文章编号:1671-4598(2018)08-0055-05　DOI:10.16526/j.cnki.11-4762/tp.2018.08.013　中图分类号:TP277　文献标识码:A

PHM 系统中的测试不确定优化选择建模

方甲永[1]，肖明清[2]，盛　晟[1]，刘文杰[1]
(1. 空军工程大学 装备管理与无人机工程学院，西安　710051；
2. 空军工程大学 航空工程学院，西安　710038)

摘要： PHM 系统是实现视情维修的关键技术之一，是提高飞机自主保障的重要途径，PHM 系统虚警率高的问题是实际应用中需要解决的关键问题；复杂环境下，PHM 系统监测点的测试不可靠是引发 PHM 系统虚警的重要根源；针对此问题，采用不确定理论研究 PHM 系统中的测试不确定度，并建立测试不确定优化选择模型，在期望值准则和乐观值准则下，将不确定优化选择模型，转化为带有专家信度的确定性优化选择模型，并通过实例给出了不确定优化选择模型的建模和求解过程。

关键词： 不确定理论；测试选择；PHM；不确定优化

Optimal Uncertain Test Selection Model of PHM

Fang Jiayong[1], Xiao Mingqing[2], Sheng Sheng[1], Liu Wenjie[1]
(1. Equipment Management and UAV Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an　710051;
2. Aeronautics Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an　710038)

Abstract: The PHM is one of the key technologies of condition maintenance, and is also an important way to improve the automatic logistics. The false alarm problem is one of the key problems in practical applications. The unreliability of test point is the key cause of PHM false alarm. In order to solve the problem, the uncertainty theory was introduced during the research of test uncertainty degree. And the optimal uncertain test selection model was built. Under the expected rule and optimal rule, the optimal uncertain test selection model was transformed to the certainty optimal model with expert' s belief degree. At last, an example was given to illustrate the molding and solving process.

Keywords: uncertainty theory; test selection; prognostics and health management (PHM); uncertain optimization

0　引言

预测与健康管理（PHM）是实现状态维修保障的关键技术，目前新研制军用飞机明确提出必须装备预测与健康管理系统。通过对某型军用飞机预测与健康管理系统的使用数据分析，系统针对飞机故障的提前预警与故障隔离定位精度较高，但系统发生虚警的概率非常严重，即在使用过程中，系统评估飞机的状态发生故障，但是经过拆卸故障组件进行内场测试检验后，发现组件正常。据某飞行基地的统计，某型飞机在试飞间发生的故障虚警率已占到总故障率的 90%，这极大的影响了飞机的日常飞行保障工作。

为了解决这类问题，相关学者机构开展了以下研究。一是把系统中的不确定性因素当成随机变量，引入到状态评估模型中，然后采用相应滤波算法模型，将不确定性消除，文献［1-3］就是采用这种方法。作者在文献［4-5］中把测试不确定性概率和概率分布变量引入到状态预测评估模型中，然后采用贝叶斯滤波或粒子滤波的方法，降低不确定性的影响。这种方法存在两个问题：一是不确定性的先验概率和分布不容易确定，第二是作者将此方法应用到某型飞机的预测与健康管理系统评估模型中，在实际使用中并未显著降低系统虚警率。解决虚警率的另一种思路，是采用多种方法融合的方式[6-7]，但是这只能消除模型评估的不确定度，并且各个模型融合权重的确定，又带来状态评估的不确定性。

军用飞机预测与健康管理系统发生虚警的重要根源，是因为其工作在复杂的自然环境和电磁环境中，致使状态评估监测信号发生了偏移，造成测试的不确定性，测试的不确定性进入状态评估模型中，从而引起预测与健康管理系统的虚警[8]。因此，作者认为，要从根本上降低系统的虚警率，必须从预测与健康管理的根源解决，即在选择状态评估测试点时必须考虑信号测试的不确定性，从而优化预测与健康管理的状态评估策略，再结合相应的滤波方式和融合方法，这样才能有效降低系统虚警率。

目前国内外关于测试点优化选择的文献，大多不考虑测试的不确定性，只考虑故障覆盖率、隔离率、测试成本等因素的影响[9-12]。而考虑测试不可靠性的测试点选择模型中，相关研究将测试的不确定性看作随机变量，采用概率建模的方法对测试的不可靠度进行评估，并基于概率论对测试性优化选择进行研究[13-17]。然而使用传统概率论的前提是必须有充足的历史数据，使获得的概率分布充分接近实际概率。复杂环境下军用飞机测试不确定数据严重缺失，限制了传统概率论在不确定测试优化选择研究中的应用。这种情况下，只能利用专家的知识和经验来估计 PHM 中的测试不确定性，并给出专家信度。此时，若坚持使用概率论来处理专家信度，则可能导致错误决策。

