

不等精度数据融合的最优权值与参数估计方法

张志敏

(中国人民解放军 92941 部队 44 分队, 辽宁 葫芦岛 125001)

摘要: 对测量数据进行融合处理是提高数据处理精度的一个十分有效的方法; 文章使用引入加权因子的方法, 对不等精度测量数据融合处理的最优加权与参数估计的问题进行了研究; 对于线性回归模型, 从理论上证明了, 最优融合权值由数据的精度唯一确定, 这与经典的 Gauss-Markov 定理是一致的; 对于非线性回归模型, 在理论上获得了最优融合权值的计算方法, 给出了实际数据融合处理的最优权值与参数估计算法, 并且证明了非线性模型的不等精度数据融合的最优权值, 不但与数据本身精度相关联, 而且与模型的结构、模型的导数相关联, 则在此时经典 Gauss-Markov 定理不再成立; 通过算例进行对比验证, 证明了所提方法的有效性。

关键词: 数据融合; 非线性回归模型; Bayes 估计; 融合权值; 参数估计

The Method of Optimal Weight and Parameter Estimation of Unequal-precision Data Fusion

Zhang Zhimin

(Unit of 92941PLA, Huludao 125001, China)

Abstract: Data fusion is one effective method to improve the precision of data processing. The weight and parameter estimation of unequal-precision data fusion was studied. For the linear model, the optimal weight is only determined by the precisions of measured data, which is consistent with the classic Gauss-Markov theorem. For nonlinear model, the optimal weight and algorithm of the multi-structure unequal-precision nonlinear regression model are established according to the curvature representation of the estimation mean square error. Numerical simulation results show that the weight of the nonlinear model has great influence on the precision of parameter estimation. The optimal weight is related to both the statistical feature of data and the model structures, such as the model curvature, sampling number, etc. In this case, the weight (only related to the precision of measured data) obtained based on the Gauss-Markov theorem for the linear model is no longer optimal. The proposed method was verified by examples, and its effectiveness was proved.

Keywords: data fusion; nonlinear regression model; Bayes estimation; optimal weight; parameter estimation

0 引言

不同类型和不等精度数据的融合是测量数据融合处理中的常见难题, 也是研究的热点问题^[1-3]。测量数据融合处理的主要目的就是提高参数估计的精度, 建立合适的数学处理模型, 给出高效可靠的融合算法, 建立既能够适合数学处理, 又能够体现物理过程、工程特征的融合处理模型是关键。模型包括测量数据的模型和目标轨迹模型, 而测量数据建模又包括测量误差建模与测量目标真实信号建模。不同类型和不等精度数据是指观测数据中关于待估参数的函数关系不同、各阶导数也不同^[4-5]。因此, 针对不同类型不等精度的观测数据的融合处理, 使用不同的加权方法, 会对参数估计结果造成较大的影响。因此针对不同的应用背景研究适合的加权融合处理方法成为提高不同类型和不等精度数据的融合参数估计精度的关键。

对于线性回归模型, 已有文献 [6] 证明了其参数估计, 以及不等精度测量数据的唯一最优加权原则^[6]。但是对于非线性回归模型, 当前的研究结果都是利用线性回归模型的处理思维以及迭代算法, 求解非线性回归问题, 在基于观测数据的随机误差是独立同分布等精度条件下推导的^[7-9], 不进行加权处理, 或直接采用线性模型的高斯-马尔科夫定理对不同类型的观测数据进行加权处理, 对于参数估计的精度提高存在很大的局限性。非线性回归模型的非线性程度会对参数估计的偏差、方差等因素产生影响, 因此通过什么方法可以降低模型的非线性程度, 成为长久以来非线性模型研究领域的难点。文献 [10] 通过引入非线性模型的参数效应曲率和固有曲率, 使降低曲率相当于降低模型非线性程度, 采用曲率表征模型的非线性程度, 目前该理论已成为非线性模型定量分析的理论基础, 为非线性回归模型的研究提供一种新的思路, 极大地促进了不同类型不等精度测量数据非线性融合的权值问题的研究。

对于不同种类的不等精度测量数据融合处理的权值与参数估计的问题, 根据对参数估计偏差和均方误差进行分析的结论, 从理论上证明了对于非线性模型在不同类型不

收稿日期: 2018-05-23; 修回日期: 2018-07-20。

基金项目: 国家自然科学基金项目(61703408)。

作者简介: 张志敏(1965-), 男, 河北玉田人, 硕士, 高级工程师, 主要从事靶场雷达测控方向的研究。

等精度数据融合处理时, 最优融合权值不仅与数据本身精度有关, 而且与模型的结构、导数相关联, 且线性模型高斯-马尔科夫定理不再适用。给出了多结构多元非线性融合模型的最优权值与参数估计的计算方法, 最后通过四个算例的对比验证, 可以证明该方法是有效可靠的。

1 不等精度观测数据线性融合的最优权值和参数估计

针对参数 $\beta_{p \times 1}$ 的估计问题, 假如有两类线性测量数据, 其观测方程如下所示:

$$\begin{cases} Y_{m \times 1} = X_{m \times p} \beta_{p \times 1} + \varepsilon_{m \times 1}, \\ E\varepsilon = 0, Cov\varepsilon = \sigma_1^2 I_{m \times m} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_{k \times 1} = Z_{k \times p} \beta_{p \times 1} + \eta_{k \times 1} \\ \eta \sim N(0, \sigma_2^2 I_{k \times k}) \end{cases} \quad \text{且 } E\varepsilon\eta^T = 0 \quad (2)$$

对于两类不等精度线性观测数据融合模型 (1) - (2) 的参数估计, 构造如下模型所示:

$$\min_{\beta \in R^p, 0 < \rho < 1} \rho \|Y - X\beta\|_2^2 + (1 - \rho) \|\tilde{\beta} - Z\beta\|_2^2 \quad (3)$$

对于 (3) 的解 $\hat{\beta}_{ER}$, 我们有如下结论:

定理 1: 记 $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, i = 1, \dots, p$ 分别为矩阵 $X^T X, Z^T Z$ 的特征值, 那么融合模型的最优权值和参数估计形式如下所示:

$$1) \hat{\beta}_{ER} = (\rho X^T X + (1 - \rho) Z^T Z)^{-1} (\rho X^T Y + (1 - \rho) Z^T \tilde{\beta}) \quad (4)$$

$$2) E\hat{\beta}_{ER} = \beta, \quad MSE(\hat{\beta}_{ER}) = tr(\rho X^T X + (1 - \rho) Z^T Z)^{-2} (\rho^2 \sigma_1^2 X^T X + (1 - \rho)^2 \sigma_2^2 Z^T Z) \quad (5)$$

