

# 基于低阶 Tucker 分解的图像恢复技术研究

杨海亮

(青海警官职业学院, 青海 西宁 810006)

**摘要:** 近年来, 图像恢复逐渐成为数字图像处理领域的研究焦点, 为了有效地对受损的、丢失了的图像数据进行恢复, 采用张量数据结构的形式来表示待恢复的图像数据, 并且提出了一种基于张量的图像恢复方法, 通过充分识别清洁图像中混合噪声的内在结构; 具体来说, 对于干净的图像内容, 使用张量 Tucker 分解来描述所有频带之间的全局相关性, 以及各向异性空间光谱总变化 (SSTV) 正则化, 以表征空间和频域中的分段平滑结构; 对于混合噪声的图像内容, 采用正则化来检测稀疏噪声, 包括条纹, 脉冲噪声和死像素, 开发了一种用于通过使用增强拉格朗日乘数 (ALM) 方法来求解所得优化问题的有效算法; 最后, 对模拟和现实生活中有噪声的图像进行了广泛的实验, 结果表明, 算法工作良好, 收敛快, 可使受损图像恢复到一个良好的状态, 恢复精度高。

**关键词:** 低阶 Tucker 分解; 张量正则化; 图像恢复

## Research on Image Restoration Technology Based on Low-Rank Tucker Decomposition

Yang Hailiang

(Qinghai Vocational College of Police Officers, Xining 810006, China)

**Abstract:** In recent years, image restoration has gradually become the focus of research in the field of digital image processing. In order to effectively restore the damaged and lost image data, the image data to be recovered is expressed in the form of tensor data structure. Based on the tensor-based image restoration method, by fully recognizing the inherent structure of the mixed noise in the clean image. Specifically, for the clean image content, tensor Tucker decomposition is used to describe the global correlation between all bands, and the anisotropic spatial spectral total change (SSTV) regularization to characterize the spatial and frequency segments Smooth structure. For the content of mixed noise, regularization is used to detect sparse noise, including fringe, impulse noise and dead pixels, an effective method for solving the obtained optimization problem by using the enhanced Lagrangian Multiplier (ALM) method is developed algorithm. Finally, the simulation results show that the algorithm works well and the convergence is fast, which can restore the damaged image to a good state, and the recovery precision is high.

**Keywords:** low-rank tucker decomposition; tensor regularization; image restoration

## 0 引言

图像恢复是近年来数字图像处理领域里的一大研究热点<sup>[1]</sup>。现实生活中, 通过各种途径获得的图像, 其都存在不同程度的污染与损坏。用相机采集图像时, 当相机聚焦不够精确、成像光源发生散射现象等, 这都会使获得的图像的分辨率下降、对比度减小以至于导致图像比较模糊<sup>[2]</sup>。对图像进行恢复, 是为了使受损或者受污的图像趋向于恢复到无损的理想状态。可根据实际需求, 将受损图像恢复到一定的程度。如今存在的方法如反维纳滤波、R-L 迭代算法等都可以对受损图像进行复原<sup>[3]</sup>。同时, 随着高阶张量在图像恢复及数据分析方面逐渐显现出的优越性, 利用张量结构表示待恢复图像数据, 对缺失图像元素进行恢复已引起各国学者的极大重视<sup>[4]</sup>。传统的张量缺失元素恢复法有: (1) 利用相邻元素间的关系对缺失元素进行恢复, 其假定缺失元素主要对其相邻的元素有依赖关系; (2) 利用元素之间的依赖程度与元素之间距离的关系, 及张量的全局信息特征对缺失数据元素加以复原<sup>[5]</sup>, 实践证明, 张量全局信息特征对数据元素的恢复更加有益。张量全局恢复

