

# 基于抽样理论的改进型星座覆盖分析方法

赵双<sup>1</sup>, 徐艳丽<sup>2</sup>, 戴桦宇<sup>1</sup>, 赵程亮<sup>1</sup>

(1. 中国人民解放军装备学院 研究生院, 北京 101416;

2. 中国人民解放军装备学院 航天装备系, 北京 101416)

**摘要:** 针对传统网格点方法在分析星座对目标区域的覆盖性能时, 存在着计算效率不高的问题, 利用抽样理论中借助样本统计量对总体参数进行估计的思想, 对传统网格点方法加以改进; 通过分析星座对目标区域内所有网格点的覆盖情况与网格点经纬度之间的关系, 确立了对所有网格点构成的总体采用先分层后随机的抽样方式, 并分析了层的划分和样本量在各层的分配; 根据不同指标的统计特征, 给出了不同星座覆盖性能指标的估计方法和不同精度条件下总样本量的计算过程, 并建立了改进网格点法的实施流程; 最后利用改进方法计算了仿真时段内北斗卫星导航系统对某一地面区域的平均 PDOP 值, 通过与传统网格点方法的仿真结果进行比较并对仿真数据进行分析, 证明了该改进方法在保证计算精度的同时, 有效地提升了计算效率。

**关键词:** 网格点法; 分层随机抽样; 总体估计; 误差精度

## Improved Constellation Coverage Analysis Method Based on Sampling Theory

Zhao Shuang<sup>1</sup>, Xu Yanli<sup>2</sup>, Dai Huayu<sup>1</sup>, Zhao Chengliang<sup>1</sup>

(1. Department of Graduate Management, Equipment Academy of PLA, Beijing 101416, China

2. Department of Space Equipment, Equipment Academy of PLA, Beijing 101416, China)

**Abstract:** In view of the problem of low computational efficiency of traditional grid point method when analyze the constellation coverage performance of target area, the traditional grid point method is improved by using the idea of estimating population parameters through sample statistics in sampling theory. Through analyzing the relationship between the constellation coverage performance of all grid points in the target area and grid points' latitude and longitude, the stratified random sampling method was established, the layer division method and the distribution way of sample size in each layer are researched. According to the statistical characteristics of different indexes, the improved grid point method gives the way to estimate different coverage performance indexes of constellation and calculate the number of grids with different precision, the process of the improved grid point method is also established. Finally, the average PDOP value of the target region of the Beidou satellite navigation system is calculated through the improved method, by comparing the simulation results with the traditional grid point method, it is proved that the improved method can significantly improve the computational efficiency while ensuring the accuracy of calculation.

**Keywords:** grid point method; stratified random sampling; population estimation; precision error

## 0 引言

在卫星星座设计与研究中, 有一个很重要的问题, 就是如何分析星座的覆盖性能。现有的分析方法可以分为解析法和数值法两种, 其中解析法主要是根据卫星星座的空间结构, 利用几何方法将覆盖条件转化为一系列的约束方程, 通过对方程组的求解得到星座的覆盖性能。典型的解析法包括外接圆方法<sup>[1]</sup>和覆盖带方法<sup>[2]</sup>, 虽然解析法形象直观、简洁明了, 但是对于由多颗卫星组成, 星座中包含多种轨道的卫星星座而言, 由于其空间几何结构的复杂性, 同时又要考虑到摄动、章动对星座构型的影响, 使得解析法在解决此类问题时往往力不从心。

因此, 在计算复杂构型的星座覆盖性能时, 一般采用数值

法, 最常用的就是网格点方法<sup>[3]</sup>。因为其简单易于实现, 便于统计各类覆盖性能指标, 且适用于任意类型的轨道和任意构型的星座而被广泛应用于航天设计与应用中, 但是由于网格点方法本身的特性, 网格点方法存在着计算精度与计算效率之间的矛盾: 当网格分辨率小时, 计算精度高但计算效率低, 当网格分辨率大时, 计算精度差但计算效率高。

除上述几种传统方法之外, 在进行星座覆盖性能计算时, 还存在着一些其他的方法。文献 [4] 提出了地心法和视函数法。文献 [5] 提出了经度条带法。文献 [6] 提出了计算覆盖率的改进型网格点法, 但上述方法都存在着适用范围不广, 计算精度不够的缺陷。本文针对目前航天设计与应用中最为广泛的网格点法计算效率低的问题, 利用抽样理论的知识, 提出了一种改进型的网格点方法, 在保证计算精度的同时, 提升了计算效率。