3) $\rho = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^{-2}}{\sigma_1^{-2} + \sigma_2^{-2}}$ 是 $MSE(\hat{\beta}_{ER})$ 的唯一极小值点, 且此时 $MSE(\hat{\beta}_{ER}) = MSE(\hat{\beta}_B)$ 。

证明: 1) 由 (3) 关于参数 β 求一阶偏导数, 得到正规方程为:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\rho} X \\ \sqrt{1 - \rho} Z \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} Y \\ \sqrt{1 - \rho} \tilde{\beta} \end{bmatrix} \quad (6)$$

因此, 得到 1)。

2) 将 (4) 式代入, 并由模型 (1)、(2) 的假设, 计算即可得到 (5) 的第一式。

如果存在可逆矩阵 Q , 使得 $QX^T X Q^T = I_p, QZ^T Z Q^T = \Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{p,1})$, 又设 Q_1 为正交矩阵, 使得 $(Q Q^T)^{-1} = Q_1 \Lambda_2 Q_1^T = \text{diag}(\lambda_{1,2}, \dots, \lambda_{p,2})$ 。

经过计算可得:

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\beta}_{ER}) &= E \|\hat{\beta}_{ER} - \beta\|^2 = E(\rho X^T X + (1 - \rho) Z^T Z)^{-1} \\ &(\rho X^T \varepsilon + (1 - \rho) Z^T \eta)^2 = tr(\rho X^T X + (1 - \rho) Z^T Z)^{-2} \\ &(\rho^2 X^T (E\varepsilon\varepsilon^T) X + (1 - \rho)^2 Z^T (E\eta\eta^T) Z) = tr(\rho Q^T Q + (1 - \rho) \\ &Q^T \Lambda_1 Q)^{-2} (\rho^2 \sigma_1^2 Q^T Q + (1 - \rho)^2 \sigma_2^2 Q^T \Lambda_1 Q) = \\ &tr Q^{-1} (\rho I + (1 - \rho) \Lambda_1)^{-1} Q^{-1} Q^T (\rho^2 \sigma_1^2 + \\ &(1 - \rho)^2 \sigma_2^2 \Lambda_1) Q Q^{-1} (\rho I + (1 - \rho) \Lambda_1)^{-1} Q^{-1} = \\ &tr(\rho I + (1 - \rho) \Lambda_1)^{-2} (\rho^2 \sigma_1^2 + (1 - \rho)^2 \sigma_2^2 \Lambda_1) \end{aligned}$$

$$(Q Q^T)^{-1} = tr(\rho I + (1 - \rho) \Lambda_1)^{-2} (\rho^2 \sigma_1^2 + (1 - \rho)^2 \sigma_2^2 \Lambda_1) (Q_1 \Lambda_2 Q_1^T) = \sum_{i=1}^p \frac{(\rho^2 \sigma_1^2 + (1 - \rho)^2 \sigma_2^2 \lambda_{i,1}) \lambda_{i,2}}{(\rho + (1 - \rho) \lambda_{i,1})^2} \quad (7)$$

即得到 (5) 的第二式。

$$3) \text{ 由于 } \frac{d}{d\rho} MSE(\hat{\beta}_{ER}) = \sum_{i=1}^p \frac{2\lambda_{i,1} \lambda_{i,2} ((\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \rho - \sigma_2^2)}{(\rho + (1 - \rho) \lambda_{i,1})^3},$$

令 $\frac{d}{d\rho} MSE(\hat{\beta}_{ER}) = 0$ 即得到唯一的稳定点, 且:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} MSE(\hat{\beta}_{ER}) &= \\ &4\lambda_{i,1} \lambda_{i,2} (\lambda_{i,1} - 1) (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \rho + \\ &\sum_{i=1}^p \frac{6\lambda_{i,1} \lambda_{i,2} (1 - \lambda_{i,1}) \sigma_2^2 + 2\lambda_{i,2} \lambda_{i,1}^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\rho + (1 - \rho) \lambda_{i,1})^4} \end{aligned} \quad (8)$$

当 $\rho = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^{-2}}{\sigma_1^{-2} + \sigma_2^{-2}}$ 时, $\frac{d^2}{d\rho^2} MSE(\hat{\beta}_{ER}) = \sum_{i=1}^p \frac{2\lambda_{i,1} \lambda_{i,2} (\sigma_2^2 + \lambda_{i,1} \sigma_1^2)}{(\rho \lambda_{i,1} + (1 - \rho) \lambda_{i,2})^4} > 0$, 因此, $\rho = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ 是 $MSE(\hat{\beta}_{ER})$ 的唯一极小值点, 且此时有:

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\beta}_{ER}) &= tr\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} X^T X + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} Z^T Z\right)^{-2} \\ &\left(\frac{\sigma_2^4 \sigma_1^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} X^T X + \frac{\sigma_1^4 \sigma_2^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} Z^T Z\right) = \sigma_1^2 tr(X^T X + \\ &\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} Z^T Z)^{-1} = MSE(\hat{\beta}_B) < MSE(\hat{\beta}_{LS}) \end{aligned} \quad (9)$$

即定理 1 的结论 3) 成立。

定理 1 的结论 3) 具有重要的应用价值。在处理实际问题时, (1)、(2) 一般为不等精度的测量数据, 在这些数据的融合处理时, 数据的加权对于数据处理精度具有重要影响。结论 3) 说明不等精度的线性观测数据融合处理时唯一最优融合权值由测量数据的精度决定, 这本质上仍然是线性模型最小二乘估计的 Gauss-Markov 定理。

2 不等精度观测数据非线性融合的加权和参数估计

在很多估计问题中, 往往要考虑异类不等精度非线性观测数据的融合处理^[2]。这里, 我们提出的异类数据, 具体指观测数据关于待估参数的函数关系不同, 因而它们的模型结构也不一样, 参数估计的精度对其依赖程度自然也是不同的。则不同结构的观测数据的权值也应该是不同的。

2.1 非线性模型参数估计的方差和偏差

当测量数据是待估参数的非线性函数, 由于非线性问题往往只有迭代解 (没有解析解), 估计的性质与线性模型有本质的不一样。

考虑如下二元非线性模型 (18) 的参数估计的偏差和方差:

$$\begin{cases} y(t_i) = f(t_i, \beta) + \varepsilon(t_i), i = 1, \dots, m \\ \varepsilon(t_i) \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2), \beta \in R^1 \end{cases} \quad (10)$$

