

levy 噪声背景下级联系统中弱信号的提取

刘运江, 王辅忠, 刘露

(天津工业大学 理学院, 天津 300387)

摘要: 针对冲击噪声背景下弱周期信号难以提取的问题, 提出了以 levy 噪声作为背景噪声的级联随机共振方法; 首先, 在数值上分析了随机共振系统最佳参数区间与 levy 噪声参数的关系; 其次, 总结了系统输出的微弱信号频谱值跟随系统参数的变化规律; 最后, 利用级联系统对 levy 噪声背景下微弱信号的提取进行了研究; 实验结果表明, 随机共振参数的最佳区间不随噪声参数 α 、 β 的变化而变化; 系统输出信号的频谱幅值会随噪声参数 α 、 β 的改变而改变, 但浮动不大; 在级联系统中, 二级系统输出的待检测信号频谱值是一级系统的 2.2 倍; 该系统对冲击环境中弱信号的提取具有很强的实用性。

关键词: 随机共振; levy 噪声; 级联系统; 信噪比; 频谱值

Extraction of Weak Signal in Cascaded System Under levy Noise

Liu Yunjiang, Wang Fuzhong, Liu Lu

(School of Science, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387, China)

Abstract: Aiming at the difficulty of extracting weak periodic signals in the background of impact noise, the cascade stochastic resonance method based on levy noise as background noise is proposed. Firstly, the relationship between the spectrum value of weak signal and the levy noise parameters is summarized numerically. Secondly, the changes of the parameters of the system parameters are analyzed. Finally, the cascade system is used to extract the weak signal under the background of levy noise. The results show that the optimal interval of the random resonance parameters don't change with the change of the noise parameter α and β . The amplitude of the system output signal will change with the change of noise parameter α and β , but not much. In cascade system, the spectrum value of the output signal to be detected by the second level system is 2.2 times that of the first level system. The system has strong practicability for the extraction of weak signal in the impact environment.

Keywords: stochastic resonance; levy noise; cascaded system; signal-to-noise ratio; spectral value

0 引言

随机共振的概念是由 Benzi 等人^[1]在 1981 年提出来的, 当时只是为了解释地球古气象冰川期与暖气期的交替问题。在 1983 年, Fauve 等人^[2]依据随机共振思想, 在 Schmitt 触发器电路中加入了一定强度的噪声, 奇迹地发现触发器输出的信噪比出现了一个峰值, 即随机共振现象的产生, 开创了随机共振在信号处理领域中应用的先河。在过去的二三十年里, 随机共振已成为强噪声背景下弱信号检测的重要方法之一^[3-5]。

随着社会与科技的发展, 信息在人们的生活与生产中扮演着越来越重要的角色。然而在现实世界中, 有信号的地方必然伴随着噪声的存在, 对于如何在强噪声背景下获取微弱信号的问题已成为目前信息技术学科研究的热点课题之一。随机共振作为信息处理的重要工具之一, 已在生物学、电子学、通信学、光学、神经网络等学科领域得到了广泛的应用^[6-10]。

在现有随机共振领域的研究中^[11-14], 应用的背景噪声大多是高斯白噪声, 高斯白噪声是一种极为理想的噪声, 而部分信道环境中的噪声往往含有较强的冲击性, 并不符合高斯分布, levy 噪声包含了多个随机变量产生随机因素的影响, 能够更好地描述这些冲击特性。目前, 以 levy 噪声作为背景噪声在级联系统中的应用还没有得到研究。级联系统作为微弱信号提取的重要工具之一, 具有结构简单和系统稳定等优点, 再加上 levy 噪声具有的普遍性, 能够使随机共振的应用领域更加宽广。

1 Levy 噪声分布函数及其频谱图像

Levy 噪声又叫 alpha 噪声, 服从于 alpha 稳定分布理论, 是唯一满足广义中心极限定理的分布, 其拖尾以平方律衰减。Levy 噪声的特征函数表达式^[15]如下:

$$\log \varphi(t) = \begin{cases} -\sigma |t|^\alpha \left\{ 1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right\} + i\mu t & \alpha \neq 1 \\ -\sigma |t| \left\{ 1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \frac{\pi}{2} \log(|t|) \right\} + i\mu t & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} X = S_{\alpha,\beta} \frac{\sin(\alpha(V+B_{\alpha,\beta}))}{(\cos V)^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos(V-\alpha(V+B_{\alpha,\beta}))}{W} \right)^{(1-\alpha)/\alpha} & \alpha \neq 1 \\ X = \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta V \right) \tan V - \beta \log \left(\frac{W \cos V}{\frac{\pi}{2} + \beta V} \right) \right] & \alpha = 1 \end{cases} \quad (2)$$