## 1 网格点方法

利用网格点方法分析星座对某一地面区域的覆盖性能时, 一般将该区域按照某种分辨率划分为一定数量的网格, 通过计算星

收稿日期: 2017-05-07; 修回日期: 2017-05-23。

**作者简介:** 赵双(1991-), 男, 湖北洪湖人, 硕士研究生, 主要从事航天任务分析与设计方向的研究。

徐艳丽(1964-), 女, 山西五台人, 副教授, 硕士研究生导师, 主要从事航天任务分析与设计方向的研究。

座对每个网格中心点的覆盖情况来表征整个网格的覆盖情况, 进而表征整个区域的覆盖情况<sup>[7]</sup>。网格点方法的计算步骤如下:

1) 划分网格。网格点的划分方法按照划分规则的不同一般可分为按经纬度划分、按距离划分和按面积划分。

2) 计算覆盖。对于星座中的任意一颗卫星, 计算并记录它在整个仿真时段内每个时刻对每一个网格中心点的覆盖情况。

3) 统计结果。统计所有网格中心点在仿真时段内每一时刻的覆盖情况, 根据任务需要, 用不同性能指标的统计值(平均值、最大值、最小值)表征星座对该区域的覆盖情况。

## 2 基于抽样理论的改进型网格点法

### 2.1 抽样方法的选择

抽样方法是指从  $N$  个单元组成的总体中, 抽取  $n$  个单元组成的样本的方式。对于网格点方法而言, 其中总体是指将目标区域按照某种分辨率划分后得到的所有网格的集合, 样本是指从所有网格的集合中通过某种抽样方法抽取出的若干个网格的集合。基本的抽样方法有简单随机抽样、系统抽样、分层抽样、多阶段抽样等<sup>[8]</sup>。

针对星座覆盖分析时不同网格点会因为地理经纬度的差别, 而存在覆盖情况上的差异, 本文利用分层随机抽样的方法, 对传统的网格点法加以改进。该方法既保留了简单随机抽样简单直观的特性, 又保证了样本中包含有各种特征的抽样单元, 使得样本的结构与总体的结构相近, 从而有效地提高了估计的精度。

### 2.2 不同星座覆盖性能指标的估计方法

星座覆盖性能指标是衡量星座性能最重要的指标, 在分析星座对目标区域的覆盖性能时, 我们采用的指标一般有: 覆盖百分比、 $N$  重覆盖率、平均覆盖间隙、平均响应时间、平均覆盖重数、覆盖总时间、总覆盖间隙等<sup>[9]</sup>。除此之外, 针对不同功能和类型的星座, 往往还采用其它的指标, 如导航星座一般采用目标区域的 PDOP 值 (position dilution of precision) 三维位置精度因子, PDOP 值不仅反映了覆盖重数、覆盖间隙等其他星座覆盖性能指标的信息, 还是衡量卫星导航定位精度的关键参数<sup>[10]</sup>。

上述这些性能指标就是由所有网格所构成的总体的某项总体参数, 根据这些指标的特点可以将它们划分到总体均值、总体总值、总体比例中。例如平均覆盖重数、平均覆盖间隙、平均响应时间属于总体均值; 覆盖总时间、总覆盖间隔属于总体总值; 覆盖百分比、 $N$  重覆盖率属于总体比例。与总体参数相对应, 在分层随机抽样下, 利用样本统计量对总体参数进行估计的方法一般有: 均值估计、总值估计、比例估计<sup>[11]</sup>。

1) 均值估计。即用样本均值作为总体均值的估计, 对于分层随机样本, 总体均值  $\bar{Y}_s$  的估计为:

$$\hat{\bar{Y}}_s = \bar{y}_s = \sum_{h=1}^L W_h \bar{y}_h = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^L N_h \bar{y}_h \quad (1)$$

式中,  $h$  表示层号 ( $h=1, 2, \dots, L$ ),  $\bar{y}_s$  代表样本均值,  $W_h$  表示第  $h$  层的层权,  $\bar{y}_h$  表示第  $h$  层的样本均值,  $N$  表示总样本量,  $N_h$  表示第  $h$  层中所包含的单元总数。