对于模型 (10), 为了得到其估计的性质, 假设: (i) $f(t, \beta)$ 关于参数 β 存在一阶连续导数, 且:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{df(t_i, \beta)}{d\beta} \right)^2 = \Omega_1(\beta) > 0 \quad (11)$$

(ii) $f(t, \beta)$ 关于参数 β 存在二阶连续导数，且：

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{d^2 f(t_i, \beta)}{d\beta^2} \right)^2 = \Omega_2(\beta) \quad (12)$$

条件 (i)、(ii) 自然而又必要的，因为在假设 (10) 下，观测向量关于参数的 Fisher 信息阵为 $\sigma^{-2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{df(t_i, \beta)}{d\beta} \right)^2$ ，因此， $m^{-1} \sigma^{-2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{df(t_i, \beta)}{d\beta} \right)^2$ 就表示观测中平均每个样本所包含的有关参数的 Fisher 信息。对于模型 (10)，我们有如下结论：

定理 2：记 $S(\beta) = \sum_{i=1}^m (y_i - f(t_i, \beta))^2$, $S(\hat{\beta}) = \min_{\beta} S(\beta)$,

$$C = \sum_{i=1}^m \bar{f}_i^2, D = \sum_{i=1}^m \bar{f}_i \bar{f}_i, \text{其中 } \bar{f}_i = \frac{df(t_i, \beta)}{d\beta}, \bar{f}_i = \frac{d^2 f(t_i, \beta)}{d\beta^2},$$

$$\bar{f}_i = \frac{d^3 f(t_i, \beta)}{d\beta^3}, \text{对于模型(10)中参数 } \beta \text{ 的最小二乘估计 } \hat{\beta}, \text{ 则在假设条件 (i)、(ii) 下有如下近似:}$$

$$\hat{\beta} - \beta \approx C^{-1} \sum_{i=1}^m \bar{f}_i \epsilon_i + C^{-2} \sum_{i,j=1}^m \bar{f}_i \bar{f}_j \epsilon_i \epsilon_j - \frac{3}{2} C^{-3} D \sum_{i,j=1}^m \bar{f}_i \bar{f}_j \epsilon_i \epsilon_j +$$

$$C^{-3} \sum_{i,j,s=1}^m \bar{f}_i \bar{f}_j \bar{f}_s \epsilon_i \epsilon_j \epsilon_s - \frac{9}{2} C^{-4} D \sum_{i,j,s=1}^m \bar{f}_i \bar{f}_j \bar{f}_s \epsilon_i \epsilon_j \epsilon_s +$$

$$\frac{9}{2} C^{-5} D^2 \sum_{i,j,s=1}^m \bar{f}_i \bar{f}_j \bar{f}_s \epsilon_i \epsilon_j \epsilon_s, \quad (13)$$

则参数估计的偏差和均方误差就有如下所示近似：

$$\begin{cases} E(\hat{\beta} - \beta) \approx -2^{-1} C^{-2} \sigma^2 D \\ \text{MSE}(\hat{\beta}) \approx C^{-1} \sigma^2 + \frac{15}{4} C^{-4} \sigma^4 D^2 + 3C^{-3} \sigma^4 \sum_{i=1}^m \bar{f}_i^2 \end{cases} \quad (14)$$

由定理 2 可知，非线性模型的参数估计是有偏的，其偏差和方差的值不但与测量数据的精度有关，而且同模型的一、二阶导数（即模型的结构）有关，则与模型曲率也有关系^[2-3]。模型曲率可等价于函数的非线性程度，故降低模型曲率可以降低函数非线性程度，从而有效地改善非线性模型的参数估计效果。

2.2 一元非线性融合模型的最优权值和参数估计

为了方便讨论，我们先只探究非线性回归模型：

$$\begin{cases} Y = f(X, \beta) + \epsilon, & \beta \in R^{\rho \times 1}, Y \in R^{m \times 1} \\ E\epsilon = 0, & \text{Cov}(\epsilon) = \sigma_1^2 I_{m \times m} \end{cases} \quad (15)$$

在线性约束模型 (2)（事实上，模型 (2) 不仅可以当作先验信息，也可以当作另一类系统的测量数据）下的参数估计。根本上，两类系统的测量数据融合的最优权值问题，在参数估计均方误差最小的准则下，归结为寻找 ρ ，使得极小值问题：

$$\min_{\rho \in R^+, \beta \in R^{\rho \times 1}} \|Y - f(X, \beta)\|_2^2 + \rho \|\hat{\beta} - Z\beta\|_2^2 \quad (16)$$

的解满足 $\text{MSE}(\hat{\beta})(\rho) = E \|\hat{\beta}(\rho) - \beta\|^2 = \min^{[25]}$ 。

对于一元非线性模型，定理 3 提出了参数估计的偏差与均方误差，定理 4 提出了最优权值的存在性及其性质。

定理 3：记 $S(\beta) = \|Y - f(\beta)\|_2^2 + \rho \|\hat{\beta} - Z\beta\|_2^2, S(\hat{\beta}) =$

$$\min_{\beta} S(\beta), C = \sum_{i=1}^m \bar{f}_i^2 + \rho \sum_{i=1}^k z_i^2, D = \sum_{i=1}^m \bar{f}_i \bar{f}_i, \hat{\xi} = \sum_{i=1}^m \bar{f}_i \epsilon_i +$$

$$\rho \sum_{i=1}^k z_i \eta_i, A = \sigma_1^2 \sum_{i=1}^m \bar{f}_i^2 + \rho^2 \sigma_2^2 \sum_{i=1}^k z_i^2, \text{则在随机误差正态情况下, 参数估计的偏差和均方误差分别有如下的近似:}$$

$$\begin{cases} E(\hat{\beta} - \beta) \approx -\frac{1}{2} \sigma_1^2 C^{-2} D - \frac{3}{2} C^{-3} D \rho (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \sum_{i=1}^k z_i^2 \\ \text{MSE}(\hat{\beta}) \approx C^{-2} A + 6C^{-4} D^2 \sigma_1^4 + 3C^{-4} A \sigma_1^2 \sum_{i=1}^m \bar{f}_i^2 + \\ \frac{135}{4} C^{-6} D^2 A^2 - 36C^{-5} A D^2 \sigma_1^2 \end{cases} \quad (17)$$