收稿日期: 2018-06-20; 修回日期: 2018-07-16。

基金项目: 国家自然科学基金(61271011)。

作者简介: 刘运江(1991-), 男, 硕士研究生, 主要从事强噪声背景下微弱信号的检测方向的研究。

王辅忠(1960-), 男, 博士, 教授, 硕士研究生导师, 主要从事随机共振, 左手材料等方向的研究。

式 (1) 中, $\alpha \in (0, 2)$ 为特征指数, 决定分布拖尾的衰减速率, 当 $\alpha=1$ 时为柯西分布, 当 $\alpha=2$ 时服从于均值为 μ 、方差为 $2\sigma^2$ 的高斯分布, 当 $\alpha \neq 2$ 时, 分布的均值为 μ , 而方差不存在。 $\beta \in [-1, 1]$ 为偏斜参数, 当 $\beta=0$ 时图形左右对称, 当 β 为正时, 图形向右倾斜, 反之, 图形向左倾斜。 $\sigma > 0$ 为尺度参数, 决定着分布关于 μ 的离散成度。 $\mu \in R$ 为位置参数, 通过调节 μ 的值可以实现左右平移。 *Rfal Weron*^[15] 证明了 *levy* 分布随机变量的表达式。式 (2) 中, V 服从区间为 $(-2\pi, 2\pi)$ 的均匀分布, W 服从均值为 1 的指数分布。 $S_{\alpha,\beta}$ 与 $B_{\alpha,\beta}$ 的定义表达式如下:

$$S_{\alpha,\beta} = \left[1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2} \right]^{1/2\alpha}$$

$$B_{\alpha,\beta} = \frac{\arctan\left(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\alpha}$$

在 $\beta=0, \sigma=1$ 和 $\mu=0$ 的条件下, 不同的 α 特征指数所对应的 *levy* 分布如图 1 所示。由图 1 可以看出, α 越小, 噪声的冲击性越强。本文采用文献[16]的截断方法, 对系统输入信号进行预处理。

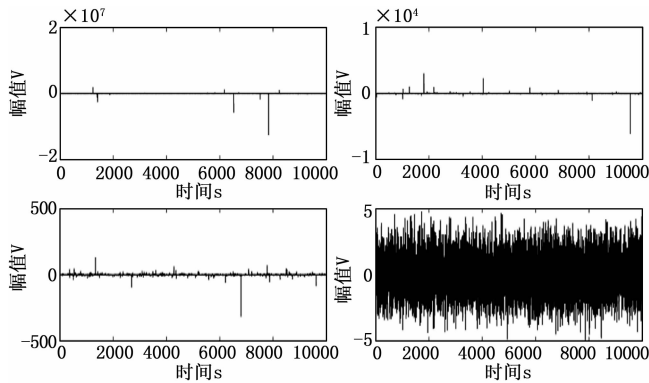


图 1 不同特征指数 α 所对应的 *levy* 噪声时域分布图

2 双稳态系统原理

2.1 随机共振系统模型

在所有随机共振系统中, 双稳态系统是最为典型的一种非线性系统, 主要用于在强噪声背景下微弱信号的增强检测, 已在生物、物理、化学等自然学科中得到了广泛的应用。具有独特双势阱结构的朗之万方程 (LE) 可以作为描述双稳态随机共振系统的典型模型, 其方程如下:

$$\frac{dx}{dt} = U'(x) + S(t) + \epsilon(t) \quad (3)$$

其中: $U(x) = -ax^2/2 + bx^4/4$, a 与 b 为双势阱系统参数, 且 $a > 0, b > 0$, $U(x)$ 为双稳态势函数, 通过改变 a 和 b 的值可以实现对势垒高度 ΔU 的调控, $S(t)$ 是 $A \cos(2\pi ft)$ 的微弱周期信号, $\epsilon(t)$ 为 *levy* 噪声。设 a 和 b 均为 1, 得到双稳态势函数结构如图 2 所示, 从图中我们可以看到, 势函数共有 2 个稳定点, 分别在 $x = \pm \sqrt{a/b}$ 处, 势垒高度 ΔU 为 $a^2/(4b)$ 。级联系统就是将 2 个双稳态系统串联起来, 即第一个双稳态系统的输出作为第 2 个双稳态系统的输入, 让系统发生两次随机共振, 进一步增强信号强

度, 削弱噪声能量。

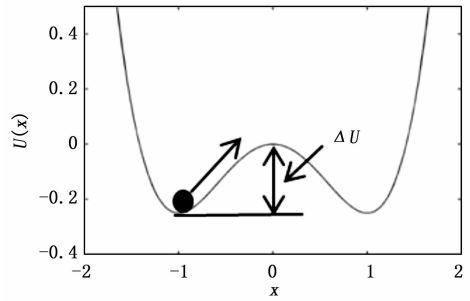


图 2 当 $\alpha=1, b=1$ 时, 双稳态系统的势阱图

2.2 粒子密度函数曲线及粒子相图分布

方程 (1) 对应的 Fokker-Plank 为:

$$\frac{\partial \rho(s,t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} A(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x) \right] \rho(s,t) \quad (4)$$

其中: $A(x) = ax - bx^3 + S(x)$, $B(x) = D$ 。由于方程 (4) 为超越方程, 无法对其进行直接求解, 但可利用有限差分的方法对方程 (1) 进行近似数值计算。设系统参数 a, b 分别为 0.6 和 0.3, 信号幅值 A 与频率 f 分别为 0.3 和 0.005, 噪声参数 α, β, σ 和 μ 分别为 2、0、1 和 0, 得到粒子密度概率分布曲线如图 3 所示。图 3 中, Line1、Line2 和 Line3 的噪声强度 D 分别为 0、0.3 和 0.5。当噪声强度为 0 时, 粒子密度分布如图 3 (a) 的 Line1 所示, 此时粒子仅受信号的牵引, 密度曲线相对光滑。噪声强度 D 由 0 变为 0.3 后, 由图 3 (a) 的 Line2 可以看出, 粒子密度分布依然主要集中在零点的一侧。当噪声强度 D 增加到 0.5 时 (图 3 (a) 的 Line3), 粒子分布在零点的两侧, 但左右两侧分布并不均匀。从微观粒子的运动规律的角度上来解释这一现象, 当噪声强度 D 为 0.3 时, 由于外界噪声激励强度不够, 粒子获得的能量不足以使其越过势垒, 只能在一个势阱中左右运动, 所以对应粒子的概率密度分布集中在零点的一侧。至于其分布是在势阱还是在右势阱中, 是由粒子在零点时刻所受信号的牵引与噪声干扰的合力决定。当噪声强度为 0.5 时, 粒子受到较强的噪声激励, 获得了足够能量跃过势垒从一个势阱进入了另外一个势阱之中。此时, 粒子在势阱间的转移会受到噪声的影响, 因此, 粒子在零点两侧分布并不是绝对对称的, 图 3 (a) 中的 Line3 只是这些随机中的一个概率分布。将噪声特征指数 α 改为 1.8, 其余所有参数与图 3 (a) 保持一致, 采用文献[16]的方法, 将系统输入信号幅值大于 3 的冲击分量截断掉, 得到粒子密度分布如图 3 (b) 所示。从图中可以看出, 图 3 (b) 的 Line1 和 Line2 的分布规律分别与图 3 (a) 的 Line2 和 Line3 相似。

图 4 为不同噪声强度 D 激励下随机共振系统中粒子运动的相图轨迹。其中, 噪声参数 α, β, σ 和 μ 分别为 2、0、1 和 0, 信号参数与图 3 保持一致。图 4 (a)、(b)、(c) 和 (d) 的噪声强度 D 分别为 0、0、0.1 和 0.3。从微观粒子的运动规律的角度上对图 4 进行解释。图 4 (a) 的系统参数 a 和 b 分别为 0.1 和 0.5。从图 4 (a) 中可以看出, 此时粒子