收稿日期: 2017-12-25；　**修回日期:** 2018-02-08。

作者简介: 方甲永(1983-),男,河南濮阳人,博士,讲师,主要从事故障诊断与预测方向的研究。

本文基于满足自对偶、次可加的不确定理论研究 PHM 系统中的测试不可靠度，通过建立测试不确定条件下的测试优化选择模型，将不确定条件下的测试优化选择问题转化为不确定优化选择问题，并利用不确定变量和不确定分布，在期望值准则和乐观值准则下，将不确定优化选择模型，转化为带有专家信度的确定性优化选择模型，并通过实例给出了不确定优选选择模型的建模和求解过程。

1 不确定理论

定义 1.1：（Liu[18]）假设 Γ 是一个非空集合。L 是 Γ 上的一个 σ－代数。σ－代数 L 中的每一个元素 Λ 被称作一个事件。如果 L 到 $[0，1]$ 的集函数 M 满足如下三条公理：

1) $M\{\Gamma\}=1$；

2) 对任何事件 Λ，成立 $M\{\Lambda\}+M\{\Lambda^c\}=1$；

3) 对任何可列事件序列 $\{\Lambda_i\}$，$M\{U_{i=1}^{\infty}\Lambda_i\}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}M\{\Lambda_i\}$，

则称 M 为不确定测度，称三元组（Γ，L，M）为不确定空间。

定义 1.2：（Liu[18]）不确定变量 ξ 是从不确定空间（Γ，L，M）到实数集的一个可测函数，即：对实数上的任意 Borel 集 B，有 $\{\xi\in B\}=\{y\in\Gamma\mid\xi(y)\in B\}$ 是一个事件。

定义 1.3：（Liu[18]）不确定变量 ξ 的分布函数 Φ 定义为：对任意实数 x，

$\Phi x=M\{\xi\leqslant x\}$

定义 1.4：（Liu[18]）如果，对任意 $\alpha\in(0，1)$，不确定分布 Φ 的逆函数 Φ^{-1}（α）存在且唯一，那么，我们称不确定分布 Φ 是正则的。

定义 1.5：（Liu[18]）设 ξ_1，ξ_2，…，ξ_n 是独立正则的不确定变量，对应的不确定分布函数分别为：Φ_1，Φ_2，…，Φ_n。如果 $f(x_1，x_2，\cdots，x_n)$ 是一个关于 x_1，x_2，…，x_m 严格递增，关 x_{m+1}，x_{m+2}，…，x_n 于严格递减的严格单调函数，那么

$\xi=f(\xi_1，\xi_2，\cdots，\xi_n)$

是一个不确定变量，并且具有如下的逆不确定分布：$\Psi^{-1}(\alpha)=f(\Phi_1^{-1})(\alpha)，\cdots，(\Phi_m^{-1})(\alpha)，(\Phi_{m+1}^{-1})(1-\alpha)，\cdots，(\Phi_n^{-1})(1-\alpha))$。

2 测试不确定优化选择模型

2.1 测试优化选择建模

1) 有限的故障模式集，$S=\{s_1，s_2，\cdots，s_m\}$，其中表示故障模式的总数目；

2) 有限的可用测试集，$T=\{t_1，t_2，\cdots，t_n\}$，其中表示测试的总数目；

3) 测试相关矩阵，$\boldsymbol{D}=[d_{ij}]_{m\times n}$，其中 $d_{ij}\in\{0，1\}$，$d_{ij}=0$ 代表故障 s_i 发生时 t_j 测试通过，$d_{ij}=1$ 故障 s_i 发生时 t_j 测试不通过；

4) 各个测试的成本，$CP=\{CP_1，CP_2，\cdots，CP_n\}$；

5) 测试选择向量，$X=(x_1，x_2，\cdots x_n)^T$ 表示对应的测试是否被选择，即：$x_i=1$ 代表 t_i 被选择，$x_i=0$ 代表 t_i 未被选择；

6) 故障检测率，是指测试能够发现装备一个或多个故障的能力，为正确检测出的故障数与故障模式总数的比值百分比，即 $\gamma_{FD}=\dfrac{|S_D|}{|S|}=\dfrac{|S_D|}{m}$，其中 S_D 为所能正确检测出的故障集合，$S_D=\{s_i\mid s_i\in S，D_iX\geqslant1\}$，其中 $D_iX\geqslant1$，代表故障模式 s_i 对应的第 i 行测试相关矩阵的行向量 $d_{ij}(j=1，2，\cdots，n)$ 与列向量 $X=\{x_1，x_2，\cdots，x_n\}^T$ 的乘积必须大于或等于 1。