总值估计。用样本均值和总体单元数得到总值估计, 对于分层随机样本, 总体总量  $Y_s$  的估计为:

$$\hat{Y}_s = N \bar{y}_s \quad (2)$$

2) 比例估计。用样本比例作为总体比例的估计, 对于分层随机样本, 总体比例  $P_s$  的估计为:

$$\hat{P}_s = p_s = \sum_{h=1}^L W_h p_h \quad (3)$$

式中,  $p_h$  表示第  $h$  层的样本比例。

### 2.3 层的划分和样本量在各层的分配

#### 2.3.1 分层原则与层数的确定

在分层随机抽样的过程中, 首先就是要对总体中的所有单元进行分层。对于网格点法而言, 最好的分层方法就是根据所有网格点的星座覆盖性能指标的分布情况, 对网格点进行分层, 但是在抽样调查之前, 我们并不知道各网格点的覆盖情况, 因此只能根据网格点的其他特征, 对网格点进行分层。

对于一个确定的卫星星座而言, 对地面不同网格点的覆盖差异, 由网格点的地理位置直接决定。图 1 显示了北斗卫星导航系统某时刻对某一地面区域内不同经纬度的地面点的 PDOP 值, 可以看出随着经纬度的变化, 地面点的 PDOP 值也在变化, 所以本文在设计分层随机抽样时, 依据网格点经纬度的差异, 对网格点进行分层。

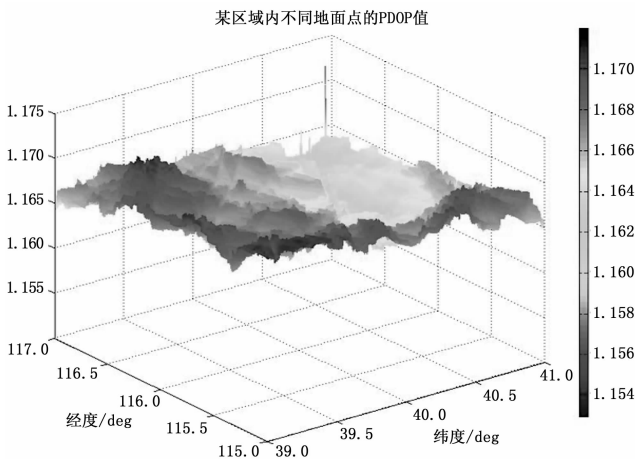


图 1 在北斗卫星导航系统下某一区域内不同地面点的 PDOP 值随经纬度的变化

在实际抽样调查中, 要保证每个层中都存在样本单元, 而且为了给出估计量方差的无偏估计, 一般层数不超过样本量的一半。但是为了提高估计结果的准确性, 一般对总体尽可能多的进行划分, 使层内差异降低。对于分层随机抽样, 当层数增加到一定程度时, 估计精度的收益会非常小。实际分层随机抽样中, 一般层数不超过 6<sup>[12]</sup>。

#### 2.3.2 样本量在各层的分配

对于分层随机抽样, 估计量的精度不仅取决于划分的层数, 还取决于总样本量在各层的分配方式。常见的样本量在各层的分配方式有: 常数分配、比例分配。常数分配是将总样本量均匀的分配到各层中, 比例分配则是使各层的样本量与各层的层权成正比, 这种分配方式可以使样本均匀的散布在各层内。因为网格点方法是将地面区域按照某一分辨率均匀的划分为一定个数的网格, 所以在对地面区域按照经纬度分层之后, 不同层内所包含的网格点与层的面积成正比, 这时若采用比例

分配的方式会保证抽样所得样本的结构与总体的结构更加接近, 估计结果的精度更高。

### 2.4 给定精度条件下总样本量的确定

在利用分层抽样和简单随机抽样的方法对传统的网格点方法加以改进时, 目的是为了提高网格点方法的计算效率, 但同时也要保证计算结果的精度, 而不同精度条件下所对应的总样本量是不同的。

