球形滚动机器人对于倾斜平面上参考路径的渐近跟踪。文献 [8] 提出了一种基于神经网络补偿的模糊控制方法, 实现了球形机器人系统对于滚动平面上期望路径的跟踪控制。综上所述, 目前对于球形滚动机器人路径跟踪控制问题的研究相对较少, 已取得

收稿日期: 2018-08-31; 修回日期: 2018-09-29。

基金项目: 辽宁省自然科学基金指导计划项目(201602379); 辽宁省教育厅科学技术研究一般项目(L2015241)。

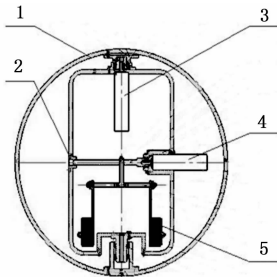
作者简介: 于涛(1980-), 男, 天津市人, 博士, 讲师, 主要从事机器人运动分析与控制、滑模控制理论与应用方向的研究。

的研究成果还处于理论探索和初步实验阶段，相关的理论与方法仍然有待于进一步完善和探索。

在建立一种球形滚动机器人运动模型的基础上，本文设计了一种基于自适应滑模控制策略的路径跟踪控制器。首先推导球壳纯滚动和无自转非完整约束条件下球形滚动机器人的运动方程，然后在此基础上设计一种滑模增益自适应控制器，该自适应滑模控制器能够保证球形滚动机器人的运动路径收敛于期望的参考路径，最后通过数值仿真与样机实验验证本文设计的路径跟踪控制器的有效性和理论分析结果的正确性。

### 1 球形滚动机器人的运动方程

BYQ-III 型球形滚动机器人<sup>[9-10]</sup>是一种配重驱动式球形滚动机器人，该球形滚动机器人的基本结构如图 1 所示。BYQ-III 型球形滚动机器人主要由球壳 1、框架 2 和配重 5 三个部分构成，该球形滚动机器人内部配置了两台独立的驱动电机，分别为框架电机 3 和配重电机 4。框架电机 3 和配重电机 4 的旋转轴通过球壳中心并且相互垂直，在两台驱动电机的作用下配重 5 在球壳 1 内可以进行横向和纵向的摆动。配重 5 的摆动使该球形滚动机器人的重心偏移，从而实现该球形滚动机器人在地面上的横向运动和纵向运动。



1-球壳; 2-框架; 3-框架电机; 4-配重电机; 5-配重

图 1 BYQ-III 型球形滚动机器人的基本结构

球形滚动机器人的运动模型是分析球形机器人系统的运动学特性和动力学特性的重要基础，也是有效实现球形滚动机器人稳定运动控制的前提条件。因此，为建立有效的控制方法以实现 BYQ-III 型球形滚动机器人准确的路径跟踪，需要首先建立该球形滚动机器人的运动模型。

在推导 BYQ-III 型球形滚动机器人的运动方程之前，首先对该球形机器人系统作出如下合理性假设。

假设 1: BYQ-III 型球形滚动机器人的外壳为均质对称的薄壁球壳，并且该球形滚动机器人在地面上运动时球壳纯滚动且无自转<sup>[9-8, 11]</sup>。

当 BYQ-III 型球形滚动机器人在地面上滚动时，若忽略球壳与内部驱动单元的耦合动力学特性，则该球形机器人系统可以等效为如图 2 所示的具有 2 个输入的均质薄壁球壳。 $\Sigma_o\{X, Y, Z\}$  为固连于地面的惯性坐标系， $\Sigma_c\{X_1, Y_1, Z_1\}$  为固连于球壳的运动坐标系， $\Sigma_c$  的坐标原点位于球壳中心