法又可分为依赖自身结构特征和张量迹范数两种方法对缺失数据进行恢复, 前者效率低下, 后者是基于压缩感知技术, 恢复精度高, 效果好<sup>[6]</sup>。文中针对已有恢复算法不能充分利用已知信息, 或者已知信息少时恢复误差大等不足, 利用所属后者类别的张量算法, 提出了一种基于低阶 Tucker 分解的图像恢复算法, 从张量元素的多维数据结构出发, 提取出有效的信息特征, 对存在张量缺失信息的图像进行恢复或者复原。

## 1 图像恢复算法

本文以实际采集到真实的图像为研究对象, 提出了基于低阶 Tucker 分解的图像恢复算法。算法分为 4 个阶段, 图像光频模型预处理、低阶张量正则化、ALM 算法生成模型、Tucker 分解恢复图像 4 个部分。其工作过程为: 把通过使用图像采集软件采集到的图像样品输入到系统中, 经灰度化、平滑、滤波去噪、细化等预处理后, 采用张量结构表示图像数据, 把待恢复图像转化为高光谱图像, 最后利用基于低阶 Tucker 分解的图像恢复算法进行复原, 并输出复原后的图像。

## 2 图像光频模型预处理算法

由于现实环境的影响难以避免, 实际获得的图像本身可能已经受到严重的噪声干扰, 所以在进行后续工作前要先对数字图像进行高维变换和建立模型等预处理, 然后再对图像进行复原。

收稿日期: 2017-09-27; 修回日期: 2017-10-25。

作者简介: 杨海亮 (1983-), 男, 陕西渭南人, 硕士, 副教授, 主要从事公安信息技术方向的研究。

### 2.1 高维变换算法

一般来讲,普通的一个多维数组即可构成一个高阶的张量,阶即为张成所在空间所需的向量空间的数量叫做阶<sup>[7]</sup>。对于高阶的张量,其数据结构可以有效的展现出数据元素之间的多维约束关系,这使得以张量形式表示数据拥有一定的优越性<sup>[8]</sup>。三阶张量如图 1 所示。

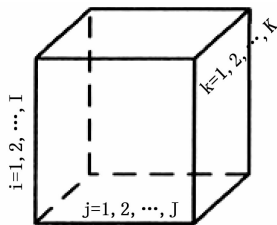


图 1 大小为 1 的三阶张量

对于矩阵来说,如果矩阵下标的其中之一被固定,则此时可以获得相对应的比原始数组少了一维的子数组<sup>[9]</sup>。一般通过只让两个下标自由变化而其他坐标全部固定即可得到张量二维截面,即通常所说的张量切片<sup>[10]</sup>。

### 2.2 训练集模型的建立

已知可以将张量视为多索引数字阵列,其顺序被定义为其模式或尺寸的数量<sup>[11]</sup>。已知可以将张量视为多索引数字阵列,其顺序被定义为其模式或尺寸的数量。 $N$  阶的实值张量由  $x \in R^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n}$  表示,其输入由  $x_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  表示。然后,可以将  $N \times 1$  向量  $x$  视为一阶张量,  $N \times M$  矩阵  $X$  作为二阶张量。

两个相同大小的张量  $X, Y$  的内积被定义为:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot y_{i_1, i_2, \dots, i_n} \quad (1)$$

然后将相应的 Frobenius 规范定义为:

$$\|\chi\|_F = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (2)$$

张量  $X$  的模式  $n$  矩阵表示为  $x_n$ 。其中张量元素  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , 映射矩阵  $(i_n, j)$  满足:

