

适应多测站滤波定轨系统的可观测度分析方法

陈 帅¹, 廖育荣², 倪淑燕², 李春月¹

(1. 航天工程大学 研究生院, 北京 101416; 2. 航天工程大学 光电装备系, 北京 101416)

摘要: 基于多站测速的滤波定轨算法在航天测控领域具有重要的应用价值, 研究了该系统的可观测性问题并提出一种适应弱观测条件的基于过大条件数的可观测度判定方法; 首先, 建立地惯系下的卫星运动状态方程以及站心系下的量测方程; 然后, 采用龙格库塔离散方法得到分析所需的非线性离散模型; 最后, 将多测站坐标投影代入可观测矩阵求取条件数进行可观测度定量判断, 该方法相较基于条件数的传统判定方法能更好的适应弱观测条件下的可观测性分析; 仿真结果验证了提出方法的有效性, 表明该可观测度分析方法可以为多测站协同定轨的布站优化问题提供理论参考。

关键词: 可观测性; 可观测度; 条件数; 卫星定轨

Modified Observable Degree Analysis Method for Orbit Estimation by Multi-station

Chen Shuai¹, Liao Yurong², Ni Shuyan², Li Chunyue¹

(1. Graduate School, Aerospace Engineering University, Beijing 101416, China;

2. Department of Optical and Electrical Equipments, Aerospace Engineering University, Beijing 101416, China)

Abstract: Orbit determination based on cubature Kalman filter by multi-station with velocity data only have important practical applications in space TT&C system. This paper studies the problem of the observability of the system and provides a modified observable degree analysis method. Satellite's status equation and measurement equation are established and the modified analysis method has been applied to verify that the condition numbers parallel the orbit determination error. The simulation results proved the effectiveness of the modified method. The result of this paper can provide a theoretical reference for station optimize embattle.

Keywords: observability; observability degrees; condition numbers; satellite orbit determination

0 引言

可观测性这一概念是由 Kalman 为了解决线性系统的相关问题而提出的, 如果系统的状态能被过去的观测唯一确定, 则该系统为可观测的^[1]。但航天工程领域, 各种系统均为非线性的, 例如自主导航及滤波定轨系统。对于非线性时变系统的可观测性, 还没有一个统一而严密的定义。

Lee 和 Dunn 提出的李函数准则是目前非线性系统可观测性判定的常用准则^[2]。仅判断系统的可观测性在实际应用中作用并不大, 所以引入可观测度的定义, 能将系统的可观测性大小定量的体现出来。针对这一问题, 国内外先后提出多种非线性系统的可观测度的判断方法, 其中可观测矩阵 SVD 分解^[3-4]和基于条件数的可观测度计算方法^[5-8]最为常见, 然而这两种方案均未考量量测噪声对系统可观测性造成的影响, 李恒年教授及孙仲康教授在文献 [9-10] 中均提出了将可观测矩阵和量测噪声协方差矩阵结合的可观测度判定方法, 所求得的可观测度受噪声影响较大。

在多站单测量体制的实际应用条件下, 对滤波定轨系统进行可观测性分析。针对该种弱观测条件下可观测矩阵条件数过大时可观测度判断不准确的这一情况, 分析了误差形成的原因

并提出了相关解决方案。建立卫星动力学状态方程与多站测速的量测方程, 并求出其观测矩阵, 采用容积卡尔曼滤波 (CKF) 算法作为定轨算法, 利用 Matlab 软件对多测站滤波定轨系统的可观测度进行仿真。通过比较不同测站组合情况下定轨精度与可观测度的关系。仿真结果表明, 改进后可观测度判断方法相较于传统的基于条件数判断方法, 能更准确判断系统的定轨精度与可观测度的对应关系。

1 系统描述

常用非线性滤波算法如扩展卡尔曼滤波 (EKF)、无迹卡尔曼滤波 (UKF) 以及容积卡尔曼滤波 (CKF), 适用于非线性系统的最优状态估计。在卫星轨道估计中常采用非线性滤波算法进行实时轨道估计, 是一种在时域上对轨道状态矢量进行最优估计的方法, 需要对系统建立状态方程与量测方程, 利用状态方程进行时间更新同时对利用量测方程进行量测更新, 最终给出最优估计。对系统进一步进行可观测性分析时, 根据控制理论的要求, 需要求出非线性系统的状态转移方程与观测方程。