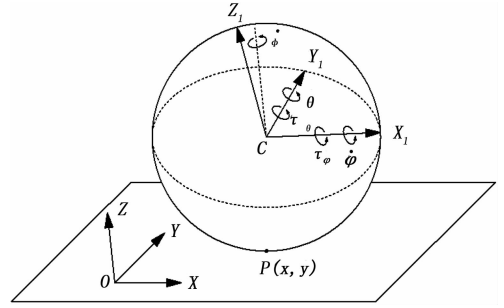


图 2 具有 2 个输入的均质薄壁球壳模型

C。由惯性坐标系  $\Sigma_o$  到运动坐标系  $\Sigma_c$  的 Z-Y-X 欧拉角分别为航向角  $\varphi$ 、横滚角  $\theta$  和俯仰角  $\varphi$ 。 $\tau_\varphi$  和  $\tau_\theta$  分别为框架电机的输出力矩和配重电机的输出力矩。由于球形外壳具有全向对称性，球壳与 XOY 平面的接触点 P 和球壳中心 C 的运动路径完全一致。设球壳与地面的接触点 P 在 XOY 平面内的惯性坐标为  $(x, y)$ ，球壳的半径为  $r$ ，球壳的质量为  $m$ ，球壳的转动惯量为  $I$ 。

该球形滚动机器人纯滚动和无自转的非完整约束可以表示为<sup>[5-8, 11]</sup>：

$$A(q)\bar{q} = 0 \tag{1}$$

式中，广义坐标向量  $q$  和约束矩阵  $A(q)$  分别为：

$$q = [x, y, \varphi, \theta, \varphi]^T \tag{2}$$

$$A(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r\cos\varphi & r\sin\varphi\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 & r\sin\varphi & -r\cos\varphi\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\sin\theta \end{bmatrix} \tag{3}$$

分别计算该球形滚动机器人的动能  $K$  和势能  $P$ ，可得该球形机器人系统的拉格朗日函数  $L$  为：

$$L = K - P =$$

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 - 2\dot{\varphi}\dot{\varphi}\sin\theta) - mgr \tag{4}$$

利用含约束乘子的拉格朗日方程，可得该球形滚动机器人的动力学模型为：

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) = E\tau + \tau_a - A^T(q)\lambda \tag{5}$$

式中， $M(q)$  为惯性矩阵， $N(q, \dot{q})$  为非线性项， $E$  为输入变换阵， $\tau$  为控制向量， $\tau_a \in \mathbb{R}^5$  为扰动和不确定项， $\lambda$  为约束乘子向量；各矩阵和向量分别为：

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -I\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -I\sin\theta & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$N(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I\dot{\varphi}\dot{\varphi}\cos\theta \\ I\dot{\varphi}\dot{\varphi}\cos\theta \\ -I\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}, \tau = \begin{bmatrix} \tau_\theta \\ \tau_\varphi \end{bmatrix}$$

定义矩阵  $C(q)$  为:

$$C(q) = \begin{bmatrix} -A_1^{-1}A_2 \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} r \sin \varphi \cos \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi & -r \cos \varphi \cos \theta \\ 0 & -\sin \theta \end{bmatrix}$$

由约束条件式 (1), 可得该球形机器人系统的运动学模型为:

$$\bar{q} = C(q)v(t) \quad (7)$$

式中,  $v(t) = [v_1 \ v_2]^T = [\dot{\theta} \ \dot{\varphi}]^T$ 。

对式 (7) 求导并将所得  $\bar{q}$  的表达式代入式 (5), 再将所得方程两侧左乘  $C^T(q)$ , 可以得到:

$$\tilde{M}(q)\bar{v} + C^T(q)M(q)\bar{C}(q,\bar{q})v + C^T(q)N(q,\bar{q}) = \tau + \bar{\tau}_d \quad (8)$$

式中,  $\tilde{M}(q) = C^T(q)M(q)C(q)$ ,  $\bar{\tau}_d = C^T(q)\tau_d$ 。

引入新的控制输入  $u$  为:

$$u = \tilde{M}(q)^{-1}[\tau - C^T(q)M(q)\bar{C}(q,\bar{q})v - C^T(q)N(q,\bar{q})] \quad (9)$$

式中,  $u = [u_1 \ u_2]^T$ 。

将式 (9) 代入式 (8), 可得该球形机器人系统的简化动力学模型为:

$$\bar{v}(t) = u + u_d \quad (10)$$

式中,  $u_d = \tilde{M}^{-1}(q)\bar{\tau}_d$ 。

至此, 该球形机器人系统的运动方程可以表示为:

$$\begin{aligned} \bar{q} &= C(q)v(t) \\ \bar{v}(t) &= u + u_d \end{aligned} \quad (11)$$