$$j = 1 + \sum_{k=1, k \neq n}^N (i_k - 1) J_k \quad (3)$$

$$J_k = \prod_{m=1, m \neq n}^{k-1} I_m$$

经高维变换、滤波去噪、细化等预处理后的训练模型如图 2 所示。

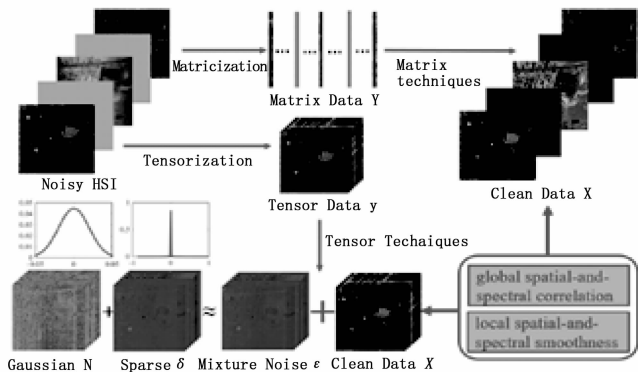


图 2 高维变换后的训练模型

## 3 基于 Tucker 分解的张量数据恢复算法

### 3.1 张量正则化分析

在许多真实情况下,观测到的光频数据被几种不同类型的

噪声所污染。结果是,一个由三阶张量  $\chi: = \{\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^B\}$ , 每一个矩阵  $\chi^i \in R^{h \times w}$  ( $i = 1, 2, \dots, B$ ), 高度  $h$  和宽度  $w, B$  表示带的数量,可以被描述为,

$$y = \chi + E \quad (4)$$

其中:  $\chi$  和  $E$  的大小,分别代表无噪声图像光频值和混合的噪声值。现在,图像恢复的目标是通过利用无噪声图像光频中  $\chi$  的结构和噪声条件来估计  $y$ 。

根据的研究,将噪声项分为两个子项,如图 3 所示。高斯噪声项和稀疏噪声项包括条纹、脉冲噪声和死像素,其退化模型为:

$$y = \chi + N + E \quad (5)$$

其中弗罗贝诺斯规范和  $L$  规范可以用来对这两个噪声子项分别建模<sup>[12]</sup>。

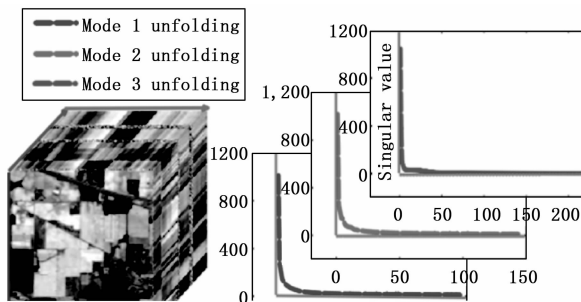


图 3 张量正则化分析图

张量正则化已被广泛应用于探索应对光频恢复任务的空间分段平滑结构<sup>[13]</sup>。在图 3 中可以找到用于示出一个光频的空间平滑度的边缘检测。实际上,还存在光频的局部平滑结构及其频谱模式。光谱域中相邻带之间的大部分差异值几乎等于 0<sup>[14]</sup>。常用的张量正则化都会忽略了这种光谱平滑度,这促使设计出一种新的 SSTV 正则化器来充分挖掘空间和光谱域中的分段平滑结构,从而实现去噪任务<sup>[15]</sup>。

### 3.2 ALM 算法生成模型

如前所述,利用现有知识是光频混合噪声去除的关键考虑因素。通过结合空间和频谱模型中的低阶和归一属性,引入了一种 SSTV 低阶张量分解模型:

$$\min_{\chi, S, N} \|\chi\|_{SSTV} + \lambda \|S\|_1 + \beta \|N\|_F^2$$

$$s. t. Y = \chi + S + N,$$

$$\chi = C \times U_1 \times U_2 \times U_3, U_i^T U_i = I (i = 1, 2, 3) \quad (6)$$

其中:  $C \times U_1 \times U_2 \times U_3$  是已张量  $C$  和矩阵  $U_i^T$  的秩  $r_i$  为核心的 Tucker 分解。并且 SSTV 模型中的  $\|\chi\|_{SSTV}$  定义为:

$$\|\chi\|_{SSTV} := \sum_{i,j,k} \omega_1 |x_{i,j,k} - x_{i,j,k-1}| + \omega_2 |x_{i,j,k} - x_{i,j-1,k}| + \omega_3 |x_{i,j,k} - x_{i-1,j,k}| \quad (7)$$

