

基于 Lyapunov 直接法差动驱动机器人控制算法研究

尚伟, 程维明, 付奉刚

(上海工程技术大学 机械工程学院, 上海 201620)

摘要: 对步进电机差动驱动轮式机器人的控制算法进行了研究; 通过建立轮式移动机器人的运动学模型, 提出了基于 Lyapunov 直接法的控制算法, 考虑到步进电机工作特性, 建立轮式移动机器人的动力学模型, 引入速度和加速度的限制策略对运动学模型控制算法输出的最大速度和最大加速度作必要的限制, 最终生成速度与时间的变化关系能更好地满足实际工况; 对所设计的控制算法进行仿真, 仿真结果表明控制算法对轨迹误差调节快, 在调节过程中不会发生速度突变, 能稳定跟踪期望轨迹, 在轨迹发生变化时能迅速做出反应; 采用基于模型的程序设计方法, 将控制算法生成的脉冲数据编译下载到 STM32F407 微控制器进行实验; 控制算法收敛迅速, 符合步进电机实际工作特性。

关键词: 轮式机器人; 运动学模型; 动力学模型; Lyapunov 直接法

Research on Control Algorithm of Differential Drive Robot Based on Lyapunov Direct Method

Shang Wei, Cheng Weiming, Fu Bengang

(College of Mechanical Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201602, China)

Abstract: With a wheeled robot based on step motor drive for the study, Lyapunov direct method control algorithm is proposed through the establishment of a kinematic model. Then the dynamic model is established and the restriction strategy of speed and acceleration is used to limit the maximum speed and the maximum acceleration of the output from the kinematic model. Finally, the relationship between the speed and time is generated, which can better meet actual working conditions. The simulation results show that the control algorithm can adjust the trajectory error quickly, and there will be no speed mutation during the adjustment process. It can also track the desired trajectory steadily and react quickly when the trajectory changes. The pulse data generated by the control algorithm is compiled and downloaded to the STM32F407 microcontroller for experiment, without additional C code programming.

Keywords: wheeled robot; kinematics model; dynamic model; Lyapunov direct method

0 引言

近年来, 非完整移动机器人的运动控制技术已经成为机器人领域的研究热点, 是实现轮式机器人智能化可靠行驶的重要保证, 也是实现自主导航的前提和基础, 具有广阔的应用前景和市场价值。根据控制方法不同分为点镇定控制^[1]和跟踪控制^[2-3], 点镇定控制是为机器人系统设计控制律, 使其能够到达运动平面上任意给定目标点, 并且能够以预期的姿态稳定在该目标点; 跟踪控制所设计的控制律可以使机器人能够到达并以一个给定的速度跟踪平面上某条轨迹。镇定控制与跟踪控制原理不同, 因此在实际应用中常根据不同的问题来设计不同的控制器。

以步进电机驱动的差动驱动轮式机器人为研究对象, 首先建立运动学模型和动力学模型, 设计了一种基于 Lyapunov 直接法的运动学轨迹跟踪控制器; 然后根据动力学模型引入速度、加速度限制策略; 仿真结果证明该控制器具有较快的收敛

速度和较高的稳定性, 在轨迹发生变化时也能迅速做出调整; 最后将控制算法的脉冲参数编译下载到 STM32F407 进行实验, 获得了较好的结果。

1 轮式机器人数学模型

1.1 运动学模型

如图 1 所示, 轮式移动机器人驱动轮轴轴向中心点 O_R 作为运动参考中心, $O_R X_R$ 为机器人前进方向, 设速度为 v , $O_R V_R$ 为机器人驱动轴线方向。 ω_L , ω_R 分别为左、右驱动轮角速度, 令驱动轮向机器人前进方向转动时角速度为正, 向机器人后退方向转动时角速度为负。 r 为驱动轮半径, $2L$ 为驱动

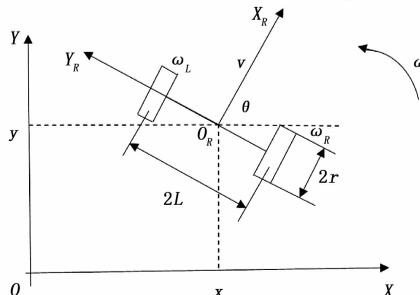


图 1 运动学示意图

收稿日期: 2017-07-26; 修回日期: 2017-08-25。

作者简介: 尚伟(1989-), 男, 黑龙江穆棱人, 硕士研究生, 主要从事移动机器人控制方向的研究。

程维明(1955-), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 主要从事精密检测技术方向的研究。