定理 4：对于定理 3 中的 $\text{MSE}(\hat{\beta})(\rho)$ ，极小值问题

$$\min_{\rho > 0} \text{MSE}(\hat{\beta})(\rho) \text{ 的解存在, 且 } \min_{\rho > 0} \text{MSE}(\hat{\beta})(\rho) < \min_{\rho > 0} \text{MSE}(\hat{\beta})(\sigma_1^2 \sigma_2^{-2}).$$

证明：由 (17) 式第二式可知， $\text{MSE}(\hat{\beta})(\rho)$ 关于权值 ρ 在 $[0, +\infty)$ 上连续可导； $\text{MSE}(\hat{\beta})(\rho)$ 关于参数 ρ 直接求导，得到：

$$\frac{d}{d\rho} \text{MSE}(\hat{\beta})(\rho) = \left(\sum_{i=1}^k z_i^2 \right) [-2C^{-3} A + 2\rho C^{-2} \sigma_2^2 -$$

$$24C^{-5} D^2 \sigma_1^4 - 12C^{-5} \sigma_1^2 A \sum_{i=1}^m \bar{f}_i^2 + 6\rho C^{-4} \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sum_{i=1}^m \bar{f}_i^2 - \frac{405}{2}$$

$$C^{-7} D^2 A^2 + 135\rho C^{-6} D^2 A \sigma_2^2 + 180C^{-6} A D^2 \sigma_1^2 - 72\rho C^{-5} D^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2] \quad (18)$$

$$\frac{d}{d\rho} \text{MSE}(\hat{\beta})(0) = - \left(\sum_{i=1}^k z_i^2 \right) [2 \left(\sum_{i=1}^m \bar{f}_i^2 \right)^{-2} \sigma_1^2 +$$

$$\frac{93}{2} \left(\sum_{i=1}^m \bar{f}_i^2 \right)^{-5} D^2 \sigma_1^4 + 12 \left(\sum_{i=1}^m \bar{f}_i^2 \right)^{-5} \sum_{i=1}^m \bar{f}_i^2 \sum_{i=1}^m \bar{f}_i^2 \sigma_1^4] < 0 \quad (19)$$

当 $\rho \rightarrow +\infty$ 时，由第三项起始，之后的每项都是前两项的高阶无穷小量，又当 $\rho > \sigma_1^2 \sigma_2^{-2}$ 时，前面两项之和大于零，故存在 $\rho_0 > 0$ ，使当 $\rho \in [\rho_0, +\infty)$ 时 $\frac{d}{d\rho} \text{MSE}(\hat{\beta})(\rho) > 0$ ，因而 $\min_{\rho > 0} \text{MSE}(\hat{\beta})(\rho)$ 的解 $\hat{\rho} \in (0, \rho_0)$ 。

$$\text{又 } \frac{d}{d\rho} \text{MSE}(\hat{\beta})(\sigma_1^2 \sigma_2^{-2}) = \frac{\sigma_1^4}{2C^5} \sum_{i=1}^k z_i^2 [33D^2 - 12 \left(\sum_{i=1}^m \bar{f}_i^2 + \right.$$

$$\left. \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sum_{i=1}^k z_i^2 \right) \sum_{i=1}^m \bar{f}_i^2], \text{故 } \frac{d}{d\rho} \text{MSE}(\hat{\beta})(\sigma_1^2 \sigma_2^{-2}) = 0 \text{ 仅存在两种状况,}$$

其一为两类数据都是待估参数的线性模型，即 $\bar{f} \equiv 0$ ；其二为对于非典型的非线性模型、包含特殊样本点数的非线性模型（即便有 $\frac{d}{d\rho} \text{MSE}(\hat{\beta})(\sigma_1^2 \sigma_2^{-2}) = 0$ 成立的非线性模型，将

样本点增加或减少一个， $\frac{d}{d\rho} \text{MSE}(\hat{\beta})(\sigma_1^2 \sigma_2^{-2}) = 0$ 也会不再成立），从而 $\rho = \sigma_1^2 \sigma_2^{-2}$ 可以认为不是 $\min_{\rho > 0} \text{MSE}(\hat{\beta})(\rho)$ 的解，从而定理得证。定理 4 的结果证明，对于非线性模型，由于其最小二乘估计一般都是有偏的，因此对于不等精度测量数据的融合处理，由线性模型最小二乘估计的 Gauss-Markov 定理得到权值不再是最优值，即 $\rho = \sigma_1^2 \sigma_2^{-2}$ 不是最优

融合权值；最优融合权值由极小值问题 $\min_{\rho>0} MSE(\hat{\beta})(\rho)$ 得到。即对于非线性模型在不同类型不等精度数据融合处理时，最优融合权值不仅与数据本身精度有关，还与模型的结构、模型的导数有关，线性模型高斯-马尔科夫定理不再成立。

因此对于极小值问题 (16) 的求解，我们按如下的迭代方式，确定多结构不同类型非线性测量数据融合的最优权值及相应的参数估计，算法步骤如下：

步骤 1: 对于加权初值 $\rho_0 = \sigma_1^2 \sigma_2^{-2}$ ，求解极小值问题，得到解 $\hat{\beta}^{(1)}$ ；

$$\min_{\beta \in R^r} \|Y - f(X, \beta)\|^2 + \rho_0 \|\hat{\beta} - Z\beta\|^2 \quad (20)$$

步骤 2: 由 (17) 中的第二式，计算参数估计的均方误差在 $\hat{\beta}^{(1)}$ 处的值 $MSE(\hat{\beta}^{(1)})(\hat{\beta}^{(1)}, \rho)$ ；

步骤 3: 求解极小值问题 $\min_{\rho>0} MSE(\hat{\beta}^{(1)})(\hat{\beta}^{(1)}, \rho)$ ，得到 ρ_1 ；

步骤 4: 将 ρ_1 赋值给 ρ_0 ，重复步骤 1，根据给定的收敛准则，重复上述四个步骤，一直迭代至收敛，此时的 ρ_1 为最优融合权值， $\hat{\beta}^{(1)}$ 为参数的最优估计。

2.3 多结构多元非线性融合模型的最优权值与参数估计

根据如下所示的多结构多元非线性融合模型：

$$\begin{cases} y_1(t_i) = f_1(t_i, \beta) + \varepsilon_1(t_i), \\ \dots\dots\dots \\ y_M(t_i) = f_M(t_i, \beta) + \varepsilon_M(t_i) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (21)$$