7) 故障隔离率，是指测试能够隔离到不大于规定的可更换单元数与同一时间能检测到的故障数之比，即 $\gamma_{FI}=\dfrac{|S_L|}{|S_D|}$，其中 S_L 为所能正确隔离出的故障集合，即 $S_L=\{s_i\mid s_i\in S，\boldsymbol{D}_iX\geqslant(1，\cdots，1)^T\}$，其中 $\boldsymbol{D}_i$ 代表故障 s_i 的可隔离矩阵，$\boldsymbol{D}_i=[d_{jk}^i]_{(m-1)\times n}(j\neq i)$，$d_{jk}^i=d_{ik}\oplus d_{jk}$，$d_{ik}$ 和 d_{jk} 为测试相关矩阵 $\boldsymbol{D}=[d_{ij}]_{m\times n}$ 的元素，符号$\oplus$代表异或运算。$\boldsymbol{D}_iX\geqslant(1，\cdots，1)^T$ 代表可隔离矩阵$\boldsymbol{D}_i$ 的第j 行的向量与列向量 $\boldsymbol{X}=\{x_1，x_2，\cdots x_n\}^T$ 的乘积必须大于或等于 1。

8) 测试优化选择模型

目标函数：$\min\sum_{i=1}^{n}CP_ix_i$

约束条件：$x_i\in\{0，1\}$，$\gamma_{FI}\geqslant\gamma_{FI}^*$，$\gamma_{FD}\geqslant\gamma_{FD}^*$

其中目标函数为最小化测试成本，约束条件 $\gamma_{FI}\geqslant\gamma_{FI}^*$ 为：故障隔离率 γ_{FI} 大于要求故障隔离率 γ_{FI}^*，约束条件 $\gamma_{FD}\geqslant\gamma_{FD}^*$ 为故障检测率大于要求故障检测率 γ_{FD}^*。

2.2 测试不确定优化选择建模

在测试优化选择模型中，当某一故障 s_i 发生时，测试相关矩阵 $\boldsymbol{D}=[d_{ij}]_{m\times n}$ 中 $d_{ij}=0$ 对应的测试 t_j 肯定通过，对应的 $d_{ij}=1$ 的测试 t_j 肯定测试不通过。然而，实践证明，这一假设并不完全成立，在实际工作过程中，由于电磁干扰、不可靠传感器、非直接测量和环境变化等因素的影响，测试本身存在很大的不确定性，为此本文引入测试不确定度的概念。

1) 测试不确定度 $\xi=(\xi_1，\xi_2，\cdots\xi_n)$，代表测试 t_i 的测试不可靠程度，其中 $0\leqslant\xi_i\leqslant1$，$\xi_i=0$ 代表测试完全可靠，$\xi_i=1$ 代表测试完全不可靠，我们假定其不确定分布为 $\Phi(\xi)$。

2) 测试成本，在确定条件下测试成本主要是传感器的安装成本等，一旦测试点确定后其成本是固定的，称其为固有测试成本，即 $CP^1=\{CP_1^1，CP_2^1，\cdots CP_n^1\}$。然而在不可靠测试条件下，除了固有测试成本，还要考虑由于测试不可靠造成的成本，$CP^2=\{CP_1^2，CP_2^2，\cdots CP_3^2\}$ 为测试不通过时后续检测维修的成本。因此测试不确定条件下的总成本 $CP(\xi)=CP^1+\xi CP^2=\{CP_1^1+\xi_1CP_1^2，CP_2^1+\xi_2CP_2^2，\cdots CP_n^1+\xi_nCP_n^2\}$，如果 $\xi=0$ 代表在测试完全可靠

的条件下，测试成本只考虑固有成本即 $CP = CP^1$，如果 $\xi = 1$ 代表在测试完全不可靠的条件下，测试成本为固有成本和后续检测维修成本之和，即 $CP = CP^1 + CP^2$，在 $0 < \xi < 1$ 的范围内，随着测试的不可靠度越大，则其测试成本越高。

3）测试相关矩阵：在测试不可靠条件下，测试相关矩阵 $\boldsymbol{D} = [d_{ij}(\xi)]_{m \times n}$。测试不可靠条件下，对应 $d_{ij} = 0$ 时，故障 s_i 发生时 t_j 测试不通过的不确定度为 ξ_j，即：$d_{ij}(\xi) = \xi_j$；测试不可靠条件下，对应 $d_{ij} = 1$ 时，故障 s_i 发生时 t_j 测试不通过的不确定度为 $1 - \xi_j$，即：$d_{ij}(\xi) = 1 - \xi_j$；综合可得：$d_{ij}(\xi) = d_{ij} + (-1)^{d_{ij}}\xi_j$

（3）故障检测率，在测试不可靠的情况下，故障检测率为测试在不可靠条件下故障检测数与故障模式总数的比值。

$$\gamma_{FD}(\xi) = \frac{P_D}{|S|} = \frac{P_D}{m}$$

其中：$P_D = \sum_{i=1}^{m}\left(1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - d_{ij}(\xi))^{x_j}\right)$，为了使 P_D 有解，此处 $d_{ij}(\xi) \neq 1$，即规定 t_j 的测试不可靠度为 $0 < \xi_j < 1$，因此 $\gamma_{FD}(\xi) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - d_{ij}(\xi))^{x_j}\right)$。