轮轴向间距。机器人在绝对坐标系 XOY 下的实际位姿为 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$,

其中 x, y 代表机器人运动参考中心 O_R 的坐标, θ 为坐标轴 OX 到机器人前进方向 $O_R X_R$ 的角度, θ 变化率设为 ω , 即为机器人姿态变化角速度, 设逆时针为正, 顺时针为负。假设: 1) 轮式移动机器人在运动过程中, 沿机器人行驶方向 $O_R X_R$ 没有滑动, 即左右驱动轮与地面做纯滚动运动; 2) 在轮式移动机器人驱动轮轴线 $O_R Y_R$ 方向上的速度为 0, 保证机器人在行驶时不发生横向滑移。因此可以得到机器人运动学模型约束条件:

$$\dot{x} \cdot \sin\theta - \dot{y} \cdot \cos\theta = 0 \quad (1)$$

由约束方程 (1) 可知, 不能通过积分得到 x, y 与 θ 的关系, 这是典型的非完整约束系统。

根据运动学原理还可以得到:

$$\dot{x} = v \cdot \cos\theta \quad (2)$$

$$\dot{y} = v \cdot \sin\theta \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (4)$$

$$v = \frac{r \cdot (\omega_R + \omega_L)}{2} \quad (5)$$

$$\omega = \frac{r \cdot (\omega_R - \omega_L)}{2L} \quad (6)$$

由式 (2) ~ (6) 可以建立非完整移动机器人的运动学模型:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r \cdot \cos\theta}{2} & \frac{r \cdot \cos\theta}{2} \\ \frac{r \cdot \sin\theta}{2} & \frac{r \cdot \sin\theta}{2} \\ -\frac{r}{2L} & \frac{r}{2L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} \quad (7)$$

设 $\begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ \theta_d \end{bmatrix}$ 为轮式移动机器人在绝对坐标系 XOY 下的期望位

姿, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$ 为该坐标系下的实际位姿, $\begin{bmatrix} v_d \\ \omega_d \end{bmatrix}$ 为机器人期望线速

度和角速度, $\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$ 为实际线速度和角速度。可将轮式移动机器人在绝对坐标系 XOY 下的位姿误差转化为在机器人局部坐标系 $X_R O_R Y_R$ 下的位姿误差 P_e :

$$P_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

结合公式 (2) (3) (4), 经过推导可得到机器人位姿误差的微分方程:

$$\dot{P}_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega y_e - v + v_d \cos\theta_e \\ -\omega x_e + v_d \sin\theta_e \\ \omega_d - \omega \end{bmatrix} \quad (9)$$

差动驱动轮式移动机器人的控制即是设计控制量 $\begin{bmatrix} v_c \\ \omega_c \end{bmatrix}$,

使得位姿误差 P_e 趋于 0。

1.2 动力学模型

一般情况下, 具有 n 维系统状态移动机器人模型可以用非

完整约束的广义力学系统来描述, 根据拉格朗日力学分析方法, 建立动力学模型^[4]:

$$M(q) \ddot{q} + V(q, \dot{q}) \dot{q} + F(\dot{q}) + G(q) + \tau_d = B(q)\tau - A^T(q)\lambda \quad (10)$$

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad (11)$$

其中: $q \in R^n$ 为系统状态向量; $M(q) \in R^{n \times n}$ 为系统惯性矩阵, 包含系统质量和转动惯量等参数, 是对称正定矩阵; $V(q, \dot{q}) \dot{q} \in R^n$ 为向心力和哥氏力项; $F(\dot{q} \in R^n)$ 为表面摩擦力项; $G(\dot{q} \in R^n)$ 为重力项; τ_d 为有界的未知扰动和未建模动力; $A(q) \in R^{m \times n}$ 为约束矩阵; $\lambda \in R^m$ 为约束力, 不能直接改变, 可看作一个产生于约束方程 (11) 的特殊内部变量, 其作用是限制驱动轮不发生侧滑; $B(q) \in R^{n \times r}$ 为输入变换矩阵; $\tau \in R^r$ 为输入动力学控制向量, 即为电机输出转矩。