记：

$$Y_j = (y_j(t_1), \dots, y_j(t_m))^T, F_j(\beta) = (f_j(t_1, \beta), \dots, f_j(t_m, \beta))^T$$

$$\varepsilon_j = (\varepsilon_j(t_1), \dots, \varepsilon_j(t_m))^T, \quad j = 1, \dots, M$$

且设 $E\varepsilon_j = O, E\varepsilon_j \varepsilon_k^T = \delta_{jk} \sigma_j^2 I_{m \times m}, j, k = 1, \dots, M$ 。求解参数 $\beta \in R^{p \times 1}$ ，就是在给定权值 $\rho_j \in [0, 1], \sum_{j=1}^M \rho_j = 1$ 下，求解极小值问题：

$$\min_{\beta \in R^r} \sum_{j=1}^M \rho_j \sigma_j^{-2} \|Y_j - F_j(\beta)\|^2 \quad (22)$$

$$\text{记 } V_j(\beta) = \sqrt{\rho_j} \sigma_j^{-1} \left[\frac{\partial f_j(t_i)}{\partial \beta_k} \right]_{m \times p}, W = \sqrt{\rho_j} \sigma_j^{-1}$$

$$\left[\frac{\partial f_j(t_i)}{\partial \beta_j} \right]_{m \times p \times p}, S_j(\beta) = \rho_j \sigma_j^{-2} \|Y_j - F_j(\beta)\|^2, S(\beta) = \sum_{j=1}^M S_j(\beta),$$

对于极值问题 (22) 的参数估计的偏差和均方误差，类似于定理 3，结合 D. M. Bates 和 D. G. Watts 定义的非线性模型的固有曲率和参数效应曲率，可以得到如下结论：

定理 5: 将函数 $\sqrt{\rho_j} \sigma_j^{-1} F_j(\beta)$ 的固有曲率立体阵的第 t 个面设为 I_t^j ，将参数效应曲率立体阵的第 i 个面设为 P_i^j ，将 $P_{k,l}^j$ 设为参数效应曲率立体阵在 (k, l) 上的向量，则有：

$$E(\hat{\beta} - \beta) = -\frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^M V_j^T V_j \right]^{-1} \sum_{j=1}^M V_j^T \text{tr}[(V_j^T V_j)^{-1} W_j] \quad (23)$$

$$MSE(\hat{\beta}) = \left[\sum_{j=1}^M V_j^T V_j \right]^{-1} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M L_j (2V_j^T + V_j^p) L_j^T - \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^M V_j^T V_j \right]^{-1} \sum_{j=1}^M V_j^T \text{tr}[(V_j^T V_j)^{-1} W_j] \quad (24)$$

其中：

$$V_i^j = \sum_{l=1}^{m-p} (I_l^j)^2, V_j^p = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p P_{k,l}^j P_{k,l}^{jT} \quad (25)$$

$$V_j = [Q_1^j, Q_2^j] \begin{bmatrix} R_j \\ O \end{bmatrix}, L_j = R_j^{-1}, R_j \text{ 是上三角矩阵,}$$

Q_1^j, Q_2^j 的列向量是标准正交基。

定理 5 的证明过程类似于定理 3 和定理 4，但此时由于参数是多维的，涉及到多元非线性函数的模型曲率求解，具体证明方法可参考文献 [6]。

在非线性观测数据精度 σ_j^2 已知的情况下，对于极小值问题 (22) 的求解，确定测量数据最优融合权值及相应的参数估计算法如下：

步骤 1: 对于给定的一组权值 $\rho^{(0)}$ ，设定迭代初值 $\beta^{(0)}$ ，使用观测数据关于待估参数的函数式获得到 $F_j(\beta^{(0)})$ ；

步骤 2: 记 e_i 为第 i 个分量为 1，其他分量全为 0 的向量，根据设定数值微分的步长 h (根据实际情况，一般可设定为 $h = 10^{-6}$)，计算 $F_j(\beta^{(0)})$ 梯度矩阵：

$$V_j(\beta^{(0)}) = \sqrt{\rho_j} \sigma_j^{-1} \left[\frac{f_j(t_i, \beta^{(0)} + h e_k) - f_j(t_i, \beta^{(0)})}{h} \right]_{i=1, \dots, m}^{k=1, \dots, p} \quad (26)$$

并对此进行 QR 分解，得到矩阵 $L_j(\beta^{(0)})$ ；

步骤 3: 由下式得到参数 β 的一次改进：

$$\begin{cases} D^{(1)} = \left[\sum_{j=1}^M V_j(\beta^{(0)})^T V_j(\beta^{(0)}) \right]^{-1} \sum_{j=1}^M \sqrt{\rho_j^{(0)}} \\ \sigma_j^{-1} V_j(\beta^{(0)})^T [Y_j - F_j(\beta^{(0)})] \\ S(\beta^{(0)} + \lambda_1 D^{(1)}) = \min_{0 < \lambda < 1} S(\beta^{(0)} + \lambda D^{(1)}) \\ \beta^{(1)} = \beta^{(0)} + \lambda_1 D^{(1)} \end{cases} \quad (27)$$

步骤 4: 对于给定的收敛阈值 $\tau > 0$ ，如果 $|S(\beta^{(1)}) - S(\beta^{(0)})| < \tau$ ，则迭代结束，令 $\tilde{\beta} = \beta^{(1)}$ ，转入 Step5；否则，令 $\beta^{(0)} = \beta^{(1)}$ ，返回 Step1；

步骤 5: 相似于 (26)，计算 $F_j(\tilde{\beta})$ 的二阶导数立体阵 $W_j(\tilde{\beta})$ ，以及固有曲率立体阵、参数效应立体阵，由式 (25)，得到 V_i^j, V_j^p ；

步骤 6: 由 (24) 式得到参数估计值 $\tilde{\beta}$ 的均方误差矩阵 $MSE(\tilde{\beta})$ ，选择极值化标准，使得 $\text{tr}(MSE(\tilde{\beta})(\tilde{\rho})) = \min_{\tilde{\rho}} \text{tr}(MSE(\tilde{\beta})(\tilde{\rho}))$ ，得到 $\tilde{\rho}$ ；

步骤 7: 令 $\rho^{(0)} = \tilde{\rho}, \beta^{(0)} = \tilde{\beta}$ ，返回 Step1，直到关于参数 ρ, β 的迭代收敛，此时的迭代结果 $\hat{\rho}, \hat{\beta}$ 即为所求。

3 算例验证

算例 1: 设某物理量 u 真值为 10，有不等精度的两套设备对其进行直接测量，分别得到 100 个高精度的观测数据 (均方根差为 1)，180 个低精度的观测数据 (均