运动相图近似关于原点对称，此时势垒高度 ΔU 为 0.005，而信号幅值 A 为 0.3，因此即使在没有外力作用的情况下，粒子凭借信号的牵引依然可以跨越势垒，在 2 个中往复运动。图 4 (b) 的系统参数 a 和 b 分别为 0.8 和 0.5，势垒高度 ΔU 为 0.32，大于信号幅值 0.3，与图 4 (a) 的情况不同，在无外力协助下，粒子是无法跃过势垒的，仅能够在在一个势阱中往复运动。因此，图 4 (b) 的相图轨迹分布在区间 $[1, 1.8]$ 中。图 4 (c)、(d) 系统参数 a 和 b 分别为 12.29 和 0.12。图 4 (c) 的噪声强度较弱，粒子即使获得了部分噪声的能量也无法跨越势垒障碍，粒子仅能在一个势阱中往复运动，与图 4 (b) 相似，由于受噪声的干扰，其相图分布轨迹已不如图 4 (b) 光滑和清晰。增加噪声强度 D ，其余参数与图 4 (c) 保持一致，得到粒子的相图轨迹如图 4 (d) 所示。此时粒子获得足够的外界激励能量，跨越势垒运动到另一个势阱之中，相对来讲，噪声强度越大，粒子在势阱间的跨越频率就越高。由于噪声的强烈干扰，导致图 4 (d) 粒子往返的相图轨迹无法重合，因此看起来比较模糊。

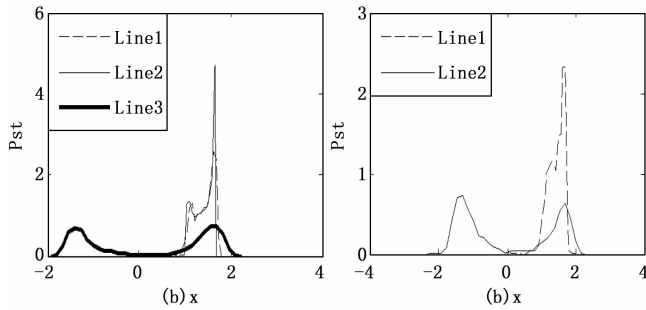


图 3 不同噪声强度 D 激励下系统输出的粒子概率分布

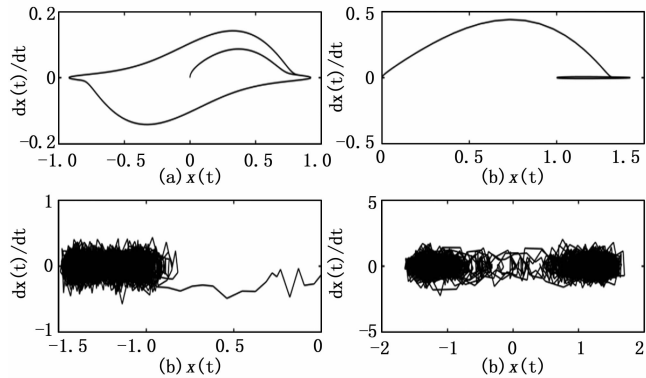


图 4 不同噪声强度 D 激励下系统输出的相图

2.3 数值计算方法

本文采用信噪比^[17]和频谱值作为信号质量改善指标，由于 levy 噪声的复杂性和待检测信号的不确定，很难将信号和噪声区分出来，信噪比只能近似的计算。首先利用信噪比作为信号质量改善指标，通过单级双稳态系统的输出，找到微弱信号频率所在的范围，然后再以频谱幅值作为信号质量改善标准，增大微弱信号的功率。本文采用四节龙格库塔法对公式 (3) 进行求解，具体步骤如式 (5) 所示。

$$\begin{cases} k_1 = ax(n) - bx^3(n) - z(n) \\ k_2 = a\left(x(n) + \frac{k_1}{2}\right) - b\left(x(n) + \frac{k_1}{2}\right)^3 + z(n) \\ k_3 = a\left(x(n) + \frac{k_2}{2}\right) - b\left(x(n) + \frac{k_2}{2}\right)^3 + z(n+1) \\ k_4 = a\left(x(n) + \frac{k_3}{2}\right) - b\left(x(n) + \frac{k_3}{2}\right)^3 + z(n+1) \\ x(n+1) = x(n) + \frac{h}{6}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \end{cases} \quad (5)$$