## 2 路径跟踪控制器设计

### 2.1 滑模自适应增益控制律设计

对于球形滚动机器人, 其路径跟踪的控制目的是实现球壳与地面的接触点  $P$  对于地面上参考几何路径的准确跟踪。

设地面上给定的参考几何路径为:

$$f(x, y) = 0 \quad (12)$$

这里, 假设参考路径的描述函数  $f(x, y)$  足够光滑, 光滑函数  $f(x, y)$  存在关于  $x$  和  $y$  的二阶偏导数。

定义球形机器人系统的路径跟踪误差为:

$$e_p = f(x, y) \quad (13)$$

至此, 式 (11) 所示的球形机器人系统的路径跟踪的控制目标转化为选取适当的控制律  $u$ , 使式 (13) 所示的球形滚动机器人的路径跟踪误差  $e_p$  收敛至零。

基于球形机器人系统路径跟踪控制的上述目标, 分别

设计机器人系统的滑动变量  $s_1$  和  $s_2$  为:

$$\begin{aligned} s_1 &= \bar{e}_p + c_1 e_p \\ s_2 &= v_2 - c_2 \end{aligned} \quad (14)$$

式中,  $c_1$  和  $c_2$  为正常数。

由式 (13) 和式 (11), 可以得到:

$$\bar{e}_p = \frac{\partial f}{\partial q} \bar{q} = J_1(q)C(q)v \quad (15)$$

式中,

$$J_1(q) = \frac{\partial f}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对式 (15) 求导, 进一步可得:

$$\dot{\bar{e}}_p = \frac{\partial (J_1 C v)}{\partial q} C v + J_1(q)C(q)u + d_1 \quad (16)$$

式中,  $d_1 = J_1(q)C(q)u_d$ 。

由式 (7) 和式 (11), 可以得到:

$$\bar{v}_2 = \frac{\partial v_2}{\partial v} \bar{v} = J_2 u + d_2 \quad (17)$$

式中,  $J_2 = \frac{\partial v_2}{\partial v} = [0 \ 1]$ ,  $d_2 = J_2 u_d$ 。

对式 (14) 求导, 由式 (15) 至式 (17) 可得:

$$\dot{\bar{S}} = G + Bu + \bar{u}_d \quad (18)$$

式中,

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} \frac{\partial (J_1 C v)}{\partial q} C v + c_1 J_1 C v \\ 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} J_1 C \\ J_2 \end{bmatrix} \quad \bar{u}_d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = Bu_d \end{aligned}$$

由式 (6)、式 (15) 和式 (17), 可以得到:

$$B =$$

$$\begin{bmatrix} -r \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi \right) & r \cos \theta \left( \frac{\partial f}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial f}{\partial x} \sin \varphi \right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

由式 (19) 可知, 控制阵  $B$  的可逆性与机器人系统状态  $\varphi$  的取值和参考路径的描述函数  $f(x, y)$  的性质有关。不失一般性, 这里假设  $\frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi$  在机器人系统的状态变化过程中非奇异。对式 (18) 采用如下的非线性状态反馈控制律:

$$u = B^{-1}v - B^{-1}G \quad (20)$$

式中,  $v = [v_1 \ v_2]^T$  为待定的新控制输入。

将式 (20) 代入式 (18), 可以得到:

$$\dot{\bar{S}} = v + \bar{u}_d \quad (21)$$

对于式 (21) 中的扰动和不确定项  $\bar{u}_d$ , 这里假设其有界但其上界未知, 即存在未知正常数  $d_{M1}$  和  $d_{M2}$  使得如下关系成立:

$$|d_1| \leq d_{M1} \quad |d_2| \leq d_{M2} \quad (22)$$

在式 (21) 基础上, 设计滑模自适应增益控制器为:

$$\nu = -\alpha(t) \operatorname{sign}(S) - \beta S \quad (23)$$

式中,

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1(t) & 0 \\ 0 & \alpha_2(t) \end{bmatrix} \quad \operatorname{sign}(S) = \begin{bmatrix} \operatorname{sign}(s_1) \\ \operatorname{sign}(s_2) \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

式中,  $\beta_1$  和  $\beta_2$  为正常数; 切换增益  $\alpha_i(t)$  如下所示:

$$\bar{\alpha}_i(t) = \begin{cases} \gamma_i |s_i| \operatorname{sign}(|s_i| - \varepsilon_i) & \alpha_i > \sigma_i \\ \mu_i & \alpha_i \leq \sigma_i \end{cases} \quad (24)$$