4）故障隔离率，在测试不可靠的情况下，故障隔离率为测试在不可靠条件下的故障隔离数与可检测故障数比值。

$\gamma_{FI}(\xi) = \frac{P_I}{|S_D|}$，其中故障 s_i 的隔离率为：$P_{Ii} = \prod_{k=1, k\neq i}^{m}\left\{1 - \prod_{j=1}^{n}[(1 - d_{ij}(\xi))(1 - d_{kj}(\xi)) + d_{ij}(\xi)d_{kj}(\xi)]^{x_j}\right\}$，因此 P_I 为总的故障隔离率，$P_I = \sum_{i=1}^{m}P_{Ii} = \sum_{i=1}^{m}\prod_{k=1, k\neq i}^{m}\left\{1 - \prod_{j=1}^{n}[(1 - d_{ij}(\xi))(1 - d_{kj}(\xi)) + d_{ij}(\xi)d_{kj}(\xi)]^{x_j}\right\}$

因此，$\gamma_{FI}(\xi) = \frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}\prod_{k=1, k\neq i}^{m}\{1 - \prod_{j=1}^{n}[(1 - d_{ij}(\xi))(1 - d_{kj}(\xi)) + d_{ij}(\xi)d_{kj}(\xi)]^{x_j}\}$。

5）虚警率，为由于测试不可靠发生虚警时造成的故障检测数与可检测故障数的比值。$\gamma_{FA} = \frac{P_A}{|S_D|}$，$P_A$ 为虚警造成的故障检测数，为当 $d_{ij} = 0$ 时，对应的 t_j 可检测故障数，即 $P_A = \sum_{i=1}^{m}(1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - d_{ij}(\xi))^{x_{j(1-d_{ij})}})$，因此 $\gamma_{FA} = \frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}(1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - d_{ij}(\xi))^{x_{j(1-d_{ij})}})$。

6）漏检率，为由于测试不可靠造成的故障漏检数与可检测故障数的比值。

$\gamma_{FO} = \frac{P_O}{|S_D|}$，$P_O$ 为测试不可靠造成的漏检数，为当 $d_{ij} = 1$ 时，对应 t_j 漏检数，即 $P_O = \sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1 - d_{ij}(\xi))^{x_j d_{ij}}$，因此，$\gamma_{FO} = \frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1 - d_{ij}(\xi))^{x_j d_{ij}}$。

7）测试不确定优化选择模型

目标函数：$\min\sum_{i=1}^{n}CP_i(\xi)x_i$

约束条件：$x_i \in \{0, 1\}$，$\gamma_{FI}(\xi) \geqslant \gamma_{FI}^*$，$\gamma_{FD}(\xi) \geqslant \gamma_{FD}^*$，$\gamma_{FA}(\xi) \leqslant \gamma_{FA}^*$，$\gamma_{FO}(\xi) \leqslant \gamma_{FO}^*$

其中目标函数为最小化测试成本，约束条件 $\gamma_{FI}(\xi) \geqslant \gamma_{FI}^*$ 为故障隔离率 $\gamma_{FI}(\xi)$ 大于要求故障隔离率 γ_{FI}^*，约束条件 $\gamma_{FD}(\xi) \geqslant \gamma_{FD}^*$ 为故障检测率 $\gamma_{FD}(\xi)$ 大于要求故障检测率 γ_{FD}^*，约束条件 $\gamma_{FA}(\xi) \leqslant \gamma_{FA}^*$ 为故障虚警率 $\gamma_{FA}(\xi)$ 小于要求的故障虚警率 γ_{FA}^*，约束条件 $\gamma_{FO}(\xi) \leqslant \gamma_{FO}^*$ 为故障漏检率 $\gamma_{FO}(\xi)$ 小于要求的故障漏检率 γ_{FO}^*。

3　测试不确定优化选择模型求解

3.1　不确定目标函数求解

对于目标 $\min\sum_{i=1}^{n}CP_i(\xi)x_i$，$CP_i(\xi) = CP_i^1 + \xi_i CP_i^2$，不确定变量 ξ_i 服从分布 $\Phi(x)$，其反函数为 $\Phi_i^{-1}(x)$。在期望值准则下：

$$minE\left[\sum_{i=1}^{n}CP_i(\xi)x_i\right] = \min\sum_{i=1}^{n}E[CP_i(\xi)x_i] =$$
$$\min\sum_{i=1}^{n}E[(CP_i^1 + \xi_i CP_i^2)x_i] =$$
$$\min\sum_{i=1}^{n}x_i\int_0^1(CP_i^1 + \Phi_i^{-1}(\alpha)CP_i^{\,2})d\alpha$$