其中： h 为采样步长， z 为系统输入信号， x 为系统输出信号。

3 Levy 噪声背景下级联系统的随机共振现象。

图 5 为级联随机共振系统仿真模型，其中 levy 噪声是由“From workspace”模块提供，基于该模型结构搭建自适应随机共振系统。整篇文章的参数调节均基于该系统模型。

3.1 以信噪比为信号质量改善标准的随机共振现象

固定 levy 噪声参数 α 、 β 、 σ 和分别为 0.5、0、1 和 0，微弱正弦信号幅值 A 与其频率 f_0 分别为 0.3 和 0.005。图 6 (a)、(b) 分别是系统输入信号的时域分布和频域分布图，从图中可以看出，此时信号已完全湮没在噪声之中。设置系统参数 a 与 b 的扫描区间分别为 $[0, 1]$ 和 $[0, 1]$ ，扫描步长均为 0.01，利用信噪比作为信号质量改善指标，得到系统输出如图 7 (a)、(b) 所示。图 7 (a) 是系统输出的时域分布图，从图中可以观察到微弱周期信号的大致轮廓，从频域图 (图 7 (b)) 中，可以得到微弱信号的频率为 0.005 Hz，此时系统输出信噪比为 16.58 dB。

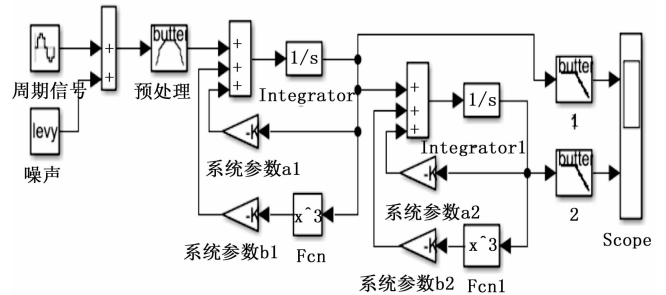


图 5 级联随机共振系统

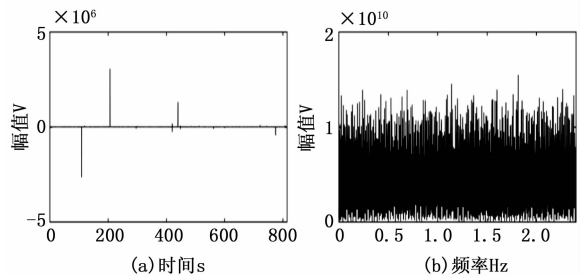


图 6 系统输入信号分布图

然后，分析在不同特征参数 α 与 β 条件下，信号频率 0.005 Hz 处的频谱值跟随双稳系统参数 a 与 b 的变化趋势。设 a 与 b 的扫描区间分别为 $[0, 13]$ 和 $[0, 2]$ ，扫描步长均为 0.01，保持信号参数与噪声参不变，信号在 0.005 Hz