1.1 状态方程

根据卫星在轨道运行的动力学规律, 建立卫星的轨道动力学模型。地球是一个形状、质量分布皆非均匀的扁球体, 对航天器的引力需考虑地球非球形引力, 大气阻力和太阳光压、潮汐等其他摄动力。非球形引力项中最大的是 J_2 项, 数量级远远大于其摄动力, 在计算中仅考虑该项。在地心惯性坐标系中, 单颗卫星的运动方程可以表示为引力、地心距离与卫星运动矢量的微分方程。在 J2000 坐标系下建立状态方程, 如下所示:

收稿日期: 2017-09-20; 修回日期: 2017-10-23。

基金项目: 国家高技术研究发展计划 (2015AA7026085)。

作者简介: 陈 帅 (1993-), 女, 湖北武汉人, 硕士研究生, 主要从事航天器运行与控制方向的研究。

廖育荣 (1972-), 男, 四川人, 副教授, 硕士研究生导师, 主要从事小卫星系统方向的研究。

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \\ \dot{v}_x = m(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = \\ -\mu \frac{x}{r^3} \left[1 - J_2 \left(\frac{R_e}{r} \right) \left(7.5 \frac{z^2}{r^2} - 1.5 \right) \right] \\ \dot{v}_y = n(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = \\ -\mu \frac{y}{r^3} \left[1 - J_2 \left(\frac{R_e}{r} \right) \left(7.5 \frac{z^2}{r^2} - 1.5 \right) \right] \\ \dot{v}_z = l(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = \\ -\mu \frac{z}{r^3} \left[1 - J_2 \left(\frac{R_e}{r} \right) \left(7.5 \frac{z^2}{r^2} - 4.5 \right) \right] \end{cases} \quad (1)$$

式中, v_x, v_y, v_z 分别表示卫星在 x, y, z 方向上的速度分量, 径向距离 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, R_e 为地球半径, μ 为地球引力常数, J_2 为带谐项系数。

在计算机仿真分析中, 连续系统无法进行时域上的状态估计, 于是将式 (1) 的连续方程通过数值计算方法离散化, 常用方法有欧拉法、龙格库塔离散方法等, 再对系统进行泰勒一阶展开, 变为 (2) 所示的离散非线性时变系统:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{X}_k \quad (2)$$

式中,

$$\Phi_{k+1,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & h \\ \frac{\partial m}{\partial x} & \frac{\partial m}{\partial y} & \frac{\partial m}{\partial z} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial n}{\partial x} & \frac{\partial n}{\partial y} & \frac{\partial n}{\partial z} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial l}{\partial x} & \frac{\partial l}{\partial y} & \frac{\partial l}{\partial z} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

\mathbf{X}_{k+1} 为 k 时刻的航天器的状态量, \mathbf{X}_k 为 k 时刻的状态量, $\Phi_{k+1,k}$ 为 k 时刻到 $k+1$ 时刻的状态转移矩阵。

1.2 量测方程

量测过程是通过地面站对航天器进行测量, 常用的测量元有测距、测速及测角。在实际应用中, 相较于包含完整测元的体制, 仅采用单测角或单测速的系统轨道估计精度较低, 更具有研究意义, 因此本文采用单测速值的测量系统, 对其进行可观测性研究。

每个测站给出的径向速度量测值通过航天器的状态矢量表示出, 由此构成量测方程组。多个测站对同一航天器进行观测获取多个测速值, 在单站的情况下进行扩维运算, 构成多站仅测速系统的量测方程:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \vdots \\ \dot{\rho}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 \cdot v_{x1} + y_1 \cdot v_{y1} + z_1 \cdot v_{z1}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \\ \vdots \\ \frac{x_n \cdot v_{xn} + y_n \cdot v_{yn} + z_n \cdot v_{zn}}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中, z 表示量测值, $\dot{\rho}_n$ 表示第 n 个测站测得的径向速度, n 表示测站个数。 $x_n, y_n, z_n, v_{xn}, v_{yn}, v_{zn}$ 为卫星在第 n 个测站中基于测站地平坐标系下的位置速度矢量, w 是量测噪声, 统计特性为零均值高斯白噪声。