3.2　不确定约束条件求解

对于约束条件：$\gamma_{FI}(\xi) \geqslant \gamma_{FI}^*$，$\gamma_{FD}(\xi) \geqslant \gamma_{FD}^*$，$\gamma_{FA}(\xi) \leqslant \gamma_{FA}^*$，$\gamma_{FO}(\xi) \leqslant \gamma_{FO}^*$，进行变化后可得：$\gamma_{FI}^* - \gamma_{FI}(\xi) \leqslant 0$，$\gamma_{FD}^* - \gamma_{FD}(\xi) \leqslant 0$，$\gamma_{FA}(\xi) - \gamma_{FA}^* \leqslant 0$，$\gamma_{FO}(\xi) - \gamma_{FO}^* \leqslant 0$，对于向量 x，如果它满足：$M\{\gamma_{FD}^* - \gamma_{FD}(\xi) \leqslant 0\} \geqslant \alpha$，$M\{\gamma_{FI}^* - \gamma_{FI}(\xi) \leqslant 0\} \geqslant \alpha$，，$M\{\gamma_{FA}(\xi) - \gamma_{FA}^* \leqslant 0\} \geqslant \alpha$，$M\{\gamma_{FO}(\xi) - \gamma_{FO}^* \leqslant 0\} \geqslant \alpha$，则称 x 为不确定优化选择模型的可行解，假设 x^* 为不确定优化选择模型的一个可行解，如果对于所有的 x，均有，$\sum_{i=1}^{n}E[CP_i(\xi)x_i^*] \leqslant \sum_{i=1}^{n}E[CP_i(\xi)x_i]$，则称其为该模型的最优解。

[定义 3.1] 集合 $A_i = \{j \mid d_{ij} = 1\}(i = 1, 2, \cdots, m)$，集合 $B_i = \{j \mid d_{ij} = 0\}(i = 1, 2, \cdots, m)$

$A_k = \{j \mid d_{kj} = 1\}(k = 1, 2, \cdots, m, k \neq i)$，集合 $B_k = \{j \mid d_{kj} = 0\}(k = 1, 2, \cdots, m, k \neq i)$

对于 $j \in A_i$，$d_{ij}(\xi) = d_{ij} + (-1)^{d_{ij}}\xi_j = 1 - \xi_j$

对于 $j \in B_i$，$d_{ij}(\xi) = d_{ij} + (-1)^{d_{ij}}\xi_j = \xi_j$

1）检测率不确定约束条件求解

$M\{\gamma_{FD}^* - \gamma_{FD}(\xi) \leqslant 0\} \geqslant \alpha \Rightarrow$

$M\left\{\gamma_{FD}^* + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\prod_{j=1}^{n}(1 - d_{ij}(\xi))^{x_j} - 1\right) \leqslant 0\right\} \geqslant \alpha \Rightarrow$

$$M\left\{\gamma_{FD}^{*}+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\prod_{j\in A_i}(\xi_j)^{x_j}\prod_{j\in B_i}(1-\xi_j)^{x_j}-1\right)\leqslant 0\right\}\geqslant\alpha$$

在乐观值准则下：

$M\left\{\gamma_{FD}^{*}+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\prod_{j\in A_i}(\xi_j)^{x_j}\prod_{j\in B_i}(1-\xi_j)^{x_j}-1\right)\leqslant 0\right\}\geqslant\alpha$ 成立的充分必要条件为：$\gamma_{FD}{}^{*}+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[\prod_{j\in A_i}(\Phi_j^{-1}(\alpha))^{x_j}\prod_{j\in B_i}(1-\Phi_j^{-1}(1-\alpha))^{x_j}-1\right]\leqslant 0$。

2）隔离率不确定约束条件求解

$$M\{\gamma_{FI}^{*}-\gamma_{FI}(\xi)\leqslant 0\}\geqslant\alpha\Rightarrow\left\{\gamma_{FI}^{*}-\frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{m}\prod_{k\neq i}\{1-\prod_{j=1}^{n}[(1-d_{ij}(\xi))(1-d_{kj}(\xi))+d_{ij}(\xi)d_{kj}(\xi)]^{x_j}\right\}\leqslant 0\right\}\geqslant\alpha$$ 。

对于 $j\in A_i\cap A_k$，$d_{ij}(\xi)=d_{ij}+(-1)^{d_{ij}}\xi_j=1-\xi_j$，$d_{kj}(\xi)=d_{kj}+(-1)^{d_{kj}}\xi_j=1-\xi_j$

对于 $j\in A_i\cap B_k$，$d_{ij}(\xi)=d_{ij}+(-1)^{d_{ij}}\xi_j=1-\xi_j$，$d_{kj}(\xi)=d_{kj}+(-1)^{d_{kj}}\xi_j=\xi_j$