研究对象为在平面内运动的轮式移动机器人, 因此动力学

模型中 $n=3$, 位姿向量 $q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$, 令 $A(q) = [\sin\theta \quad -\cos\theta$

0] 约束条件 (1) 就可写成公式 (11) 的形式, 此时 $m=1$ 。哥氏加速度是由于动基的转动与动点相对动基运动耦合引起的加速度, 把机器人作为整体进行研究, 不考虑机器人上的点相对于机器人局部坐标系 $X_R O_R Y_R$ 还有相对运动的情况, 且机器人在平面上运动, 忽略表面摩擦和外界扰动, 因此 $V(q, \dot{q}), G(q), F(\dot{q}), \tau_d$ 均为 0, 可以将动力学方程 (10) 简化为:

$$M(q) \ddot{q} = B(q)\tau - A^T(q)\lambda \quad (12)$$

设机器人的质量为 m , 机器人相对于点 O_R 的转动惯量为 J , 左右两驱动轮的驱动力矩分别为 T_L, T_R , 令驱动轮向机器人前进方向转动时驱动力矩为正, 向机器人后退方向转动时驱动力矩为负。对图 1 进行受力分析, 得到点 O_R 处的广义驱动力向量:

$$B(q)\tau = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_L \cos\theta + T_R \cos\theta}{r} \\ \frac{T_L \sin\theta + T_R \sin\theta}{r} \\ \frac{-2T_L L + 2T_R L}{r} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \\ -2L & 2L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_L \\ T_R \end{bmatrix} \quad (13)$$

公式 (13) 中 f_x 为驱动力在 X 轴向分量, f_y 为驱动力在 Y 轴向分量, f_θ 为使机器人旋转的力矩。当 $\omega > 0$ 时, 机器人由于离心力的作用有向轴负向 $O_R Y_R$ 发生侧滑的趋势, 因此约束力 λ 指向 $O_R Y_R$ 轴正方向, 根据牛顿第二定律建立系统动力学方程:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{T_L + T_R}{r} \cos\theta - \lambda \sin\theta \\ m\ddot{y} = \frac{T_L + T_R}{r} \sin\theta + \lambda \sin\theta \\ J\ddot{\theta} = \frac{2L(T_R - T_L)}{r} \end{cases} \quad (14)$$

根据公式 (12)、(13)、(14), 经过推导可得 $M(q) =$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}, \text{对公式 (11) 求导后结合公式 (14) 可得约}$$

束力:

$$\lambda = m \cdot \dot{\theta} \cdot (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) \quad (15)$$

由于 $r(A(q)) = 1 < 3$, 必然存在非零矩阵 $S(q)$ 对于 $\forall q \in \Omega$, 满足 $A(q)S(q) = 0$, 即 $S(q)$ 为约束矩阵 $A(q)$ 零空间的一组基, 且 $r(S(q)) = 2$. 根据公式 (11) 可知轮式移动机器人的位姿变化率 \dot{q} 包含在约束矩阵 $A(q)$ 零空间内, 且该齐次方程的基础解系中有 2 个解向量, 因此可以用基 $S(q)$ 表示. 结合公式 (7), 令 $S(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$V = \begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}, \text{ 可得机器人位姿变化率:}$$

$$\dot{q} = S(q)V \quad (16)$$

对公式 (16) 求导可得:

$$\ddot{q} = \dot{S}(q)V + S(q)\dot{V} \quad (17)$$

将公式 (17) 代入公式 (12) 可得:

$$M(q)[\dot{S}(q)V + S(q)\dot{V}] = B(q)\tau - A^T(q)\lambda \quad (18)$$

公式 (18) 等号两边同时左乘 $S^T(q)$, 可以消去 $A^T(q)$ λ 项, 经过推导可得:

$$\dot{V} = -(S(q)^T M(q) S(q))^{-1} S(q)^T M(q) \dot{S}(q) V + (S(q)^T M(q) S(q))^{-1} S(q)^T B(q) \tau \quad (19)$$