方根差为 4)，共产生 100 组观测数据，得到的参数 u 的估计及方差见表 1。（估计的根方差是对 100 组观测数据统计得到。）

表 1 四种估计的比较

估计方法 估计结果	只用高精度数据	只用低精度数据	联合估计	最优融合估计
参数真值	10	10	10	10
加权方式	(1, 0)	(0, 1)	(1/2, 1/2)	(4/5, 1/5)
估计值	9.984	10.090	10.052	9.995
估计的根方差	0.067	0.179	0.116	0.061

在线性观测数据融合处理时，唯一的最优融合权值由测量数据的精度决定；求解极小值问题（8）100 次，得到均方误差为 0.061，估计是最优的。

算例 2（一元非线性融合模型的最优权值与参数估计）：

设 $f(t_j, \beta) = 1 + (5 + t_j \beta)^{0.1}$, $y(t_j) = f(t_j, \beta) + \epsilon(t_j)$, $\epsilon(t_j) \stackrel{iid}{\sim} N(0, 0.05^2)$, $z(s_i) = s_i^{-1} \beta + \eta(s_i)$, $\eta(s_i) \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 0.01^2)$, 令 $t_j = 0.05 \times (j - 1)$, $j = 1, \dots, 300$, $s_i = 2 + 0.1 \times (i - 1)$, $i = 1, \dots, 100$, β 的真值为 8，产生 50 组观测数据 $\{y^k(t_j)\}_1^{300}$, $\{z^k(s_i)\}_1^{100}$, $k = 1, \dots, 50$ ，计算结果见表 2，均方误差与加权因子关系见图 1。

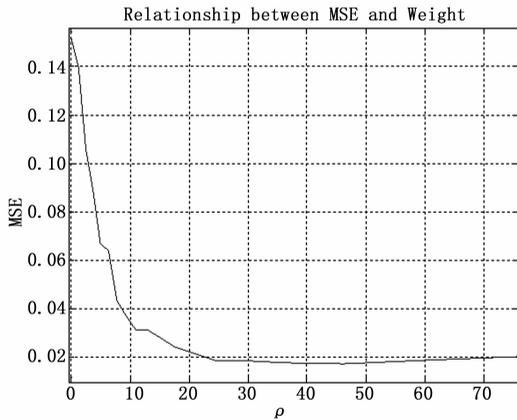


图 1 均方误差和加权因子关系图

当采用线性模型的加权方式，即取权值 $\rho = 0.05^2/0.01^2$ 时，得到均方误差为 0.020；而当 $\rho = 1.80 \times 0.05^2/0.01^2$ 时，参数估计的均方误差得到最小，其值为 0.017。

表 2 各种加权的参数估计结果对比

	参数真值	参数估值	均方误差
只用测量值 $y(t)$	8.000	7.9375	0.158
只用测量值 $z(s)$	8.000	8.1052	0.037
采用线性模型的加权	8.000	8.0628	0.020
采用最优融合权值	8.000	7.9995	0.017

算例 3（弹道目标跟踪）。

以连续波雷达和自主外测设备构建多测距测速弹道目

标跟踪系统，假设有 3 个测量站，分别测量弹道目标的距离 R 和速度 \dot{R} ，测量值可以表达为：

$$\begin{cases} \dot{R}^i(t) = \sqrt{(x(t) - x_0^i)^2 + (y(t) - y_0^i)^2 + (z(t) - z_0^i)^2} + \epsilon^i(t), \\ \dot{R}^i(t) = (x(t) - x_0^i)\dot{x}(t) + (y(t) - y_0^i)\dot{y}(t) + (z(t) - z_0^i)\dot{z}(t)/R^i(t) + \eta^i(t), \end{cases} \quad (28)$$

假设各观测测量误差服从高斯分布，且各观测站的观测量互不相关，满足独立同分布条件：

$$\begin{aligned} \epsilon^{(i)}(t) &\stackrel{iid}{\sim} N(0, 0.12^2), \eta^{(i)}(t) \stackrel{iid}{\sim} N(0, 0.006^2), \\ E\epsilon^{(i)}(t)\eta^{(i)}(s) &= 0, i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (29)$$

仿真参数设置如下：各观测量的采样率为 20 Hz，即 $t = 0.05 \times j$, $j = 1, \dots, 600$ ，各测量站的站址坐标为 $(x_0^{(i)}, y_0^{(i)}, z_0^{(i)})$, $i = 1, 2, 3$ ，弹道目标在 t 时刻的状态矢量可表示为 $[x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)]^T$ 。利用理论弹道 $(x(t_j), y(t_j), z(t_j), \dot{x}(t_j), \dot{y}(t_j), \dot{z}(t_j))$ 带入公式（28）生成由弹道目标的距离 R 和速度 \dot{R} 组成的观测数据 $\{\hat{R}^{(i)}(t_j), \dot{\hat{R}}^{(i)}(t_j)\}_1^{600}$ ，本例采用文献 [4] 提出的节省参数建模方法，利用不等间距最优节点的三次样条函数对弹道进行建模，采用最小二乘法对该非线性回归模型的样条系数和弹道参数 $(\hat{x}^{(k)}(t_j), \hat{y}^{(k)}(t_j), \hat{z}^{(k)}(t_j), \dot{\hat{x}}^{(k)}(t_j), \dot{\hat{y}}^{(k)}(t_j), \dot{\hat{z}}^{(k)}(t_j))(\rho)$ 进行估计， ρ 为最优权值，仿真次数为 100 次。

$$\begin{aligned} MSER(\rho) &= \frac{1}{100} \frac{1}{600} \sum_{k=1}^{100} \sum_{j=1}^{600} \sqrt{(x(t_j) - \hat{x}^{(k)}(t_j))^2 + (y(t_j) - \hat{y}^{(k)}(t_j))^2 + (z(t_j) - \hat{z}^{(k)}(t_j))^2}(\rho) \\ MSEV(\rho) &= \frac{1}{100} \frac{1}{600} \sum_{k=1}^{100} \sum_{j=1}^{600} \sqrt{(\dot{x}(t_j) - \dot{\hat{x}}^{(k)}(t_j))^2 + (\dot{y}(t_j) - \dot{\hat{y}}^{(k)}(t_j))^2 + (\dot{z}(t_j) - \dot{\hat{z}}^{(k)}(t_j))^2}(\rho) \end{aligned} \quad (30)$$