式中,  $\gamma_i > 0, \alpha_i(0) > 0; \varepsilon_i, \sigma_i$  和  $\mu_i$  为很小的正常数。在式 (24) 中, 引入参数  $\sigma_i$  和  $\mu_i$  的目的只是为了保证控制器的切换增益  $\alpha_i(t) > 0$ 。为求清晰起见, 在本文后面的分析和讨论中不失一般性地假设: 对于任意时刻  $t$ , 均有  $\alpha_i(t) > \sigma_i$ 。

对于本文设计的路径跟踪控制器式 (23), 这里进一步作出如下几点说明:

(1) 路径跟踪控制只要求式 (13) 所示的路径跟踪误差  $e_p$  收敛至零, 即仅需保证式 (14) 中滑动变量  $s_1$  的收敛性。由此可以看出, 式 (14) 中滑动变量  $s_2$  的设计并不唯一。一般而言, 可以选取式 (7) 所示的准速度  $v_1$  或  $v_2$  作为被控量来设计机器人系统的滑动变量  $s_2$ , 从而使式 (18) 所示的矩阵  $G$  和  $B$  具有相对简单的形式。对于式 (14) 中滑动变量  $s_2$ , 其中的正常数  $c_2$  的取值与稳态时球形滚动机器人的运动速度有关。由式 (7) 不难看出, 正常数  $c_2$  的取值越大, 机器人系统进入滑动模态后球壳的滚动速度就越快。

(2) 由式 (23) 和式 (24) 可以看出, 本文设计的滑模控制律实际上由变速趋近项  $-\alpha_i(t) \operatorname{sign}(s_i)$  和指数趋近项  $-\beta_i s_i$  两部分构成。在本文控制律式 (23) 中, 变速趋近项能够根据滑动变量  $s_i$  的变化自适应地调节控制器的切换增益  $\alpha_i(t)$ 。当  $|s_i| > \varepsilon_i$  时, 切换增益  $\alpha_i(t)$  逐渐增大使其足以压制扰动和不确定项  $d_i$ 。当  $s_i$  减小至  $|s_i| < \varepsilon_i$  时, 切换增益  $\alpha_i(t)$  逐渐减小, 以减轻滑模控制器的抖振现象。与文献 [12] 方法相比, 本文方法在控制律式 (23) 中进一步加入了指数趋近项  $-\beta_i s_i$ , 指数趋近项  $-\beta_i s_i$  能够动态地适应滑动变量  $s_i$  的变化, 可使滑动变量  $s_i$  更快地收敛至零。系统状态越远离滑动面  $s_i = 0$ , 指数趋近项的控制作用就越强。

(3) 受建模误差和外部干扰等不确定性的不良影响, 实际机器人系统无法产生理想的滑动模态  $s_i = 0$ , 只能在较小的零邻域内建立真实的滑动模态。对于本文设计的自适应滑模控制器式 (23), 滑动变量  $s_i$  能够在有限时间内收敛至零邻域  $|s_i| < \varepsilon_i$ , 并在此后始终保持在一个更大的收敛域  $|s_i| < \delta_i$  内, 即机器人系统的真实滑动模态在零邻域  $|s_i| < \delta_i$  内存在。该零邻域收敛半径  $\delta_i$  的具体表达式如式 (25) 所示, 收敛半径  $\delta_i$  的大小可以通过调节参数  $\gamma_i$  来进行控制, 正常数  $\gamma_i$  取值越大, 收敛半径  $\delta_i$  越小。

$$\delta_i = \sqrt{\varepsilon_i^2 + \frac{d_{Mi}^2}{\gamma_i}} \quad (25)$$

## 2.2 稳定性分析

定理 1: 对于式 (11) 所示的球形机器人系统, 按式 (14) 设计机器人系统的滑动变量  $s_1$  和  $s_2$ , 若采用式 (20) 和式 (23) 所示的输入变换和控制输入  $\nu$ , 则机器人系统的滑动变量  $s_1$  和  $s_2$  能在有限时间内收敛至  $|s_i| < \delta_i$ 。