其中:  $x_{i,j,k}$  是  $\|\chi\|$  的第  $i, j, k$  项,  $\omega_j$  是控制其正则化强度的  $\|\chi\|$  的第  $j$  项的权重。由于 Tucker 分解的非凸性,因此,本文通过使用增强拉格朗日乘数 (ALM) 方法,定义出 SSTV 模型中的  $\|\chi\|_{SSTV}$ , 如图 4 所示。

### 3.3 基于低阶 Tucker 分解恢复算法

将张量  $\chi$  与遮挡张量  $\omega_{\text{omega}}$  两者叠加,即可获得张量  $\beta = \chi * \omega_{\text{omega}}$ , 该量已经缺失部分数据,为缺失张量。

在进行迭代时,首先把原来的缺失部分数据的张量  $\beta' = \beta$  作如式 (8) 所示的 Tucker 分解,使之能够获得核张量  $\tau$  及奇

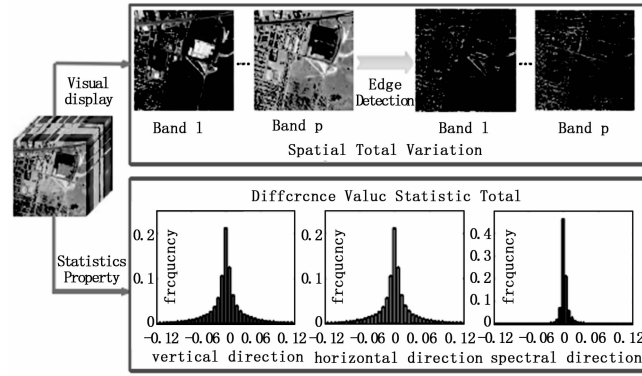


图 4 ALM 算法生成模型

异矩阵  $U^{1(2)}, \dots, U^{1(N-1)}, U^{1(N)}$ 。

$$\beta' = \tau \times_1 U^{1(1)} \times_2 U^{1(2)} \dots \times_N U^{1(N)} \quad (8)$$

式中，括号外上标为迭代次数。

根据 Tucker 分解的原理能够得到，张量第  $n$  阶矩阵的左奇异矩阵与其第  $n$  阶的奇异矩阵相对应，因此，对于  $N$  阶张量，其  $n$  个奇异值矩阵的计算，可以当成是对大小为  $(I_n \times I_1 I_2 \dots I_{n-1} I_{n+1} \dots I_N)$  ( $1 \leq n \leq N$ ) 的矩阵的 SVD 分解计算  $N$  次，从而能够计算求得  $U^{1(1)}, U^{1(2)}, \dots, U^{1(N-1)}, U^{1(N)}$ 。至于核张量，可通过如下式 (9) 计算求得：

$$\tau = \beta' \times_1 U^{1(1)T} \times_2 U^{1(2)T} \dots \times_N U^{1(N)T} \quad (9)$$

再对各奇异矩阵对应的前  $k_1, k_2, \dots, k_n$  个奇异向量进行选取。即可求得  $\beta^l, \beta^l$  与  $\beta'$  看起来非相似。过程如下：

$$\text{分别令：} U_L^{1(1)} = U^{1(1)}(:, 1:k_1),$$

$$U_L^{1(2)} = U^{1(2)}(:, 1:k_2),$$

$$\vdots,$$

$$U_L^{1(N)} = U^{1(N)}(:, 1:k_N),$$

$$\text{核张量：} \tau_L = \tau(1:k_1, 1:k_2, \dots, 1:k_N)$$

则有：

$$\beta^l = \tau_L \times_1 U_L^{1(1)} \times_2 U_L^{1(2)} \dots \times_N U_L^{1(N)} \quad (10)$$