对待估参数  $\theta$  的调查精度的要求一般是用绝对误差  $d$  或相对误差  $r$  表示, 即在  $1-\alpha$  的置信水平下, 保证估计量  $\hat{\theta}$  与待估参数  $\theta$  的差值在误差限之内:

$$P(|\hat{\theta} - \theta| \leq d) = 1 - \alpha \tag{4}$$

样本量较大时,  $\hat{\theta}$  近似服从标准正太分布, 有

$$P\left(\frac{|\hat{\theta} - \theta|}{\sqrt{V(\hat{\theta})}} \leq u\right) = 1 - \alpha \tag{5}$$

其中:  $u$  为标准正太分布的双侧  $\alpha$  分位数, 绝对误差  $d$  和相对误差  $r$  分别为:

$$d = u \sqrt{V(\hat{\theta})} \quad r = u \frac{\sqrt{V(\hat{\theta})}}{\theta} \tag{6}$$

令  $w_h = n_h/n$ , 当估计精度的误差给定时, 分层抽样中确定样本量的一般公式为:

$$n = \frac{\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{w_h}}{\sum_{h=1}^L \frac{W_h S_h^2}{w_h}} = \frac{\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{w_h}}{\left(\frac{d}{u}\right)^2 + \frac{\sum_{h=1}^L \frac{W_h S_h^2}{w_h}}{N}} = \frac{\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{w_h}}{\left(\frac{rd}{u}\right)^2 + \frac{\sum_{h=1}^L \frac{W_h S_h^2}{w_h}}{N}} \tag{7}$$

式中,  $n_h$  表示第  $h$  层所抽取的样本单元,  $S_h^2$  表示第  $h$  层的总体层方差。对于比例分配有  $w_h = W_h$ , 式 (7) 可以表示为:

$$n = \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{N}} \quad (n_0 = \frac{\sum_{h=1}^L W_h S_h^2}{V}) \tag{8}$$

### 2.5 改进网格点法的实施流程

1) 首先, 根据任务要求的分辨率将目标区域划分为  $N$  个网格点, 作为抽样的总体, 分析所关心的覆盖性指标属于总体参数 (总体均值、总体比例、总体总量) 中的哪一项。

2) 其次, 根据经纬度将总体划分为若干层, 确定样本量在各层的分配方式 (均匀分配、比例分配等) 以及给定精度条件下所对应的总样本量  $n$ 。

3) 然后, 采用简单随机抽样的方式从各层中抽取相应个数的单元作为此次抽样的样本, 对样本进行调查获得样本的统计量。

4) 最后, 根据覆盖性指标选择相应的估计方法 (均值估计、比例估计、总量估计), 利用已获得的样本统计量对总体参数进行估计, 得到星座对目标区域的覆盖性指标。其大致流程如图 2 所示。

### 3 仿真算例

仿真试验中, 星座为北斗卫星导航系统, 目标区域为北京地区 (北纬  $39.4^\circ \sim 41.6^\circ$ , 东经  $115.7^\circ \sim 117.4^\circ$ ), 假设地面任务要求网格划分的分辨率为  $0.005^\circ$ , 仿真时段为 2020-01-01 00:00:00~2020-01-02:00:00:00, 时间步长为

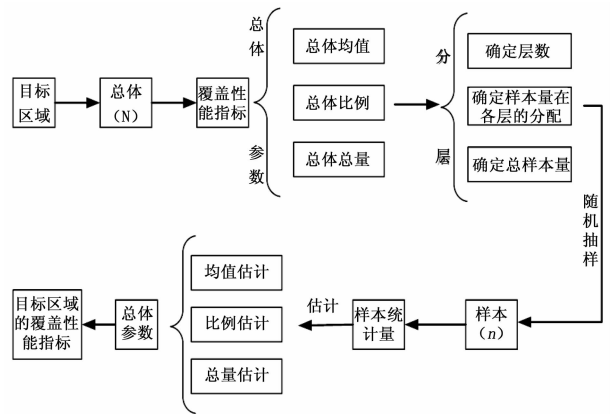


图 2 基于抽样理论的网格点改进方法的流程示意图

300 s, 计算目标区域的平均 PDOP 值。

### 3.1 仿真流程

首先, 将目标区域按照经纬度均匀划分为 6 层, 如图 3。然后根据给定的误差精度计算总样本量和每层中需要抽取的网格数, 目标区域的平均 PDOP 值属于总体参数中的总体均值, 最后利用总体均值的估计方法对目标区域的平均 PDOP 值进行估计。