将 $S(q)$, $M(q)$, V , $B(q)$ τ 的结果代入公式 (19) 最终可得:

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ \frac{2L}{J} & \frac{-2L}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_R \\ T_L \end{bmatrix} \quad (20)$$

由公式 (20) 可得机器人线加速度 $\dot{v}(t)$ 和角加速度 $\dot{\omega}(t)$ 与电机驱动力矩 T_R 、 T_L 的对应关系. 驱动电机选为步进电机, 因此在根据机器人机械结构和重量等因素确定步进电机型号后, 结合步进电机工作特性对所设计的控制律最大线速度、角速度, 线加速度、角加速度做必要限制, 以免超过步进电机的额定工作转矩而使控制精度降低或使步进电机在非正常状态下运转.

2 Lyapunov 直接法控制器设计

轮式移动机器人控制系统原理结构框图如图 2 所示, 其中控制输入量 $V_c = [v_c, \omega_c]^T$, P 表示机器人实际位姿, P_d 表示机器人期望位姿, $P_d - P$ 为机器人在绝对坐标系 XOY 下的位姿误差, 经过旋转矩阵的作用转化为在机器人局部坐标系 $X_R O_R Y_R$ 下的位姿误差 P_e . 采用 Lyapunov 直接法设计运动学控制器, 构造能量函数^[5]:

$$L = \frac{k_1}{2} (x_e^2 + y_e^2) + 2 \sin^2 \left(\frac{\theta_e}{2} \right) \quad (21)$$

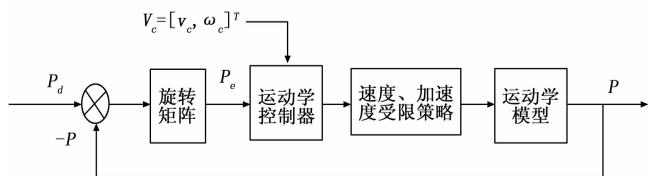


图 2 机器人控制结构原理图

其中: $k_1 > 0$ 且有界, 则公式 (21) 为正定函数, L 对时间 t 求导并结合公式 (7)、(8)、(9) 可得:

$$\dot{L} = k_1 [x_e v_d \cos \theta_e - v_x x_e + y_e v_d \sin \theta_e] + (\omega_d - \omega) \sin \theta_e \quad (22)$$

取控制律:

$$V_c = \begin{bmatrix} v_c \\ \omega_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_d \cos \theta_e + k_2 x_e \\ \omega_d + k_1 v_d y_e + k l_3 \theta_e \end{bmatrix} \quad (23)$$

其中: $k_2, k_3 > 0$ 有界.

联立公式 (5)、(6)、(23) 得:

$$\begin{bmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_2 x_e + v_d \cos \theta_e - L * (\omega_d + k_3 \theta_e + k_1 v_d y_e)}{r} \\ \frac{k_2 x_e + v_d \cos \theta_e + L * (\omega_d + k_3 \theta_e + k_1 v_d y_e)}{r} \end{bmatrix} \quad (24)$$

将控制律 (23) 代入公式 (22) 可得:

$$\dot{L} = -k_1 k_2 x_e^2 - k_3 \theta_e \sin \theta_e \quad (25)$$

通过控制器的作用最终会使 P_e 趋于 0, 则有 $\theta_e \rightarrow 0$, 将 $\sin \theta_e$ 泰勒级数展开, 公式 (25) 可转化为:

$$\dot{L} = -k_1 k_2 x_e^2 - k_3 \theta_e \cdot \left(\theta_e - \frac{\theta_e^3}{3!} + \frac{\theta_e^5}{5!} \dots \right) \approx -k_1 k_2 x_e^2 - k_3 \theta_e^2 \quad (26)$$

对于满足控制律 (23) 的任意输入下, 在 $P_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 邻域

内有 $L > 0, \dot{L} < 0$. 所以控制律 (23) 可以使得差动驱动轮式移动机器人系统局部渐进稳定于平衡点.

控制律 (23) 中 v_c 主要是为了消除移动机器人前进方向上的位置误差 x_e , 其中 $v_d \cos \theta_e$ 为机器人前进方向上因期望线速度 v_d 产生的位移; $k_3 \theta_e$ 项对 θ_e 的导数要大于等于 $k_3 \sin \theta_e$ 对 θ_e 的导数, 因此该控制律要比使用 $k_e \sin \theta_e$ 作为参数的控制律对姿态角误差 θ_e 调节更加迅速.