利用泰勒一阶展开对量测方程进行处理, 对系统状态求偏导, 获得系统观测矩阵^[11]:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\rho}_1}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \dot{\rho}_1}{\partial \mathbf{v}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \dot{\rho}_n}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial \dot{\rho}_n}{\partial \mathbf{v}} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中, $\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \end{bmatrix}$, $\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} (v_x - x \frac{\dot{r}}{r}) & \frac{1}{r} (v_y - y \frac{\dot{r}}{r}) & \frac{1}{r} (v_z - z \frac{\dot{r}}{r}) \end{bmatrix}$ 。

量测方程建立在站心坐标系中, 状态方程建立在 J2000 坐标系中, 进行滤波运算时需要提前将数据进行坐标系转换, 在同一坐标系下进行轨道估计。

2 可观测性分析

可观性及可控性是线性系统的一种定性分析方法, 指系统内的状态是否可以由输出和输入进行分析, 对于系统的运行有重要研究意义。在控制理论研究中, 线性系统可观测性有明确的判断准则, 如格拉姆矩阵判据。任何线性系统的定理推广到非线性系统时, 复杂程度大大增加。因为非线性系统中某一时刻的状态无法由初始状态推导, 非线性系统可观测性分析没有统一的判断准则。

2.1 非线性系统的可观测性分析

非线性系统可通过泰勒展开等近似为线性化系统, 再采用线性系统的判断准则来判断, 但该方法对牺牲了对系统的准确描述使计算变得简明。而直接对非线性系统的可观测性判定在工程运用中, 通常采用由 Lee 和 Dunn 提出的李函数定理^[2]:

对非线性系统:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t); x(t_0) = x_0 \quad (6)$$

$$y(t) = h(x(t), t) \quad (7)$$

如果在 $t \in [t_0, t_1]$ 上, 对凸集 $S \in R^n$ 上的任意 $x_0, x_1 \in S, h(x(t; x), t) = h(x(t; x_1), t)$, 都有 $x_1 = x_0$, 则系统在凸集 S 上是完全可观测的。线性系统在 S 集上的可观测性可以通过对初始状态的可观性分析推导出来, 与其状态向量的变化无关。非线性系统的可观性不能由初始状态推导, 因此考虑由状态方程 $f(\cdot)$ 和量测方程 $h(\cdot)$ 进行推导。

定义:

$$M(x_0; t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) H^T(\tau) H(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau$$

$$H(t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \quad (8)$$

$$\Phi(t, t_0) = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \quad (9)$$

式中, $H(t), \Phi(t, t_0)$ 为 $h(\cdot)$ 和 $f(\cdot)$ 的雅各比矩阵。若 $M(x_0)$ 是正定的, 则系统在凸集 S 上是完全可观测的。

将该定理应用在线性离散时变系统中, 定义可观测性矩阵 Γ 为:

$$\Gamma(k_0, k_0 + N - 1) = \begin{bmatrix} H_{k_0} \\ H_{k_0+1} \Phi_{k_0+1, k_0} \\ \vdots \\ H_{k_0+N-1} \Phi_{k_0+N-1, k_0} \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中, N 表示观测次数, n 表示状态维数。

如果 $rank \Gamma(k_0, k_0 + N - 1) = n$, 即在 N 次观测中, 可观测矩阵 Γ 的秩等于 n , 则系统在 S 上是完全可观测的。将式 (3)、

(5) 带入 (10) 可以得到可观测矩阵, 对其求秩可以对系统的可观测性进行判断, 通过求取特征值或进行奇异值分解, 都可以对系统的可观测度进行判断。

系统中的状态噪声与量测噪声对系统的可观测性也存在影响, 对系统本身结构的可观测性描述可以不考虑噪声的影响。考虑噪声时的系统可观测性及可观测度判断有其他的判断方法。