对于 $j\in B_i\cap A_k$，$d_{ij}(\xi)=d_{ij}+(-1)^{d_{ij}}\xi_j=\xi_j$，$d_{kj}(\xi)=d_{kj}+(-1)^{d_{kj}}\xi_j=1-\xi_j$

对于 $j\in B_i\cap B_k$，$d_{ij}(\xi)=d_{ij}+(-1)^{d_{ij}}\xi_j=\xi_j$，$d_{kj}(\xi)=d_{kj}+(-1)^{d_{kj}}\xi_j=\xi_j$

在乐观值准则下：

$M\left\{\gamma_{FI}{}^{*}-\frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{m}\prod_{k\neq i}\left[1-\prod_{j\in A_i\cap A_k}(\xi_j{}^2+(1-\xi_j)^2)^{x_j}\prod_{j\in(A_i\cap B_k)\cup(B_i\cap A_k)}(2\xi_j(1-\xi_j))^{x_j}\prod_{j\in B_i\cap B_k}(\xi_j^2+(1-\xi_j)^2)^{x_j}\right]\leqslant 0\right\}\geqslant\alpha$ 成立的充分必要条件为：

$$\gamma_{FI}{}^{*}-\frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{m}\prod_{k\neq i}\left[1-\prod_{j\in(A_i\cap A_k)(B_i\cap B_k)}(\Phi_j^{-1}(\alpha)^2+(1-\Phi_j^{-1}(1-\alpha))^2)^{x_j}\prod_{j\in(A_i\cap B_k)\cup(B_i\cap A_k)}(2\Phi_j^{-1}(\alpha)(1-\Phi_j^{-1}(1-\alpha)))^{x_j}\right]\leqslant 0$$

3）虚警率不确定约束条件求解

$$M\{\gamma_{FA}(\xi)-\gamma_{FA}^{*}\leqslant 0\}\geqslant\alpha$$

$$M\left\{\frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}(1-\prod_{j\in B_i}(1-d_{ij}(\xi))^{x_j})-\gamma_{FA}{}^{*}\leqslant 0\right\}\geqslant\alpha$$ 。

在乐观值准则下：

$M\left\{\frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}(1-\prod_{j\in B_i}(1-\xi_j)^{x_j})-\gamma_{FA}{}^{*}\leqslant 0\right\}\geqslant\alpha$ 成立的充分必要条件为：$\frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}(1-\prod_{j\in B_i}(1-(\Phi_j^{-1}(\alpha)))^{x_j})-\gamma_{FA}{}^{*}\leqslant 0$

4）漏检率不确定约束条件求解

$$M\{\gamma_{FO}(\xi)-\gamma_{FO}^{*}\leqslant 0\}\geqslant\alpha$$

$$M\left\{\frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j\in A_i}(1-d_{ij}(\xi))^{x_j}-\gamma_{FO}{}^{*}\leqslant 0\right\}\geqslant\alpha$$

在乐观值准则下：

$M\left\{\frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j\in A_i}(\xi_j)^{x_j}-\gamma_{FO}{}^{*}\leqslant 0\right\}\geqslant\alpha$ 成立的充分必要条件为：$\frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j\in A_i}\Phi_j^{-1}(\alpha)^{x_j}-\gamma_{FO}{}^{*}\leqslant 0$。

在期望值准则和乐观值准则下，利用不确定变量逆分布将测试不确定优化模型转化为，带有专家信度确定性优化选择模型：

目标函数：$min\sum_{i=1}^{n}x_i\int_0^1(CP_i{}^1+\Phi_i{}^{-1}(\alpha)\ CP_i{}^2)\,d\alpha$

约束条件：$x_i\in\{0,1\}$，$\gamma_{FD}{}^{*}+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[\prod_{j\in A_i}(\Phi_j{}^{-1}(\alpha))^{x_j}\prod_{j\in B_i}(1-\Phi_j{}^{-1}(1-\alpha))^{x_j}-1\right]\leqslant 0$，$\gamma_{FI}{}^{*}-\frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{m}\prod_{k\neq i}\left[1-\prod_{j\in(A_i\cap A_k)(B_i\cap B_k)}(\Phi_j{}^{-1}(\alpha)^2+(1-\Phi_j{}^{-1}(1-\alpha))^2)^{x_j}\prod_{j\in(A_i\cap B_k)\cup(B_i\cap A_k)}(2\Phi_j{}^{-1}(\alpha)(1-\Phi_j{}^{-1}(1-\alpha)))^{x_j}\right]\leqslant 0$，$\frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}(1-\prod_{j\in B_i}(1-(\Phi_j{}^{-1}(\alpha))^{x_i}))-\gamma_{FA}{}^{*}\leqslant 0$，$\frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j\in A_i}\Phi_j{}^{-1}(\alpha)^{x_i}-\gamma_{FO}{}^{*}\leqslant 0$