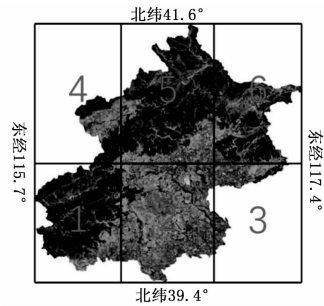


图 3 将目标区域按照经纬度分层

### 3.2 仿真结果

在同样计算资源和仿真条件下, 传统网格点方法和基于抽样理论的改进网格点方法的仿真结果见表 1、表 2。

表 1 传统网格点方法的仿真结果

网格分辨率/(°)	网格数量	平均 PDOP 值	计算耗时/s
0.005	124 173	1.161 65	1 729.952

表 2 改进方法的仿真结果

抽样网格数	平均 PDOP 值	理论误差/%	计算耗时/s	效率提升/%
82 650	1.161 24	0.000 3	930.743	46.20
46 578	1.162 11	0.000 4	524.710	69.67
28 920	1.161 07	0.000 5	358.782	79.26
16 524	1.160 84	0.000 7	200.273	88.42
8 238	1.162 81	0.001 0	100.658	94.18
4 134	1.159 68	0.001 7	49.549	97.14
2 052	1.159 33	0.002 0	25.753	98.51
810	1.165 25	0.003 1	10.487	99.40
408	1.166 30	0.004 0	5.628	99.67

对上述离散的试验数据进行拟合, 绘制出平均 PDOP 值、

理论误差、计算耗时和效率提升随抽样网格数的变化图像, 如图 4。

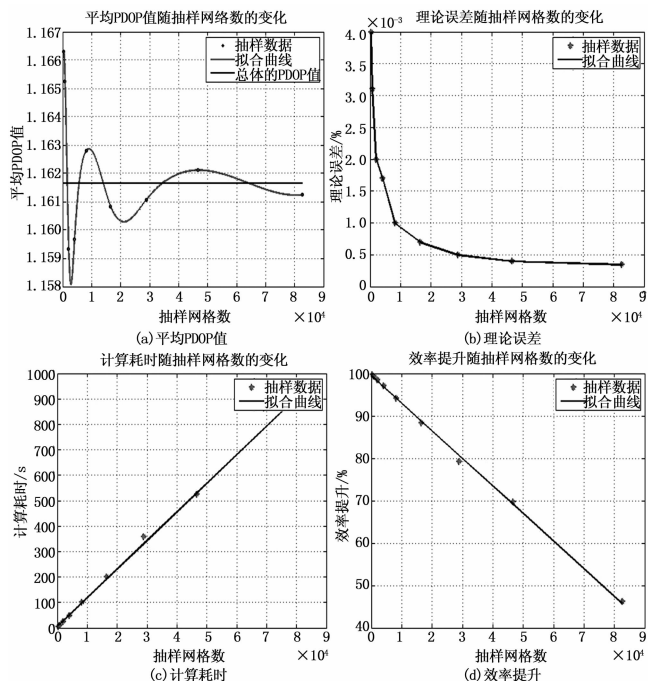


图 4 平均 PDOP 值、理论误差、计算耗时和效率提升随抽样网格数的变化图像

通过上述的仿真结果可以看出, 随着抽样网格数的增加, 样本的平均 PDOP 值越来越接近总体的 PDOP 值; 理论误差最开始增加而陡然下降而后趋于平缓; 计算耗时与效率提升基本与抽样网格数成正比。如在计算效率提升 94.18% 的情况下, 理论误差仅为 0.001%; 随着样本量的变化, 样本统计量与总体参数之间的理论误差始终在 0.0003%~0.0040% 之间变化, 相比传统方法而言, 利用改进的方法在保证计算结果精度的条件下, 显著提高了计算效率。

### 3.3 误差分析

根据式 (7) 可以得到不同样本量下的绝对误差和相对误差:

$$d = u \sqrt{\frac{\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{\omega_h}}{n} - \frac{\sum_{h=1}^L \frac{W_h S_h^2}{\omega_h}}{N}} \quad (9)$$

$$r = \frac{u}{\theta} \sqrt{\frac{\sum_{h=1}^L \frac{W_h^2 S_h^2}{\omega_h}}{n} - \frac{\sum_{h=1}^L \frac{W_h S_h^2}{\omega_h}}{N}}$$