3 仿真分析

利用 MATLAB/Simulink 进行仿真, 验证控制算法的有效性. 设机器人质量 $m = 20$ kg, 转动惯量 $J = 1$ kg \cdot m², 驱动轮半径 $r = 0.053$ m, 驱动轮间距 $2L = 0.52$ m. 假设移动机器人应用在室内环境下其最大前进速度不超过 1 m/s, 取 $\omega_R(max) = \omega_L(max) = 18$ rad/s (约为 180 rpm), 步进电机型号根据实际工况已经事先选定, 参考雷赛 42HS05A 矩频特征曲线, 步进电机在上述转速下的最大转矩 $T_R(max) = T_L(max) = 0.43$ N \cdot m. 结合公式 (5)、(6) 计算得 $v_{max} = 0.954$ m/s, $\omega_{max} = 3.3669$ rad/s, 由于驱动轮的正反转, 线速度和角速度不会同时取到最大值; 结合公式 (20) 计算得 $\dot{v}_{max}(t) = 0.811$ m/s², $\dot{\omega}_{max}(t) = 8.428$ m/s², 同理, 线加速度和角加速度也不会同时取得最大值, 为方便计算仿真时均取它们最大值作为限制条件.

期望线速度 v_d 设置为 0.5 m/s, 期望轨迹时间为 24.57 s, 长度单位为 m . 期望轨迹初始点位姿 $[110]^T$, 考虑到仿真应具有-般性, 即机器人初始位姿中 x, y, θ 均与期望轨迹初始点位姿存在偏差, 取机器人初始位姿为 $\left[20 \frac{\pi}{2} \right]^T$, 根据经验取 $k_1 = 0.5, k_2 = 10, k_3 = 2$. 仿真结果中期望轨迹与实际轨迹关系如图 3 所示, 其中箭头的起点代表机器人初始位置点, 箭头朝向代表机器人正面的朝向; 在绝对坐标系 XOY 下轮式移动机器人位姿误差如图 4 所示, 其中横轴为时间, 纵轴为误差值; 机器人线速度 v 和角速度 ω 随时间变化关系如图 5 所示; 线加速度和角加速度随时间的变化关系如图 6 所示; 图 4、图