在约束条件里，为了求解 $\Phi^{-1}(\alpha)$，Liu[19] 给出了 99－表如表 1 所示。其中第一行代表 α 的大小，即 $\Phi(x)$，第二行代表不确定度 ξ_i 的大小，即 $\Phi^{-1}(\alpha)$。对于 ξ_i 的函数 $f(\xi_i)$，利用运算法则可知其对应的 99－表如表 2 所示。

表 1 ξ 变量 99－表

α	0.01	0.02	0.03	…	0.99
ξ_i	ξ_i^1	ξ_i^2	ξ_i^3	…	ξ_i^{99}

表 2 $f(\xi)$ 变量 99－表

α	0.01	0.02	0.03	…	0.99
$f(\xi_i)$	$f(\xi_i^1)$	$f(\xi_i^2)$	$f(\xi_i^3)$	…	$f(\xi_i^{99})$

4 实例分析

假设 $\xi_i\sim L(a_i,b_i)$ 服从线性分布，即：$\Phi(x)=\begin{cases}0 & 如果\ x\leqslant a\\(x-a)/(b-a) & 如果\ a\leqslant x\leqslant b\\1 & 如果\ x\geqslant b\end{cases}$，对应的故障测试矩阵如表 3 所示。

则目标函数：

$$min\sum_{i=1}^{n}x_i\int_0^1(CP_i{}^1+\Phi_i{}^{-1}(\alpha)\ CP_i{}^2)\,d\alpha=min\sum_{i=1}^{n}x_i\left(CP_i{}^1+CP_i{}^2a_i+CP_i{}^2\frac{\alpha^2}{2(b_i-a_i)}\right)$$

表 3 故障测试矩阵

	t_1	t_2	t_3	t_3
s_1	0	1	1	0
s_2	1	0	0	1
s_3	1	1	0	0

检测率约束条件：$\gamma_{FD}^{*}+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big[\prod_{j\in A_i}\left(\Phi_j^{-1}(\alpha)\right)^{x_j}\prod_{j\in B_i}\left(1-\Phi_j^{-1}(1-\alpha)\right)^{x_j}-1\Big]\leqslant 0$ 为：$\gamma_{FD}^{*}+$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_2-a_2}+a_2\Big)^{x_2}\Big(\frac{\alpha}{b_3-a_3}+a_3\Big)^{x_3}\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_1-a_1}+a_1\Big)\Big)^{x_1}\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_4-a_4}+a_4\Big)\Big)^{x_4}\\
&+\Big(\frac{\alpha}{b_1-a_1}+a_1\Big)^{x_1}\Big(\frac{\alpha}{b_4-a_4}+a_4\Big)^{x_4}\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_2-a_2}+a_2\Big)\Big)^{x_2}\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_3-a_3}+a_3\Big)\Big)^{x_3}+\\
&\Big(\frac{\alpha}{b_1-a_1}+a_1\Big)^{x_1}\Big(\frac{\alpha}{b_2-a_2}+a_2\Big)^{x_2}\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_3-a_3}+a_3\Big)\Big)^{x_3}\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_4-a_4}+a_4\Big)\Big)^{x_4}-3\Big]\leqslant 0
\end{aligned}$$

隔离率约束条件：$\gamma_{FI}^{*}-\frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}\prod_{k=1,k\neq i}^{m}\Big[1-\prod_{j\in(A_i\cap A_k)(B_i\cap B_k)}\left(\Phi_j^{-1}(\alpha)^2+\left(1-\Phi_j^{-1}(1-\alpha)\right)^2\right)^{x_j}\prod_{j\in(A_i\cap B_k)\cup(B_i\cap A_k)}\left(2\Phi_j^{-1}(\alpha)\left(1-\Phi_j^{-1}(1-\alpha)\right)\right)^{x_j}\Big]\leqslant 0$ 为 γ_{FI}^{*}