证明: 首先, 证明控制器的切换增益  $\alpha_i(t)$  是有界的。

关于控制器的切换增益的有界性, 本文此处只进行定性的说明, 更为详细的分析请参阅文献 [12]。

不妨设初始时刻为  $t_0$ , 并且当  $t = t_0$  时  $|s_i(t_0)| > \varepsilon_i$ 。由切换增益的自适应律式 (24) 可知, 从初始时刻  $t_0$  开始切换增益  $\alpha_i(t)$  逐渐增大。又由扰动和不确定项  $d_i$  的有界性可知, 必然存在某时刻  $t_1$ , 当  $t = t_1$  时切换增益足以克服扰动和不确定项  $d_i$ , 并使滑动变量  $s_i(t)$  从  $t_1$  时刻开始逐渐减小。设当  $t = t_2$  时, 滑动变量  $s_i(t)$  已减小至  $|s_i(t_2)| < \varepsilon_i$ 。由切换增益的自适应律式 (24) 可知, 从  $t_2$  时刻开始切换增益  $\alpha_i(t)$  逐渐减小, 并且当  $t = t_2$  时切换增益达到最大值  $\alpha_i(t_2)$ 。由于切换增益  $\alpha_i(t)$  不断减小, 因此必然存在某时刻  $t_3$ , 当  $t = t_3$  时切换增益已不足以压制扰动和不确定项  $d_i$ , 于是滑动变量  $s_i(t)$  从  $t_3$  时刻开始逐渐增大。设当  $t = t_4$  时滑动变量  $s_i(t)$  已增大至  $|s_i(t_4)| > \varepsilon_i$ , 于是上述过程又从  $t_4$  时刻开始不断重复、循环。

通过对上述过程的分析可以看出, 在控制过程中的任意时刻  $t$ , 控制器的切换增益  $\alpha_i(t)$  均是有界的。由控制器的切换增益  $\alpha_i(t)$  的有界性可知, 必定存在正常数  $\bar{\alpha}_i > d_{Mi}$  使得:

$$\alpha_i(t) \leq \bar{\alpha}_i, \forall t > 0 \quad (26)$$

然后, 分别对  $|s_i| > \varepsilon_i$  和  $|s_i| < \varepsilon_i$  两种情况进行分析。

(1) 对于  $|s_i| > \varepsilon_i$  的情况, 这里采用 Lyapunov 稳定性理论证明滑动变量  $s_i$  能够在有限时间内收敛至  $|s_i| < \varepsilon_i$ 。定义 Lyapunov 函数  $L_i(t)$  为:

$$L_i(t) = \frac{1}{2} s_i^2 + \frac{1}{2\xi_i} (\alpha_i - \bar{\alpha}_i)^2 \quad (27)$$

式中,  $\xi_i$  为小于  $\gamma_i$  的正常数。

对式 (27) 求导, 由式 (21) 至式 (24) 可得:

$$\begin{aligned} \bar{L}_i(t) &= s_i \cdot \dot{s}_i + \frac{\bar{\alpha}_i}{\xi_i} (\alpha_i - \bar{\alpha}_i) \leq \\ &= -\alpha_i |s_i| - \beta_i s_i^2 + d_{Mi} |s_i| - \frac{\gamma_i}{\xi_i} |s_i| (\bar{\alpha}_i - \alpha_i) \leq \\ &= -\alpha_i |s_i| + \bar{\alpha}_i |s_i| - \bar{\alpha}_i |s_i| + d_{Mi} |s_i| - \frac{\gamma_i}{\xi_i} |s_i| (\bar{\alpha}_i - \alpha_i) \end{aligned} \quad (28)$$

当  $|s_i| > \varepsilon_i$  时, 由式 (28) 进一步可得:

$$\begin{aligned} \bar{L}_i(t) &\leq -(\bar{\alpha}_i - d_{Mi}) |s_i| - \frac{\varepsilon_i (\gamma_i - \xi_i)}{\xi_i} |\alpha_i - \bar{\alpha}_i| = \\ &= -\sqrt{2} (\bar{\alpha}_i - d_{Mi}) \frac{|s_i|}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2} \varepsilon_i (\gamma_i - \xi_i)}{\sqrt{\xi_i}} \frac{|\alpha_i - \bar{\alpha}_i|}{\sqrt{2 \xi_i}} \leq \end{aligned}$$

$$-\rho_i \left( \frac{|s_i|}{\sqrt{2}} + \frac{|\alpha_i - \bar{\alpha}_i|}{\sqrt{2\xi_i}} \right) \leq -\rho_i L_i^+(t) \quad (29)$$

$$\text{式中, } \rho_i = \min \left( \sqrt{2}(\bar{\alpha}_i - d_{M_i}), \frac{\sqrt{2}\epsilon_i(\gamma_i - \xi_i)}{\sqrt{\xi_i}} \right)。$$