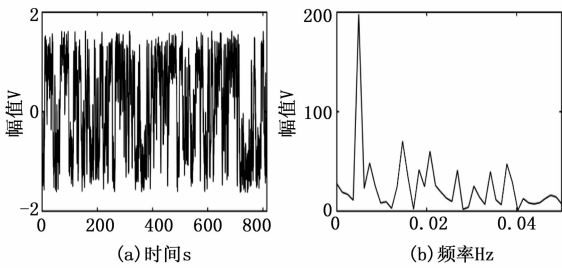


图 7 系统输出信号分布图

处的频幅值随 a 与 b 的变化趋势如图 8 所示。从图 8 中得到, 谱峰达到最高点时的 a 与 b 值分别为 10.29 和 0.12。

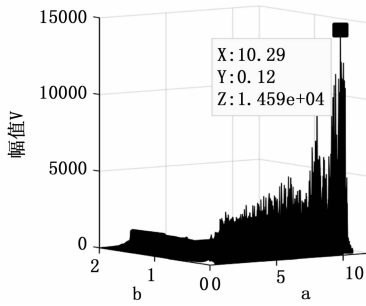


图 8 系统输出待测信号频谱值随系统参数 a 、 b 的变化

3.2 不同噪声参数 α 与 β 下待测信号频谱值随系统参数 a 的变化趋势

固定 b 为 0.12, 信号参数与图 7 保持一致, 噪声参数 σ 和 μ 分别为 1 和 0, 设参数 a 的扫描区间为 $[0, 14]$, 扫描步长为 0.01。得到不同参数 α 与 β 下待测信号的频谱值随系统参数 a 的变化趋势, 如图 9 所示。从图中可以看出, 频谱值随 a 的变化出现了 2 个峰值。从微观粒子运动规律的角度分析, 当 a 从 0 逐渐增大时, a 刚开始太小, 势垒高度也很低, 这时凭借粒子自身的能量就可以跃过势垒, 此时粒子并无获得太多的噪声能量。随着 a 逐渐增大, 势垒有了一定的高度, 但是 a 比较小, 势垒不是很高, 粒子不用获得太多的噪声能量, 就能跃过势垒产生随机共振现象, 因此在 $a \in (0.3, 0.8)$ 中存在一个较为明显的峰值。随着 a 逐步增大, 势垒也随之增高, 粒子需要从噪声中获得一定的能量才能跃过势垒, 在 $a \in (10, 11)$ 时, 信号频谱出现了一个较高的峰值, 三者 (噪声、信号和系统) 达到了最佳协同状态, 此时信号的频谱值也是最高的。如果 a 接着增加, 打破了三者的最佳协同状态, 因此频谱值随之下降。当 a 大于 13 时, 还会造成系统不稳定, 有时出现系统输出无解的状态。再看频谱值与 α 、 β 之间的关系, 从图 9 (a)、(b) 中很容易发现, 不同 α 与 β 下系统输出信号频谱值随系统参数 a 的变化趋势基本相似, 只是在幅值上有相应的差别, 当 a 等于 2 时, 信号的幅值最高。

3.3 不同噪声参数 α 与 β 下待测信号频谱值随系统参数 b 的变化趋势

固定 $a=10.29$, 设定 b 的扫描区间为 $[0, 1]$, 扫描步长 0.01, 其余参数与图 7 保持一致, 图 10 为待测信号的

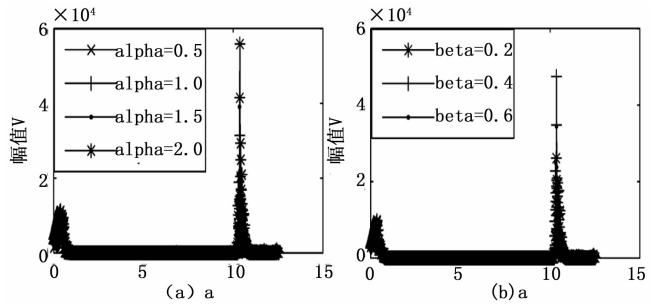


图 9 不同噪声参数 α 与 β 下待测信号频谱值随系统参数 a 的变化图

频谱值随系统参数 b 的变化趋势。与图 9 相似, 当 b 趋于 0 时, 势垒高度趋于无穷大, 这与图 9 中 a 较大时情形一样, 此时粒子很难跃过势垒, 势垒高度随着 b 的增大而减小, 当 b 在 $[0.05, 0.2]$ 区间时, 出现了多个较高的尖峰值。同样, 从图中的趋势可以看出, 系统参数 b 的最佳区间受 levy 噪声参数 α 、 β 的影响不大, 可将最佳参数 b 的区间锁定在 $[0.08, 0.15]$ 中, 不同 α 、 β 所对应的最高幅值差别均浮动在一个数量级内。