2.2 可观测度分析方法

可观测性定性的反应出系统的实际运行能力, 为了更清楚反应系统可观测性的大小, 引入可观测度的概念, 对系统的可观测性给出一种定量的分析方法。

矩阵的条件数定义为最大奇异值和最小奇异值的比值, 可观测矩阵的条件数反映可观测矩阵的病态程度, 可以理解为可观测矩阵各行列之间的相关性, 相关性越强表明量测值中获取的相似信息量多, 有效信息量少; 相关性弱则表明量测值中获取的有效信息量多。这样能直观的反映出算法的稳定性、收敛性及收敛速度, 将条件数的大小作为可观测度的判断依据。

对可观测矩阵 Γ 进行式 (11) 所示的奇异值分解:

$$\Gamma = U \Sigma V \tag{11}$$

式中, U 、 V 为奇异值分解后的酉矩阵, Σ 为对角矩阵, 对角线上的元素为可观测矩阵 Γ 的奇异值。条件数 $cond(\Gamma)$ 为最大奇异值和最小奇异值的商。

$$cond(\Gamma) = \frac{\max(\sum)}{\min(\sum)} \tag{12}$$

在实际应用及仿真中发现, 式 (11)、(12) 直接计算出的条件数并不适用于多站单测量体制的滤波定轨算法。传统的条件数计算中将不同测站获取的同种体制的量测值直接带入可观测矩阵 Γ 计算, 所得到的可观测度仅仅是量测信息本身之间数值大小上的相关性, 当两个处于不同位置的测站所获取的量测值在仅仅在数值上相似时, 条件数会猛然增大, 可知其并不能正确体现不同测站所包含有效信息的多少, 定轨精度的好坏与所得到的条件数大小并不存在对应关系。

量测值于不同的测站坐标系中获取, 于是量测值进行无量纲约束的投影处理, 将不同测站的坐标位置带入可观测矩阵计算, 将各测站所获取的量测值视为测站坐标系中的一段有向矢量, 如式 (13) 所示, 则向量 $\dot{\rho}$ 通过三维坐标系中一个坐标 (a, b, c) 表示, 通过坐标转换矩阵 M 将向量转换到同一坐标系下。在数学理论上, 这种向量转换可以将不同测站的位置信息考虑进去, 使可观测矩阵中不同测站获取的量测量之间具有可比性。

$$\dot{\rho} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \tag{13}$$

$$\dot{\rho}' = \left| M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \right| \tag{14}$$

\vec{i} 、 \vec{j} 、 \vec{k} 为三维坐标系的单位向量, M 为从地固系到测站系的转换矩阵, x_c 、 y_c 、 z_c 为该测站在地固系下的坐标。将每个测站中获取的量测值后带入式 (10) 中计算系统可观测矩阵的条件数, 并通过可观测矩阵的条件数的大小分析系统的可观测度。由于系统是时变的, 系统下一时刻的可观测度与上一时刻是不同的, 同一时刻不同系统的可观测度大小并不能代表系统的可观测性强弱, 不同系统之间可观测度的比较, 需要对一段

时间内的可观测矩阵的条件数求均值。

3 仿真分析

为了研究可观测度是否能作为滤波定轨算法精度的参考依据, 采用基于容积卡尔曼滤波的滤波定轨算法, 在卫星工具包 (Satellite Tool Kit, STK) 中建立场景模型, 卫星模型采用太阳同步轨道卫星 (Sun-synchronous satellite), 轨道估计数据在轨道估计算法中采用高精度轨道预报 (high precision orbit propagation, HPOP), 在条件数计算中采用仅考虑 J_2 项的轨道数据, 更利于状态方程的雅各比矩阵的计算同时仿真出的曲线平滑, 最终利用 MATLAB 进行算法验证。