5、图 6 中曲线的终止时间均为期望轨迹时间 24.57s。

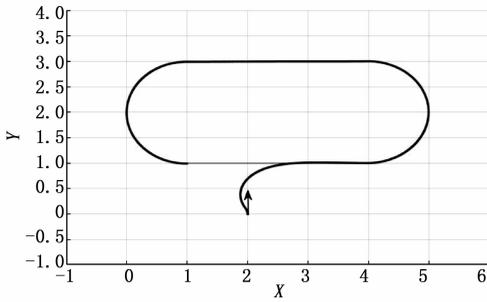


图 3 轨迹跟踪情况

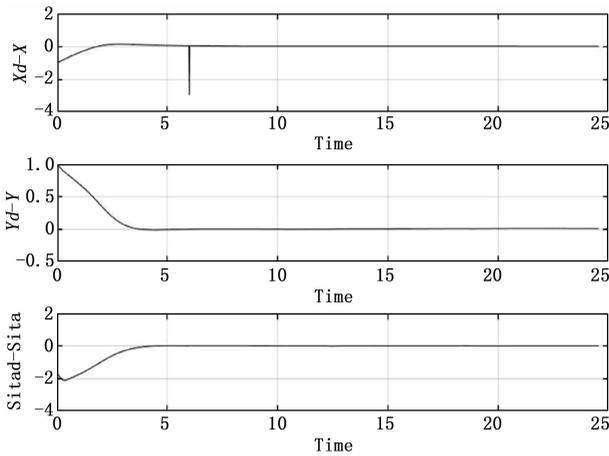


图 4 位姿误差

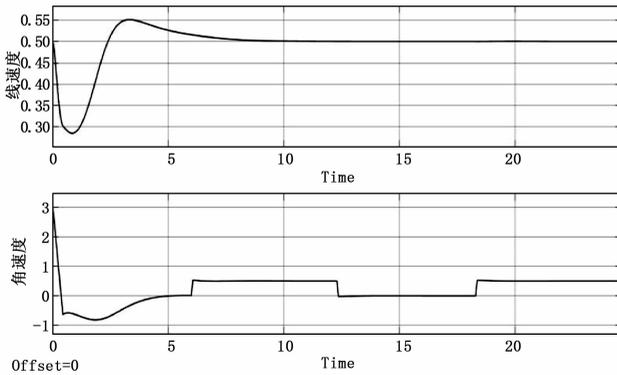


图 5 线速度和角速度的变化曲线

仿真中期望轨迹为直线轨迹和曲线轨迹的结合, 使得机器人在期望轨迹上有角速度的变化, 在这种情况下机器人也能稳定地跟踪运动, 并且在轨迹的变化处能快速做出响应。通过仿真结果可以看出, 初始位姿误差在 4 s 内完成收敛, 调节速度快, 在收敛的过程中没有发生速度突变, 且收敛后有好的稳定性, 除第一次转弯处由于线速度 $v > 0.5$ m/s 使得 $x_d - x$ 出现一次负向跳动, 之后的转弯处线速度稳定在 0.5 m/s, 所以位姿误差基本稳定在 0 值没有再次发生跳变。由于加入速度和加速度限制策略, 使得速度、加速度在有限范围内变化, 通过图 6 可以得到角加速度始终被限制在 $[-8.428 \ 8.428]$ 范围内, 保证了步进电机较高的工作性能和控制精度。

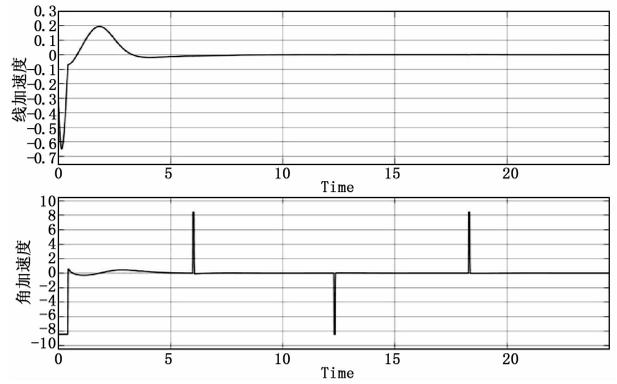


图 6 线加速度和角加速度变化曲线

4 实验验证与分析

结合支持 Simulink 的第三方硬件库, 如图 7 所示, 采用基于模型的程序设计方法, 将脉冲数据编译下载到 STM32F407 微控芯片中。由于机械装配存在误差, 机器人转动惯量无法精确计算等因素, 编译下载前需要将控制算法生成的脉冲数据结合实际情况进行小范围的修正。利用 ULN2003 驱动板将 STM32F407 对应引脚输出的 3.3 V 信号电压转换为步进电机驱动器额定信号电压 5 V, 通过相应的电路连接在机器人平台上进行实验。

取图 3 中 (2, 0), (1, 1), (2.5, 1), (4, 1), (5, 2), (4, 3), (2.5, 3), (1, 3), (0, 2) 等 9 个坐标点为标记点分别标号 0-8, 如图 8 所示布置实验场地。经过实验, 机器人运行状态良好, 在期望时刻与对应标记点的位姿误差较小, 控制算法生成的脉冲数据准确度高, 而且可以较方便地将控制算法计算结果应用于微控制芯片。

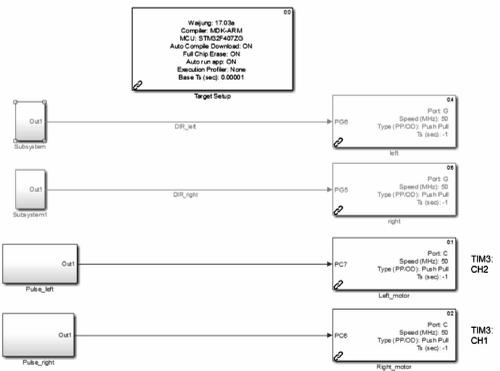


图 7 程序模型



图 8 标记点示意图