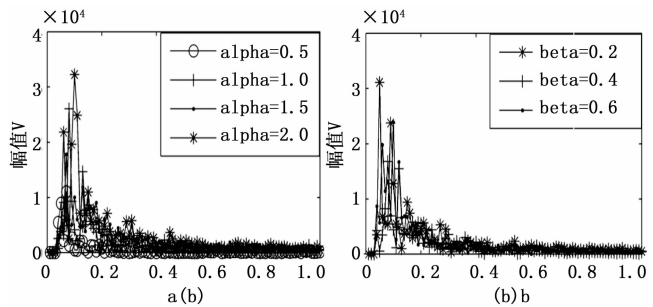


图 10 不同噪声参数 α 与 β 下待测信号频谱值随系统参数 b 的变化图

3.4 levy 噪声驱动的级联系统响应

噪声与信号参数与图 7 保持一致, 将 3.2 节得到的最佳系统参数代入级联系统中, 系统输出如图 11 所示。图 11 (a)、(b) 分别是一级系统输出的时域图与频域图。图 11 (c)、(d) 是二级系统的输出。从图中可以得到, 二级系统输出的时域图 (图 11 (c)) 比一级系统 (图 11 (a)) 更加流畅, 在信号频率 0.005 Hz 处, 二级系统输出的频谱幅值是一级系统的 2.2 倍, 信噪比也提高了 2.04 dB。这表明, 在二级系统中, 微弱信号获得了更多的噪声能量, 同时噪声强度也被相应削弱。

3.5 不同噪声强度 D 下级联系统的响应

设定噪声强度 D 的扫描区间为 $[0, 2]$, 扫描步长为 0.1, 保持噪声其余参数与信号参数不变, 得到级联系统输出信号频谱值跟随噪声强度 D 的变化趋势如图 12 所示 (其中 Line1 与 Line2 分别为一级系统和二级系统输出信号频谱值)。从图 12 中可以看出, 系统输出信号频谱值跟随噪声强度 D 的增加呈现非线性变化趋势, 并且在该噪声区间中, 噪声强度为 0.6 时, 一级系统与二级系统输出的信号幅值都为最高。这说此时明噪声、信号与系统三者达到了最佳

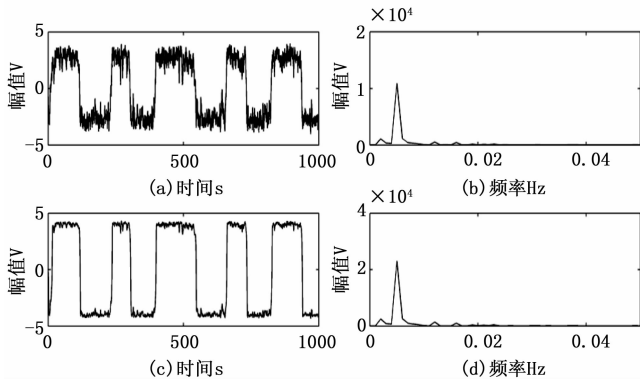


图 11 级联系统的输出

协同状态，信号从噪声中获取的能量最多。同时也体现出，随机共振的最佳协同状态需要噪声、信号与系统的三者之间的匹配，过强或者过弱的噪声强度都会打破原有的最佳协同状态。从图 12 整体变化趋势来讲，当噪声强度 D 的区间在 $[1.5, 2]$ 时，系统输出信号频谱值趋于平缓，无较大浮动。对比 Line1 与 Line2 的纵坐标可以得出，二级系统的输出跟随着一级系统的输出，但信号幅值始终高于一级系统。这说明，二级系统在一级系统输出的基础上，将更多噪声能量转化到了信号之中。因此，二级系统的输出优于一级系统。

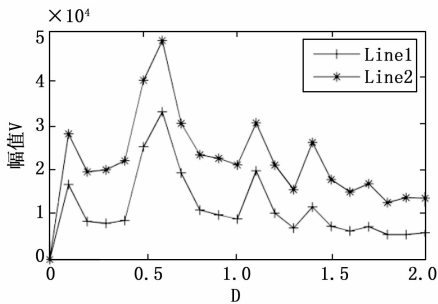


图 12 系统输出信号幅值跟随噪声强度 D 的变化趋势

4 结束语

本文研究了 levy 噪声背景下级联双稳系统的随机共振现象，利用信噪比和频谱幅值先后作为信号质量改善指标，分析了不同噪声参数 α 与 β 条件下，频谱幅值随系统参数 a 和 b 的变化趋势，并将得到的最佳系统参数代入到级联系统之中，成功实现了 levy 噪声中微弱信号的提取。通过对大量实验数据分析得出如下结论：