对模型中随机放置的两个测站和随机放置的三个测站在不同几何布设的情况下计算优化方法所得的条件数, 同时进行定轨算法仿真以得出不同测站组合下的定轨误差结果, 滤波步长为 1 s, 条件数计算时长为 100 s, 定轨算法计算时长为 170 s, 在仿真模型中 F1、F2、F3、F4 分别代表四个随机测站, 四个测站的经纬度如表 1 所示。

表 1 四个测站的经纬度

	测站 1	测站 2	测站 3	测站 4
经度	0.69883	0.591015	0.637425	0.757308
纬度	-1.31938	-1.46638	-1.56321	-1.48434

仿真初始轨道值在模型真实轨道值的基础上位置量加入 1 km 的误差, 速度量加上 100 m/s 的误差, 参考真实初始轨道值为:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 498106.953 \\ -5749191.884 \\ 3740580.109 \\ -1518.2866 \\ 3979.083757 \\ 6307.385026 \end{bmatrix}$$

初始协方差矩阵为:

$$P_0^+ = \text{diag} (10^6 \quad 10^6 \quad 10^6 \quad 10^2 \quad 10^2 \quad 10^2)$$

状态噪声协方差矩阵为:

$$Q = \text{diag} (10^{-6} \quad 10^{-6} \quad 10^{-6} \quad 10^{-2} \quad 10^{-2} \quad 10^{-2})$$

选择通过均方根误差判断定轨精度, 根据数据的量级分为速度均方根误差和位置均方根误差。

$$E_{\text{position}} =$$

$$\sqrt{\left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x^n - x_{real}^n)^2 + (y^n - y_{real}^n)^2 + (z^n - z_{real}^n)^2 \right]} \tag{15}$$

$$E_{\text{velocity}} =$$

$$\sqrt{\left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (v_x^n - v_{x\text{real}}^n)^2 + (v_y^n - v_{y\text{real}}^n)^2 + (v_z^n - v_{z\text{real}}^n)^2 \right]} \tag{16}$$

式中, N 为蒙特卡洛仿真次数, 仿真中设 N 为 300。 x^n , y^n , z^n , v_x^n , v_y^n , v_z^n 为第 n 次的滤波估计值, x_{real}^n , y_{real}^n , z_{real}^n , $v_{x\text{real}}^n$, $v_{y\text{real}}^n$, $v_{z\text{real}}^n$ 为 STK 仿真场景中轨道真实值。

由图 1 和图 4 可以看出, 由于系统是时变的, 所以系统的条件数也是时变的, 结合系统的条件数与图 2、图 3 以及图 4、图 5 的定轨精度误差结果可以看出, 条件数越小, 定轨精度越高, 算法的收敛速度更快。为了更直观的分析条件数与定轨精