该过程使得数据计算量减少，同时噪声及一些处于边缘部分的数据元素信息被舍去，而对于缺失元素的恢复有重要影响的一些主要成分被很好的保留了下来。对已得到的相似张量的缺失元素信息进行提取，使之恢复到初始缺失张量  $\beta$  的缺失信息部分，从而求得如式 (11) 的  $\beta_L^l$ ：

$$\beta_L^l = \beta + \beta^l * (1 - o_{\text{omega}}) \quad (11)$$

然后对  $\beta_L^l$  仍然进行类似的 Tucker 分解，并获得与之相似的张量  $\beta^l$ ，再对  $\beta^l$  的缺失数据信息部分进行提取，并恢复到初始的缺失矩阵  $\beta$  中，从而求得  $\beta_L^l, \dots$ ，这个过程一直重复下去，一直到目标函数达到收敛状态为止。可以明显发现，每进行一次迭代，相似张量与真实张量的差距就得到一定程度的减小，而缺失元素与真实值之间也越来越靠近，由此可见，由以上过程得到的目标函数最终能够达到收敛状态。因此，通过利用 Tucker 分解中产生的主要成分的特征信息，及其与张量中各个数据元素间的内在约束关系，即可实现对缺失数据元素的复原。

一旦迭代过程达到预先设定的收敛条件，整个恢复过程也就完成了，可利用式 (12) 对恢复质量进行分析：

$$\text{error} = \frac{\sum |(\alpha - \beta_L) * (1 - o_{\text{omega}})|}{nmis} \quad (12)$$

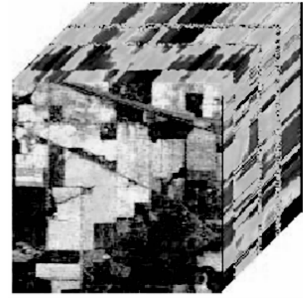


图 5 低阶 Tucker 分解图

式中，分子为被遮挡数据元素的绝对值之差的和，分母为被遮挡元素数。由于对数据的恢复主要是依靠张量自身携带的已知数据元素，而对于已知的数据元素，其值是固定的，因而仅仅评估缺失数据信息这一部分即可。

根据低阶 Tucker 分解算法的一系列推导过程，得出能够对张量的缺失数据进行恢复的迭代算法。该算法通过对一个缺失张量  $\chi$  进行一系列的迭代分解，最终得到一个与原始未被遮挡的张量几乎相等的张量  $\chi$ ，此时遮挡部分数据的值已与真实值接近，已恢复的值与原始  $\chi$  中的值越接近，则表明算法的恢复效果越好，性能更佳。算法流程如下：

输入： $\chi \in R^{I_1 \times I_2 \dots \times I_N}$ , 秩  $k_1, k_2, \dots, k_N, o_{\text{omega}}, Iter_{\text{max}}$

1)  $\beta' = \beta = \chi * o_{\text{omega}}$ , 对张量  $\beta'$  进行 Tucker 分解

2) Repeat

3) for  $n \leftarrow 1$  to  $N$

4)  $\beta(n) \leftarrow U^{(n)} \sum^{(n)} V^{(n)T}$

5) End

6)  $\tau \leftarrow \beta \times_1 U^{1(1)T} \times_2 U^{1(2)T} \dots \times_N U^{1(N)T}$

7)  $\beta_L^l \leftarrow \tau(1:k_1, 1:k_2, \dots, 1:k_N) \times_1 U^{1(1)}(:, 1:k_1) \dots \times_N U^{1(N)}(:, 1:k_N)$

8)  $\beta^l \leftarrow \beta + \beta * (1 - o_{\text{omega}})$

9)  $\beta \leftarrow \beta_L^l, i \leftarrow i + 1$

10) Compute error

11) Until  $i \leq Iter_{\text{max}}$

输出： $\chi$

该算法用张量结构来表示数据信息，通过低阶 Tucker 分解以求解张量各元素之间的内在约束关系，再进一步提取出张量的主要信息成份，从而即可对缺失数据进行恢复。同时，为了减少噪声的干扰，该算法对一些次要信息成份进行了一定程度的剔除，比如图像边缘部分的细节信息，或者是一些噪声之类的，可以得到一个有效的 ALM 方法来解决 LRTDTV 近似模型，即顺序更新直到满足一定的收敛条件。