由式(29)可见,滑动变量  $s_i$  必能在有限时间内由初始值  $|s_i(0)| > \epsilon_i$  收敛至  $|s_i| < \epsilon_i$ 。

(2) 对于  $|s_i| < \epsilon_i$  的情况,需要借助不确定性的上界  $d_{M_i}$  进行分析。由式(28)可以看出,当  $|s_i| < \epsilon_i$  时 Lyapunov 函数的导数  $\bar{L}_i(t)$  的定号性是不确定的,因此无法确定闭环系统的稳定性。显然,当 Lyapunov 函数的导数  $\bar{L}_i(t) > 0$  时,滑动变量  $s_i$  会逐渐增大并使  $|s_i| > \epsilon_i$ 。虽然当  $|s_i| > \epsilon_i$  时,控制器的切换增益  $\alpha_i(t)$  会不断增大,但在其增大至足以克服扰动和不确定项  $d_i$  之前,滑动变量  $s_i$  仍然会继续增大并使  $|s_i| > \epsilon_i$ ,而在切换增益  $\alpha_i(t)$  增大至足以克服扰动和不确定项  $d_i$  之后,滑动变量  $s_i$  又会逐渐减小至  $|s_i| < \epsilon_i$ 。

由上述分析过程容易看出,当  $|s_i| < \epsilon_i$  时滑动变量  $s_i$  并不能始终维持在该零邻域内,但是能够始终保持在一个具有更大收敛半径的零邻域中。对于式(23)所示的自适应滑模控制律,当  $|s_i| < \epsilon_i$  时显然有  $\beta_i |s_i| \leq \alpha_i(t)$ ,此时可忽略控制律式(23)中的指数趋近项  $-\beta_i s_i$ 。然后再按照文献[12]的证明过程可证,当  $|s_i| < \epsilon_i$  时滑动变量  $s_i$  能够始终保持在零邻域  $|s_i| < \delta_i$  内。限于篇幅,关于滑动变量  $s_i$  的收敛域的详细分析请参阅文献[12],本文此处不再赘述。

由以上证明过程可知,机器人系统的滑动变量  $s_i$  能在有限时间内收敛至零邻域  $|s_i| < \delta_i$ ,即机器人系统的真实滑动模态在零邻域  $|s_i| < \delta_i$  内存在。

### 3 仿真研究

为验证本文所提出的路径跟踪控制策略的有效性,在 Matlab 环境中进行路径跟踪控制的数值仿真实验。BYQ-III 型球形滚动机器人的物理参数分别为:

$$m = 7.1 \text{ kg} \quad r = 0.3 \text{ m} \quad I = \frac{2mr^2}{3} = 0.426 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

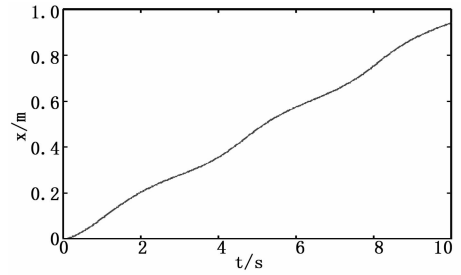
为测试本文设计的路径跟踪控制器的鲁棒性,假设实际机器人系统各物理参数与其名义值相差 10%。数值仿真实验中,分别取:

$$\bar{m} = 7.81 \text{ kg} \quad \bar{r} = 0.33 \text{ m} \quad \bar{I} = \frac{2\bar{m}\bar{r}^2}{3} = 0.567 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

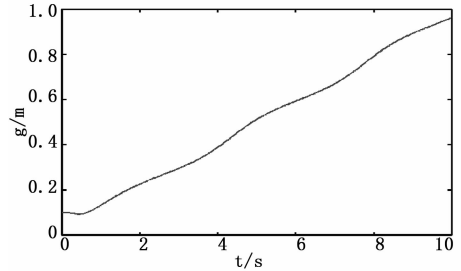
设球形机器人系统的初始条件为:

$$(x_0, y_0, \varphi_0, \theta_0, \dot{\varphi}_0) = \left( 0, 0.1, -\frac{\pi}{2}, 0, 0 \right) \quad (\bar{\theta}_0, \bar{\varphi}_0) = (0, 0)$$