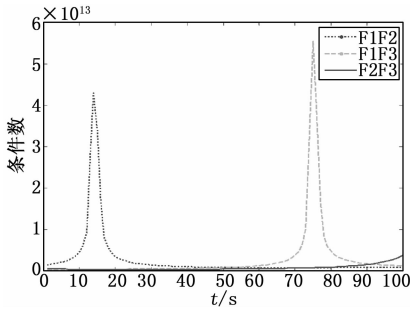


图 1 双测站的条件数变化曲线

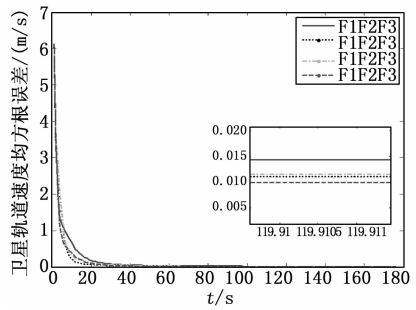


图 6 三测站轨道估计速度均方根误差

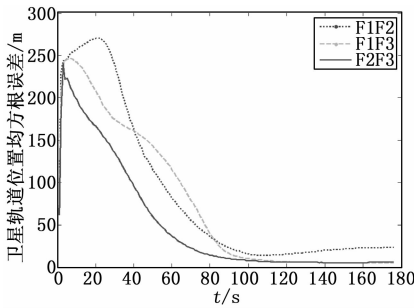


图 2 双测站轨道估计位置均方根误差

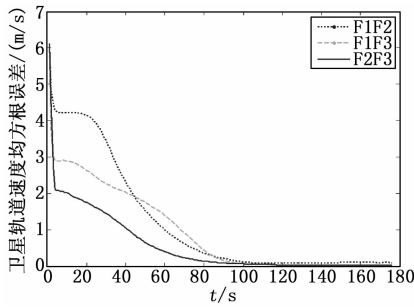


图 3 双测站轨道估计速度均方根误差

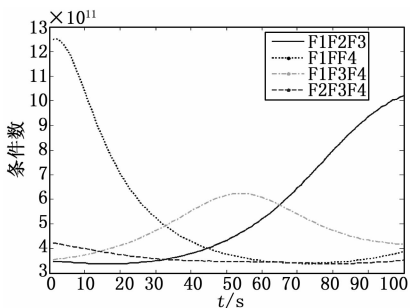


图 4 三测站的条件数变化曲线

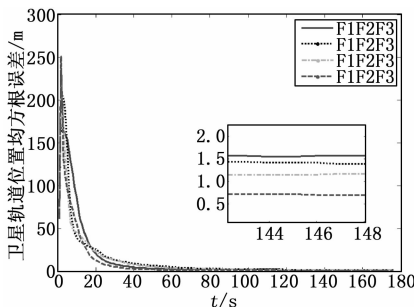


图 5 三测站轨道估计位置均方根误差

度之间的关系, 如表 2 所示, 将传统方法所求的各系统的条件数均值及改进方法所求的条件数均值与均方误差值进行对比, 比较不同方法求得的条件数大小与系统定轨精度的关系。

表 2 定轨精度与两种可观测度方法所求得条件数的比较

	位置 RSME	速度 RSME	条件数 均值	改进后的 条件数均值
F1F2	83.793	1.182	4.121e+10	2.735e+12
F1F3	74.423	0.936	5.103e+11	2.531e+12
F2F3	49.137	0.551	5.202e+10	6.714e+11
F1F2F3	12.556	0.148	4.390e+10	5.454e+11
F1F2F4	11.799	0.116	2.728e+10	5.250e+11
F1F3F4	10.635	0.116	4.834e+10	4.878e+11
F2F3F4	8.6666	0.115	2.684e+10	3.588e+11

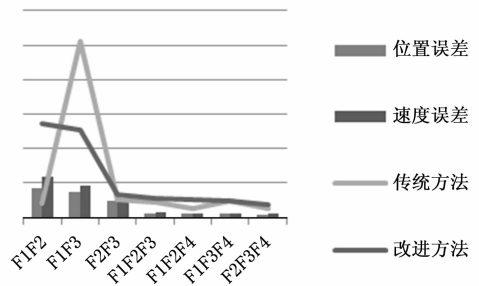


图 7 两种方法所得条件数与估计精度的变化趋势

由表 2 和图 7 可以看出, 传统方法所求得的条件数的大小无法准确反映系统的定轨精度, 并不适用于条件数大, 量测值之间存在不同数值意义的弱观测系统。改进方法将不同测站坐标作为向量进行投影处理, 代入可观测矩阵所求条件数, 仿真结果数值上大于传统方法, 但是对系统可观测性的判断准确度高。因此, 实验结果表明改进方法所求得的条件数大小能正确反映出定轨精度的变化, 当条件数较大时, 系统的定轨精度较差; 条件数较小时, 系统的定轨精度较高。

4 结论

研究了基于多站测速的滤波定轨算法的可观测性及可观测度判断方法。传统可观测度判定方法中条件数的计算方法其结论对于多站单测量值的弱观测系统不适用, 改进方法将不同测站获取的量测值看作矢量进行坐标系转换, 将测站坐标值带入计算, 给出一种适应多站组合测量弱观测条件下的基于条件数的可观测度判定方法。数值仿真结果验证了改进方法相对于传统方法, 有更好的估计效果, 更能准确作为系统可观测度判定的方法。