## 4 测试与分析

在以下实验中，手动调整算法的参数比较方法的结果。另外，为了便于数值计算和可视化，图像光频的所有频带都归一化为  $[0, 1]$ ，然后在恢复后将其扩展原来的倍数。

### 4.1 模拟数据

把通过图像采集软件采集到的图像传送到图像处理系统中，转换成数字信号进行处理，通过对数字图像进行灰度化，滤波，细化等预处理后，将图像数据以张量结构形式表示，并同时叠加上一个遮挡张量，通过对遮挡张量设置不同

的遮挡率使图像数据受到不同程度的缺失形成缺失图像，最后利用张量 Tucker 分解算法对缺失图像进行复原。如图 6 为图像经遮挡率为 40% 的张量遮挡后所形成的缺失部分像素信息的图像。

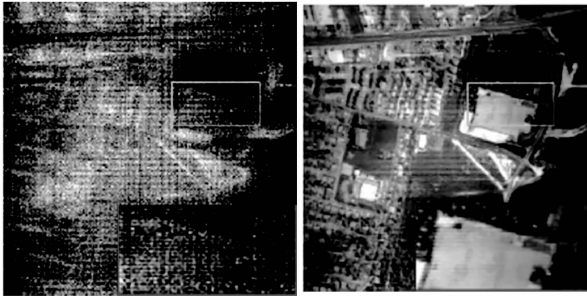


图 6 真实有噪声图像

#### 4.2 真实数据实验

实验时，采用真实图像进行实验，将本文提出的算法应用到图像信息恢复中。利用采集的 50 幅真实图像作为测试样本进行测试，其中每 10 幅为一组，各组之间对遮挡张量设置不同的遮挡率，且图像像素都为  $80 \times 80$ 。介于对张量数据进行计算时，其计算量随张量维数增大而迅速增大，所以仿真时，采用规模适中的  $512 \times 512 \times 3$  张量进行测试，并根据以往的经验，把求相似张量过程中选取的秩设置成 5（即  $k_1, k_2, k_3 = 5$ ， $k_2, k_3 = 5$ ），迭代次数限定 250，当设置遮挡张量的遮挡率为 40% 时，利用 Tucker 分解算法（迭代张量 Tucker 分解恢复算法）对如图 3 所示的缺失图像进行恢复，其恢复出来的图像效果如图 7。

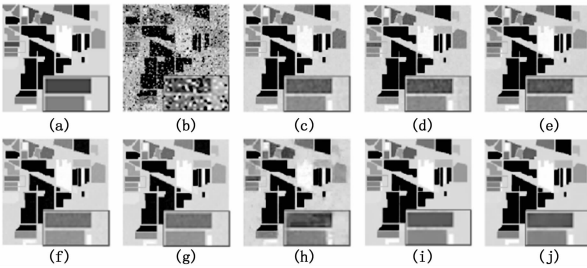


图 7 不同遮挡率图像的张量正则化

通过观察缺失图像图 7 可以发现，经过 40% 的遮挡率遮挡后，图像中的大多数像素信息已经丢失掉，因而造成图像模糊不堪，无法进行辨认。比如说，由于图 8 中像素信息的丢失，但是一般这些关键的部分在识别等一些方面起着重要的作用。而采用低阶算法对一些缺失的像素信息进行复原后，观察可以发现，恢复后图像各个位置的轮廓清晰可见。