本文设计的路径跟踪控制器的各参数分别取为:  $c_1 = 4.8, c_2 = 0.9, \epsilon_1 = \epsilon_2 = 0.05, \beta_1 = 4.5, \beta_2 = 1.3, \gamma_1 = 3.4, \gamma_2 = 7.5, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.1, \mu_1 = \mu_2 = 0.1$ 。需要说明的是,所设计的路径跟踪控制器中并未计入机器人系统模型参数的变化。数值仿真实验中,选取式(30)所示的直线路径作为



(a) 球心坐标变量x的变化曲线



(b) 球心坐标变量y的变化曲线

图3 球心位置的变化曲线(仿真结果)

球形滚动机器人的参考路径:

$$f(x, y) = x - y = 0 \quad (30)$$

由式(30)可以看出,本文选取的参考路径与文献[11]选取的期望轨迹虽为同一直线,但在不同的跟踪控制问题中参考路径(或期望轨迹)的描述方式是完全不同的。

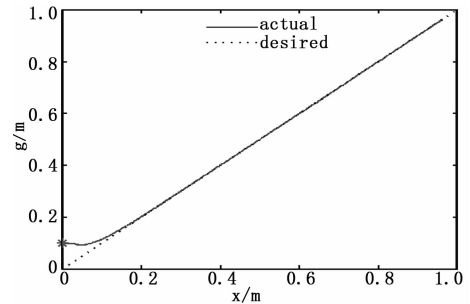


图4 直线路径跟踪的仿真结果

仿真时间设为 10 s,基于自适应滑模控制算法的路径跟踪控制器的控制效果如图3和图4所示,图4中星号指示机器人的出发位置。由图3和图4可以看出,球形滚动机器人准确地到达了给定的参考路径,并在此后始终在指定的参考路径上滚动。由仿真结果可见,本文设计的路径跟踪控制器控制性能良好,被控对象中存在的参数变化不确定性得到了有效抑制,从而表明本文设计的路径跟踪控制器具有很强的鲁棒性。

### 4 实验结果

为进一步验证本文设计的路径跟踪控制器的有效性,利用 BYQ-III 型球形滚动机器人实物样机在室外的塑胶跑道上进行路径跟踪控制实验,实验环境如图5所示。路径跟踪控制实验中,借助安装在内部框架上的姿态测量系统

和框架电机的光电码盘,可以得到球壳的姿态角和角速度。在此基础上,利用式(6)可得出球壳中心的速度,然后采用对速度积分的方法可以计算出球壳中心位置<sup>[11]</sup>。

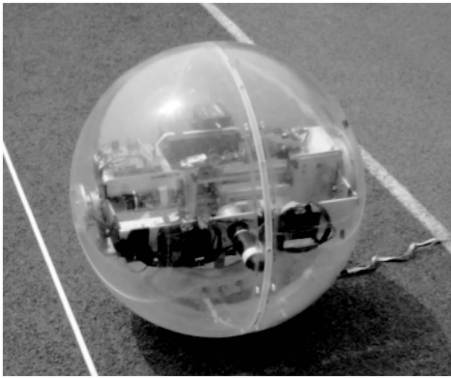


图5 塑胶跑道控制实验环境

在路径跟踪控制实验中,采样周期设为 0.05 s,实验时间取为 10 s。与数值仿真实验相同,在进行路径跟踪控制实验时,仍采用式(30)所示的直线路径作为参考几何路径。在路径跟踪控制实验中,设球形滚动机器人的出发位置为  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ,其余机器人系统状态的初始值均与数值仿真实验相同。对于式(30)所示的直线参考路径,定义最大路径跟踪误差  $e_{\max}$  和平均路径跟踪误差  $\bar{e}$  以评价本文设计的路径跟踪控制器的实际性能:

$$e_{\max} = \max_i |x(t_i) - y(t_i)| \quad \bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^m |x(t_i) - y(t_i)|}{m} \quad (30)$$