本文在对总体分层时, 按照经纬度将目标区域均匀的划分成 6 层, 样本量在各层的分配方式为比例分配, 可知  $\omega_h = W_h = 1/6$ , 置信水平取 95%, 查表可得对应的  $u = 1.96$ ,  $\theta$  为总体的平均 PDOP 值, 利用各层的总体方差, 绘制出绝对误差和相对误差随抽样网格数的变化图像, 如图 5。

从图中曲线可知, 绝对误差和相对误差的下降速率, 随着抽样网格数的增加而逐渐减小。起初, 绝对误差和相对误差随着抽样网格数的增加而急剧下降; 然后, 当抽样网格数达到一定数量时, 误差的变化趋于平缓; 最后, 随着抽样网格数的进一步增大, 误差的变化趋近于 0。

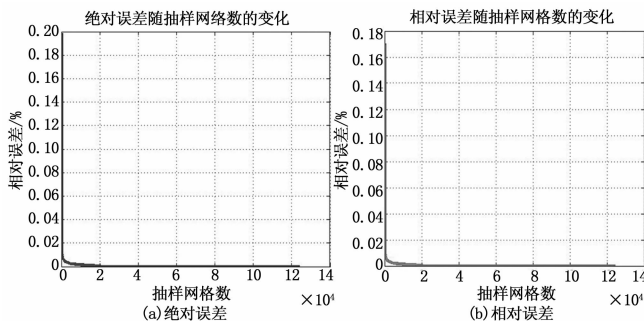


图 5 绝对误差和相对误差随抽样网格数的变化图像

可以看出当抽样网格数增加到一定数量时, 计算精度的收益会非常小, 此时以提升计算精度为目的而牺牲计算效率, 不仅会耗费大量的计算时间而且计算精度的提升也微乎其微。所以在实际工程应用中, 就存在着一个计算精度和计算效率的平衡问题, 本文提出的基于抽样理论的改进型网格点法, 就是寻找一种在保证计算精度的条件下最大程度的提升计算效率的方法。

## 4 结束语

在利用网格点方法长时间、频繁地计算星座对不同区域的覆盖性能时, 为了保证计算结果的精度就需要耗费大量的计算时间, 而这在实际工程应用中不仅会影响任务进展还会耗费计算资源。本文针对这一问题提出了基于抽样理论的网格点改进方法, 并结合抽样理论的相关知识, 给出了不同星座覆盖性能一指标的估计方法和不同精度条件下总样本量的计算方法, 制定了改进型网格点方法的实施流程, 最后通过仿真计算证明了该方法的准确性和有效性。

### 参考文献:

- [1] Walker J G. Some circular orbit patterns providing continuous whole earth coverage [J]. Journal of the British Interplanetary Society, 1971, 24 (1): 369-384.
- [2] Rider L. Optimized polar orbit constellation for redundant earth coverage [J]. Journal of the Astronautical Sciences, 1985, 33: 147-161.
- [3] Morrison J J. A system of sixteen synchronous satellites for world-wide navigation and surveillance, TSC-FAA-72-31 [R]. [S. I.]: Transportation System Center Cambridge Mass, 1973.
- [4] 徐 敏, 程风舟, 陈士槽. 星座覆盖性能数值仿真 [J]. 宇航学报, 2000, 11, 35: 11-17.
- [5] 宋志明, 戴光明, 王茂才, 等. 卫星星座区域覆盖问题的快速仿真算法 [A]. 航天控制, 2014. 10, 32 (5): 65-76.
- [6] 秦睿杰, 戴光明, 王茂才, 等. 一种计算星座区域覆盖的高效抽样网格点法 [A]. 计算机应用研究, 2015. 4, 32 (4): 1065-1073.
- [7] 翁慧慧. 遥感卫星对地覆盖分析与仿真 [D]. 郑州: 解放军信息工程大学, 2006.
- [8] 金勇进. 抽样理论与应用 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.
- [9] 李金昌. 应用抽样技术 [M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [10] 倪育德, 陈 君, 蔚保国, 等. 基于 STK 的 BDS 星座仿真和性能分析 [A]. 计算机测量与控制, 2016, 24 (4): 281-288.
- [11] 张育林等. 卫星星座理论与设计 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [12] 金勇进. 抽样技术 [M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2015.