仿真结果表明：当 $\rho = 0.12^2/0.006^2$ 时， $MSER(\rho) = 0.322$ m， $MSEV(\rho) = 0.049$ 3 m/s；当 $\rho = 2.33 \times 0.12^2/0.006^2$ 时， $MSER(\rho)$, $MSEV(\rho)$ 达到最小值，其值分别为 0.082 m，0.029 4 m/s。可以看出，多结构多元非线性融合模型可以有效提高弹道目标的估计精度。

算例 4（多测速联合定轨）

依靠同一时刻的 N 个 ($N \geq 6$) 以上的测速元，可以确定该时刻的轨道参数 $X(t)$ 。以 (x_k, y_k, z_k) , ($k = 1, 2, \dots, N$) 为 N 个互不相同的测站在相同坐标系下的站址坐标， N 个测速可表示为：

$$\dot{R}_k = \frac{(x - x_k)\dot{x} + (y - y_k)\dot{y} + (z - z_k)\dot{z}}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2}}, k = 1, 2, \dots, N \quad (31)$$

上式就是联系测速元与目标位置和目標速度的测量方程。对于是 N 个互不相同的站址，Jacobi（雅克比）矩阵为：

表 3 测速定轨结果与基准轨道作差统计表

计算方案	加入的 随机误差	△X(米)		△Y(米)		△Z(米)	
		平均数	标准差	平均数	标准差	平均数	标准差
平均加权	0.1	10.0475	6.9884	-1.8866	2.1207	3.5629	3.1030
	0.05	9.0184	7.0371	-2.4074	1.8518	1.4247	3.2691
最优加权	0.1	8.3186	0.0954	-3.0613	0.2074	1.7146	0.1268
	0.05	8.4835	0.0873	-2.4810	0.2035	1.4578	0.0997
计算方案	加入的 随机误差	△VX(米/秒)		△VY(米/秒)		△VZ(米/秒)	
		平均数	标准差	平均数	标准差	平均数	标准差
平均加权	0.1	0.0265	0.0170	-0.0816	0.0786	0.0310	0.0134
	0.05	0.0229	0.0194	-0.0537	0.0806	0.0227	0.0132
最优加权	0.1	0.0212	0.0149	-0.0535	0.0205	0.0256	0.0125
	0.05	0.0185	0.0194	-0.0521	0.0181	0.0194	0.0127

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{R}_1}{\partial x} & \frac{\partial \dot{R}_1}{\partial y} & \frac{\partial \dot{R}_1}{\partial z} & \frac{\partial \dot{R}_1}{\partial x} & \frac{\partial \dot{R}_1}{\partial y} & \frac{\partial \dot{R}_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{R}_2}{\partial x} & \frac{\partial \dot{R}_2}{\partial y} & \frac{\partial \dot{R}_2}{\partial z} & \frac{\partial \dot{R}_2}{\partial x} & \frac{\partial \dot{R}_2}{\partial y} & \frac{\partial \dot{R}_2}{\partial z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \dot{R}_N}{\partial x} & \frac{\partial \dot{R}_N}{\partial y} & \frac{\partial \dot{R}_N}{\partial z} & \frac{\partial \dot{R}_N}{\partial x} & \frac{\partial \dot{R}_N}{\partial y} & \frac{\partial \dot{R}_N}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (32)$$

若雅克比矩阵是列满秩矩阵,从而由反函数存在定理,可以有由式(1)唯一地确定轨道参数:

$$\begin{cases} x = G_1(\dot{R}_1, \dot{R}_2, \dots, \dot{R}_N), \\ y = G_2(\dot{R}_1, \dot{R}_2, \dots, \dot{R}_N), \\ z = G_3(\dot{R}_1, \dot{R}_2, \dots, \dot{R}_N), \\ \dot{x} = g_1(\dot{R}_1, \dot{R}_2, \dots, \dot{R}_N), \\ \dot{y} = g_2(\dot{R}_1, \dot{R}_2, \dots, \dot{R}_N), \\ \dot{z} = g_3(\dot{R}_1, \dot{R}_2, \dots, \dot{R}_N). \end{cases} \quad (33)$$

假设各观测测量误差服从高斯分布,且各观测站的观测测量互不相关,满足独立同分布条件:

$$E \varepsilon^{(i)}(t) \varepsilon^{(j)}(s) = 0, i \neq j \quad (34)$$

仿真采取优选的六站测速样条定轨方案,利用一条基准的轨道 $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 带入公式(31)生成由 6 个测速元成的观测数据 $\{\tilde{R}_k\}$, $(k = 1, 2, \dots, 6)$, 在基准轨道反算测速元上引入 0.1 m/s、0.05 m/s 的随机误差,使用样条定轨法计算弹道,并与基准轨道作差。利用平均估计加权方式和多结构多元非线性融合模型的最优权值加权方式分别对轨道参数进行解算,测速定轨结果与基准轨道的减法统计数据如表 3 和图 2~3 所示。

图 2 和图 3 分别为加 0.1 m/s 的随机误差条件下平均加权和最优加权定轨结果与基准弹道作差统计结果,由图可知平均加权方式的差值波动较大,而最优加权方式的波动较小。此外,从表中 3 均值和标准差的统计结论可以看出,采用非线性回归模型最优融合估计方式进行多测速定轨可以不同测速元测量精度差异对定轨精度的影响,精度高于平均估计加权方式,满足靶场试验高精度测量系统定轨应用需求。

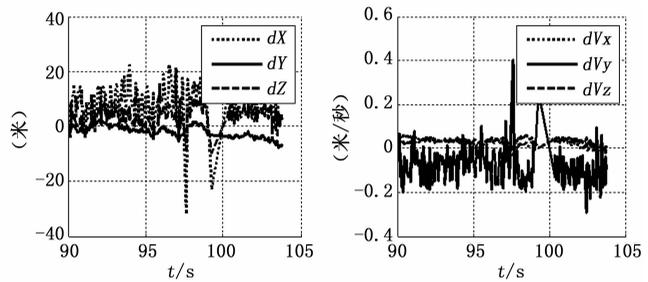


图 2 平均加权定轨结果与基准弹道减法统计图 (0.1 m/s 的随机误差,左图为位置,右图为速度)

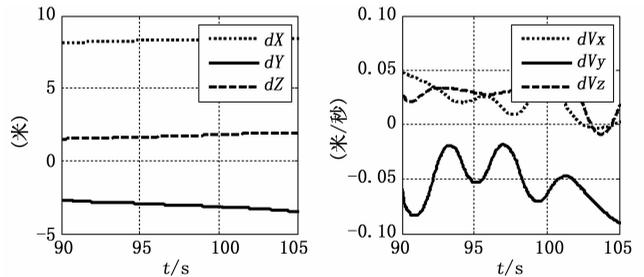


图 3 最优加权定轨结果与基准轨道减法统计图 (0.1 m/s 的随机误差,左图为位置,右图为速度)