当设置遮挡率为 90% 时，其恢复出来的效果如图 10 所示，图 9 是系统采用传统的基于迹范数的张量恢复算法对受 90% 遮挡率遮挡的图像的恢复效果，低阶 Tucker 分解算法在高遮挡率的条件下，仍然能够对图像进行有效的恢复，尽管不是很清晰，但比传统方法好的太多。这表明本文在设计系统的过程中选用的恢复算法，其实际应用能力强、性能高、效果好。但从图中可以看出，恢复效果虽遮挡的提高而下降。

如图 7 为经遮挡率为 50% 的张量遮挡后所形成的缺失部分像素信息的正则化图像，像素大小为  $200 \times 200$ ，图 10 为恢

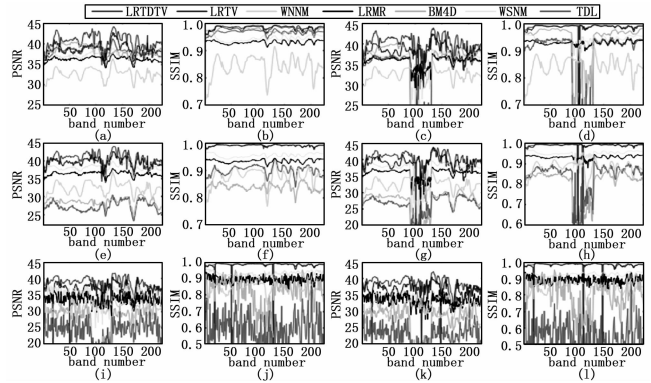


图 8 不同遮挡率图像的光频低阶模型

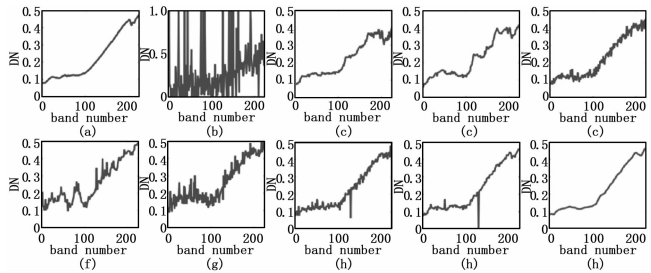


图 9 光频低阶和张量正则化的 Tucker 分解值图

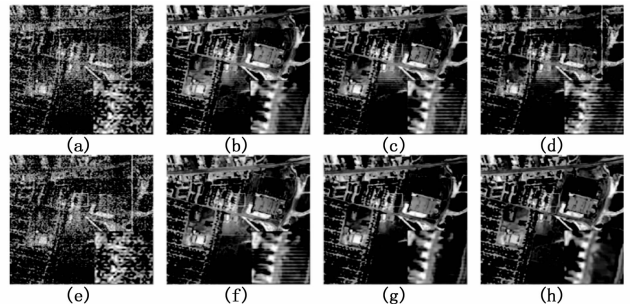


图 10 恢复后的图像

复后的图像。可见恢复效果也很好。

#### 5 结论

本文提出了一种基于低阶 Tucker 分解的图像恢复算法，从光频的低阶和张量正则化分解出发，以迭代方法进行恢复求解，从而对丢失像素信息的图像进行复原。该过程充分利用了矩阵分解的高维扩展性能，能充分保留张量潜在的多维信息结构，能有效提高算法恢复精度。在待恢复张量秩已设定时，利用已知数据元素信息及已恢复出的信息对缺失数据进行恢复。仿真表明本系统简单、易实现，数据恢复精度高、效果好。

#### 参考文献：

[1] Wu Y D, Chen Y H, Zhang H Y. An improved algorithm for image restoration based on modified hopfield neural network [J]. Machine Learning and Cybernetics, 2005, 48 (7): 4720 - 4723.  
 [2] 唐新建. 图像复原正则化方法研究 [D]. 武汉: 华中科技大学, 2006.  
 [3] Eng H L, Ma K K. Noise adaptive soft-switching median filter, IEEE Transactions on Image Processing. 2001, 10: 242 - 251.