- 1) 不同的噪声参数 α 与 β 下，可以通过调节系统参数 a 与 b 实现随机共振现象。
- 2) 系统输出周期信号的频谱幅值随不同噪声参数 α 与 β 的改变而改变，但不会变化太大，均在一个数量级以内。并且随机共振最佳参数区间随噪声参数 α 与 β 的改变而保持不变。
- 3) 在 levy 噪声环境中，级联系统比单级系统处理噪声的效果更好，二级系统输出的频谱值是一级系统的 2.2 倍，系统输出的信号质量得到了进一步提高。

由中心极限定理和大数定理推导出的 levy 噪声更符合实际信道噪声的分布特性，对 levy 噪声背景中微弱信号检测提取的研究更加具有现实意义。本文研究了 levy 噪声下单一微弱信号提取的研究，下一步将对多路信号的检测进行研究。

参考文献：

- [1] Benzi R, Srutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance [J]. J. Phys A., 1981, V4 (11): 453 - 457.
- [2] Fauve S, Heslot F. Stochastic Resonance in a Bistable System [J]. Phys. Rev. Lett, 1983, 97A: 5 - 7.
- [3] 冷永刚, 赖志慧, 范胜波, 等. 二维 Duffing 振子的大参数随机共振及微弱信号检测研究 [J]. 物理学报, 2012, 61 (23): 230502 - 230502.
- [4] 王志霞, 郭利. 改进 PSO 算法调参的随机共振微弱信号检测 [J]. 计算机测量与控制, 2018 (1): 42 - 46.
- [5] Wang Z, Qiao Z, Zhou L, et al. Array-enhanced Logical Stochastic Resonance Subject to Colored Noise [J]. Chinese Journal of Physics, 2017, 55 (2): 252 - 259.
- [6] Lefebvre J, Hutt A, Frohlich F. Stochastic resonance mediates the state-dependent effect of periodic stimulation on cortical alpha oscillations [J]. Elife, 2017, 6 (e32054): 1: 21.
- [7] Mcdonnell M D, Stocks N G, Abbott D. Optimal stimulus and noise distributions for information transmission via suprathreshold stochastic resonance. [J]. Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics, 2007, 75 (1): 061105.
- [8] 宁丽娟, 徐伟. 光学双稳系统中的随机共振 [J]. 物理学报, 2007, 56 (4): 1944 - 1947.
- [9] 兀旦晖, 杨萍. 随机共振技术在弱随机二元码检测中的应用研究 [J]. 计算机测量与控制, 2010, 18 (4): 770 - 772.
- [10] 尚金红, 王辅忠, 张光璐, 等. 基于随机共振的 2PSK 信号相干接收误码率的研究 [J]. 应用声学, 2015, 34 (6): 495 - 500.
- [11] Gao Y X, Wang F Z. Adaptive cascaded-bistable stochastic resonance system research and design [J]. Computational and Theoretical Nanoscience, 2013, 10: 1 - 5.
- [12] Shi P, An S, Li P, et al. Signal feature extraction based on cascaded multi-stable stochastic resonance denoising and EMD method [J]. Measurement, 2016, 90: 318 - 328.
- [13] Xie Y, Liu R N. Stochastic resonance in overdamped washboard potential system [J]. Acta Physica Sinica, 2017, 66 (12): 120501.
- [14] 王立国, 谢寿生, 胡金海, 等. 基于随机共振的航空发动机转子多域融合神经网络故障诊断 [J]. 计算机测量与控制, 2013, 21 (6): 1483 - 1486.
- [15] Weron R. On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables [J]. Statistics & Probability Letters, 1996, 28 (2): 165 - 171.
- [16] 焦尚彬, 孙迪, 刘丁, 等. α 稳定噪声下一类周期势系统的振动共振 [J]. 物理学报, 2017, 66 (10): 100501.
- [17] Wan P, Zhan Y J, Li X C, et al. Numerical reasearch of signal-to-noise gain on a monostable stochastic resonance [J]. Journal of Physics, 2011, 60 (4): 53 - 59.