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{|S_D|}\Big\{1-16\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_1-a_1}+a_1\Big)\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_1-a_1}+a_1\Big)\Big)\Big]^{x_1}\\
&\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_2-a_2}+a_2\Big)\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_2-a_2}+a_2\Big)\Big)\Big]^{x_2}\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_3-a_3}+a_3\Big)\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_3-a_3}+a_3\Big)\Big)\Big]^{x_3}\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_4-a_4}+a_4\Big)\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_4-a_4}+a_4\Big)\Big)\Big]^{x_4}\Big\}\ \Big\{1-4\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_2-a_2}+a_2\Big)^2+\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_2-a_2}+a_2\Big)\Big)^2\Big]^{x_2}\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_4-a_4}+a_4\Big)^2+\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_4-a_4}+a_4\Big)\Big)^2\Big]^{x_4}\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_1-a_1}+a_1\Big)\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_1-a_1}+a_1\Big)\Big)\Big]^{x_1}\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_3-a_3}+a_3\Big)\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_3-a_3}+a_3\Big)\Big)\Big]^{x_3}\Big\}-\cdots-\Big\{1-4\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_2-a_2}+a_2\Big)^2+\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_2-a_2}+a_2\Big)\Big)^2\Big]^{x_2}\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_4-a_4}+a_4\Big)^2+\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_4-a_4}+a_4\Big)\Big)^2\Big]^{x_4}\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_1-a_1}+a_1\Big)\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_1-a_1}+a_1\Big)\Big)\Big]^{x_1}\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_3-a_3}+a_3\Big)\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_3-a_3}+a_3\Big)\Big)\Big]^{x_3}\Big\}\ \Big\{1-4\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_1-a_1}+a_1\Big)^2+\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_1-a_1}+a_1\Big)\Big)^2\Big]^{x_1}\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_3-a_3}+a_3\Big)^2+\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_3-a_3}+a_3\Big)\Big)^2\Big]^{x_3}\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_2-a_2}+a_2\Big)\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_2-a_2}+a_2\Big)\Big)\Big]^{x_2}\Big[\Big(\frac{\alpha}{b_4-a_4}+a_4\Big)\\
&\Big(1-\Big(\frac{1-\alpha}{b_4-a_4}+a_4\Big)\Big)\Big]^{x_4}\Big\}\leqslant 0
\end{aligned}$$

虚警率约束条件：

$\frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}\Big(1-\prod_{j\in B_i}\left(1-\left(\Phi_j^{-1}(\alpha)\right)^{x_j}\right)\Big)-\gamma_{FA}^{*}\leqslant 0$ 为：

$$\frac{1}{|S_D|}\Bigg\{\begin{aligned}&3-\Big(1-\Big(\frac{\alpha}{b_1-a_1}+a_1\Big)\Big)^{x_1}\Big(1-\Big(\frac{\alpha}{b_4-a_4}+a_4\Big)\Big)^{x_4}-\\&\Big(1-\Big(\frac{\alpha}{b_2-a_2}+a_2\Big)\Big)^{x_2}\Big(1-\Big(\frac{\alpha}{b_3-a_3}+a_3\Big)\Big)^{x_3}\end{aligned}$$

$$-\gamma_{FA}^{*}\leqslant 0$$

漏检率约束条件：$\frac{1}{|S_D|}\sum_{i=1}^{m}\prod_{j\in A_i}\Phi_j^{-1}(\alpha)^{x_j}-\gamma_{FO}^{*}\leqslant 0$ 为：

$$\frac{1}{|S_D|}\begin{bmatrix}\Big(\frac{\alpha}{b_2-a_2}+a_2\Big)^{x_2}\Big(\frac{\alpha}{b_3-a_3}+a_3\Big)^{x_3}+\\ \Big(\frac{\alpha}{b_1-a_1}+a_1\Big)^{x_1}\Big(\frac{\alpha}{b_4-a_4}+a_4\Big)^{x_4}+\\ \Big(\frac{\alpha}{b_1-a_1}+a_1\Big)^{x_1}\Big(\frac{\alpha}{b_2-a_2}+a_2\Big)^{x_2}\end{bmatrix}-\gamma_{FO}^{*}\leqslant 0$$

5　结论

军用飞机由于复杂自然环境和电磁环境的干扰，其 PHM 系统的状态监测信号发生偏移，从而引发系统虚警。为从根源上降低虚警率，必须在测试优化选择建模时考虑测试的不确定性。本文将不确定理论应用到测试性建模过程中，通过构建带有专家信度的测试不确定优化选择模型，将测试不可靠条件下的测试性建模问题转化为不确定优化问题，同时解决了基于概率论研究测试不确定性问题，无法有效获得先验概率的限制。目前，将不确定理论用于解决 PHM 系统中的不确定性问题研究的成果尚不多见，因此本文的研究具有很强的前瞻性，论文所研究的相关理论和模型可用于指导解决 PHM 系统中的其他不确定性问题，包括状态预测的不确定性、保障决策的不确定性等问题。

参考文献：

[1] Erdinc O, Brideau C, Willett P, et al. Fast diagnosis with sensors of uncertain quality [J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics－Part B: Cybernetics. 2008, 38 (4): 1157－1165.

[2] Erdinc O, Brideau C, Willett P, et al. Real－time diagnosis and prognosis with sensors of uncertain quality [A]. 2004 IEEE Aerospace Conference [C]. Big Sky, Montana, USA: IEEE. 2004: 3603－3614.

[3] Ying Wang, Yeou－Koung Tung. Improved probabilistic point estimation schemes for uncertainty analysis [J]. Applied Mathematical Modeling, 2009, 33: 1042－1057.

（下转第 64 页）