式中,  $t_i$  表示第  $i$  次采样时刻,  $m$  表示采样点数量。

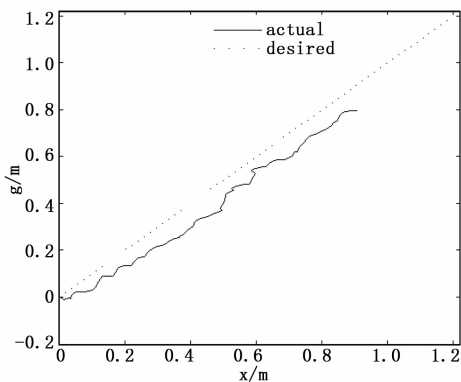


图6 直线路径跟踪的实验结果

路径跟踪控制实验过程中,球壳中心位置的变化曲线如图6所示。由图6可见,本文设计的路径跟踪控制器取得了较为满意的控制效果,球形滚动机器人的实际运动路径能够稳定在指定的参考几何路径附近。具体而言,在本文控制器作用下球形滚动机器人的最大路径跟踪误差为  $e_{\max} = 0.13$  m,平均路径跟踪误差为  $\bar{e} = 0.08$  m。模型简化带来的建模误差、传感器测量噪声和地面对球壳的随机干扰是使

球形滚动机器人的实际运动路径偏离参考几何路径的主要因素。球形滚动机器人实物样机的实验结果表明,本文设计的滑模自适应增益控制器能够较为有效地实现球形滚动机器人对于地面上给定的参考几何路径的准确跟踪。

## 5 结论

针对一种球形滚动机器人的路径跟踪控制问题,本文提出了一种自适应滑模控制策略。所提出的控制策略无需知道有界扰动和不确定性的上界,能够通过动态调整控制器的切换增益使机器人系统在有限时间内进入真实的滑动模态。理论分析和仿真结果表明,本文提出的控制策略能够保证球形滚动机器人的实际运动路径收敛于期望的参考路径。样机实验结果进一步验证了理论分析的正确性和本文设计的滑模自适应增益控制器的跟踪性能。基于多体动力学模型和视觉定位的球形滚动机器人路径跟踪问题是本文下一步研究工作的重点。

## 参考文献:

- [1] Liu D, Sun H, Jia Q. Stabilization and path following of a spherical mobile robot [A]. Proceedings of IEEE International Conference on Robotics, Automation and Mechatronics [C]. Chengdu, China, 2008; 676-682.
- [2] 刘大亮,孙汉旭,贾庆轩. 基于曲率控制的球形机器人路径跟踪 [J]. 高技术通讯, 2008, 18 (11): 1161-1167.
- [3] 叶平,韩亮亮,张天石,等. 具有立体视觉的球形机器人及其运动控制 [J]. 机械工程学报, 2013, 49 (11): 8-15.
- [4] 安凯. 球形机器人驱动系统设计与路径跟踪控制 [J]. 农业机械学报, 2014, 45 (2): 302-307.
- [5] Zheng M H, Zhan Q, Liu J K, et al. Control of a spherical robot: path following based on nonholonomic kinematics and dynamics [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2011, 24 (3): 337-345.
- [6] Cai Y, Zhan Q, Xi X. Path tracking control of a spherical mobile robot [J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 51 (1): 58-73.
- [7] Yu T, Sun H, Jia Q, et al. Path following control of a spherical robot rolling on an inclined plane [J]. Sensors and Transducers, 2013, 21 (SI. 5): 42-47.
- [8] Cai Y, Gao F, Liu Z N. Neural network compensation method for path tracking control of a spherical mobile robot [J]. Applied Mechanics and Materials, 2014, 635-637: 1325-1328.
- [9] 孙汉旭,王亮清,贾庆轩,等. BYQ-3球形机器人的动力学模型 [J]. 机械工程学报, 2009, 45 (10): 8-14.
- [10] 王亮清. 球形机器人的动力学和静态稳定研究 [D]. 北京:北京航空航天大学, 2007.
- [11] 于涛,杨昆,赵伟. 一种球形机器人的自适应鲁棒轨迹跟踪控制 [J]. 中国测试, 2018, 44 (3): 102-108.
- [12] Plestan F, Shtessel Y, Bregeault T V, et al. New methodologies for adaptive sliding mode control [J]. International Journal of Control, 2010, 83 (9): 1907-1919.