4 结论

测量数据的融合处理是提高数据处理精度的有效措施。本文研究了不等精度观测数据融合的权值和参数估计问题。对于线性融合模型,其最优权值由测量数据的精度唯一确定,这与经典的 Gauss—Markov 定理是一致的;而对于非线性融合模型,通过参数估计的均方误差的曲率矩阵表达,建立了多结构不等精度非线性回归模型的最优加权理论与算法,并给出了计算实例,结果表明:多结构非线性回归模型的加权数值会对参数估计精度产生非常大的影响,其最优权值不仅仅和其他各类数据的测量误差统计特性相关联,还与各类数据模型的结构,即模型曲率、样本量的大小等有关,从而由线性模型 Gauss—Markov 定理得到权值(仅与观测数据精度有关)不再是最优的。

参考文献:

[1] Bar-Shalom Y, Chen H, Mallick M. One-step Solution for the Multi-step Out-of-Sequence-Measurement Problem in Tracking [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems, 2004, 40(1): 27-37.

[2] Li X R, Vesselin P. A Survey of Maneuvering Target Tracking—Part V: Multiple-Model Methods [C]. Proceeding of SPIE Conference on Signal and Data Proceeding of Small Targets, San Diego, CA, USA, 2003.

[3] Mazuelas S, Prieto J. Adaptive Data Fusion for Wireless Localization in Harsh Environments [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(4): 1585-1596.

[4] Wang Z M, Yi D Y. Measurement Data Modeling and Parameter Estimation [M]. CRC Press, 2011.

[5] Gan Q, Harris C J. Comparison of Two Measurement Fusion Methods for Kalman-Filter-Based Multi-sensor Data Fusion [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,

2001, 37(5): 273-280.

[6] Bates D M, Watts D G. 非线性回归分析及其应用. 韦博成等译, 北京: 中国统计出版社, 1997, 37.

[7] Rick A, Brian B, Cliff T. Parameter Estimation and Inverse Problems [J], <http://www.ees.nmt.edu/Geop/Classes/GEOP529/Docs/draft.pdf>, 24-Mar-2003.

[8] Bronstein M M. Blind Deconvolution of Images Using Optimal Sparse Representations [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(6): 726-736.

[9] Mazuelas S, Lago F A, Blas J. Prior NLOS Measurement Correction for Positioning in Cellular Wireless Networks [J]. IEEE Transactions on Vehicle Technology, 2009, 58(5): 2585-2591.

[10] Zhou H Y. Researches on Theories and Models of Spatial Targets Tracking Data Fusion with Applications [D]. Ph. D. dissertation, National University of Defense Technology, 2013.

(上接第 300 页)

2) 本文提出了考虑强度和疲劳寿命影响的层合复合材料铺层参数优化方法。以强度和疲劳寿命值作为约束条件, 以铺层参数 (铺层角度和层数) 作为设计变量, 以质量为优化目标, 基于 Visual Studio 和 ANSYS 软件平台, 编写了优化程序, 该优化方法经过算例验证能够有效的实现考虑强度和疲劳寿命影响的层合结构优化分析。

3) 对层合板进行优化分析, 结果显示: 在强度单一约束 $90\% \sigma_c$ 条件下优化后的结构质量下降了 62.4% , 最优铺层对应的强度值为 603.75 Mpa ; 在疲劳寿命单一约束 94000 约束条件下优化后的结构质量降低了 62.5% , 最优铺层对应的疲劳寿命为 94200 ; 在强度 $80\% \sigma_c$ 和疲劳寿命 94000 双约束下优化后的质量降低了 56.2% , 最优铺层对应的强度值为 613.125 Mpa , 疲劳寿命为 94300 。结果显示双约束条件下优化所得最优铺层对应的强度和疲劳寿命值均大于单一约束条件下的对应值, 可知双约束优化所得的最优铺层力学性能更好。

参考文献:

[1] 王丹勇. 层合板接头损伤失效与疲劳寿命研究 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2006.

[2] 黄曦. 碳纤维增强复合材料层合板疲劳寿命与剩余强度试验研究 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2006.

[3] 雷驰. 温度环境下复合材料层合结构疲劳寿命预测方法研究 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2015.

[4] 李晓宇, 王佩艳. CCF300/BA9916 层合板在湿度环境下的剪切性能试验研究 [J]. 重庆理工大学学报 (自然科学), 2017(8): 98-102.

[5] W T S. Strength Characteristics of Composite Materials [J].

NASA CR. 1965.

[6] Degrieck J V P W. Fatigue damage modeling of fibre-reinforced composite materials: review [J]. Applied Mechanics Reviews, 2001, 54(4): 279-300.

[7] Erdal O, Sonmez F O. Optimum design of composite laminates for maximum buckling load capacity using simulated annealing [J]. 2014.

[8] Kazemi M, Verchery G. Design of composite laminated plates for maximum buckling load with stiffness and elastic modulus constraints [J]. Composite Structures, 2016, 148: 27-38.

[9] 孙秦, 景钊. 等厚度复合材料层板的顺序优化设计方法 [P]. 201510471862. 7.

[10] 侯玉品. 复合材料层合板铺层设计与离散结构选型优化方法研究 [D]. 大连: 大连理工大学, 2013.

[11] 姜封国. 结构系统基于可靠性的优化设计研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2009.

[12] 柯俊, 史文库, 钱琛, 等. 采用遗传算法的复合材料板簧多目标优化方法 [J]. 西安交通大学学报, 2015, 49(8): 102-108.

[13] 陆振玉, 张恩阳, 刘波. 基于改进自适应遗传算法的复合材料铺层优化设计 [J]. 玻璃钢/复合材料, 2016(2): 53-56.

[14] 孙士平, 张卫红. 基于改进模拟退火算法的复合材料层合板频率优化 [J]. 复合材料学报, 2015, (3): 902-910.

[15] Zehnder N, Ermanni P. A methodology for the global optimization of laminated composite structures [J]. Composite Structures, 2006(72): 311-320.

[16] Lin C, Lee Y. Stacking sequence optimization of laminated composite structures using genetic algorithm with local improvement [J]. Composite Structures, 2004(63): 339-345.