

# 基于 Zernike 矩的保持架直径测量方法

孙建辉, 阮姣姣

(浙江工业大学 机械工程学院, 杭州 310000)

**摘要:** 为了解决轴承保持架人工抽检费时费力等问题, 同时提高工业生产自动化水平, 简述了一种基于 Zernike 矩的保持架直径测量方法; 以型号 32007E 的圆锥滚动轴承筐形保持架为例, 提出了基于视觉的直径测量方法, 分析 CCD 相机采集到的轴承保持架大小端面图像, 进行图像预处理后, 对 Sobel 算子边界点阈值进行重新设定, 快速检测出保持架两端圆面可能存在的边缘点集, 增加了有效圆检测算法, 剔除部分偏离有效圆的点, 再利用 Zernike 矩算子对有效的边缘点进行重新定位, 检测出保持架两端圆面的亚像素边缘并计算其精确位置, 最后对所得到的亚像素边缘点集进行最小二乘法拟合, 获取保持架两端直径具体尺寸; 实验表明, 该方法测量结果与人工测量精度接近, 甚至更高, 具有良好的效果和实用价值。

**关键词:** 直径测量; 轴承保持架; Zernike 矩; 亚像素

## Measuring Method of Cage Diameter Based on Zernike Moment

Sun Jianhui, Ruan Jiaojiao

(Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310000, China)

**Abstract:** In order to solve the time-consuming and laborious problem of manual inspection of bearing cages, and to improve the level of industrial production automation, a method of measuring the diameter of cages based on Zernike moments is presented. Taking the 32007E cylindrical roller cage as an example, a vision-based diameter measurement method is proposed to analyze the image of the bearing cage size captured by the CCD camera. After image preprocessing, the threshold of the Sobel operator is changed and is used to detect the possible edge point set, after the effective circle detection, remove part of the interference point, and then using Zernike moment operator on the edge of these re-positioning to detect the image sub-pixel edge and calculate the exact location. Finally, these exact positions are fitted by using the least squares method to obtain the specific dimensions of the diameter of the cage. The actual operation shows that this method can achieve the expected accuracy, with good results and practical value.

**Keywords:** diameter measurement; bearing cages; Zernike moment; sub-pixel

## 0 引言

轴承保持架在实际加工过程中容易产生尺寸偏移等问题, 若不及时发现, 将影响轴承的正常工作。由于滚动轴承可分为滚针轴承、圆锥滚子轴承、圆柱滚子轴承、深沟球轴承等, 根据滚动体的不同, 轴承保持架侧面的形状也有所不同, 但直径测量是他们的共同测量部分, 因此, 本文以圆锥滚子轴承筐形保持架为例, 讨论直径测量问题。传统生产过程中一般通过人工测量的方法, 测量速度慢, 且容易产生视觉疲劳。目前机器视觉检测技术作为一种非接触式检测手段, 由于其具有非接触、实时、在线、精度高等特点, 已经在板材尺寸测量、车辆测距、工业 CT 图像检测等方面得到了广泛的运用<sup>[1-3]</sup>。

边缘检测是视觉测量的重要步骤之一, 常用的边缘检测算子有 Roberts、Prewitt、Canny 等, 这类算子只能做到像素级的边缘定位, 且以微分运算为基础, 对噪声敏感, 检测结果很容易得到伪边缘, 达不到精度要求。

亚像素边缘检测技术最早由 Hueckel 提出<sup>[4]</sup>, 主要的方法有拟合法、插值法和矩方法, 其中矩方法应用最为广泛, Lyvers<sup>[5]</sup>等利用 6 个图像几何矩, 计算出 4 个阶跃边缘参数, 由于不具备正交性, 因此图像处理时会出现冗余信息。Ghosal 和 Mheortal 首次提出<sup>[6-7]</sup>了利用 Zernike 正交矩来检测亚像素边缘,

建立理想的阶跃灰度模型, 计算图像的三个不同阶次 Zernike 矩来确定 4 个参数, 并以此为判断边缘的依据来确定图像的边缘。李金泉等<sup>[8]</sup>针对 Ghosal 算法中没有考虑模板效应, 在边缘点的计算中加入了代表模板大小的参数  $N$ , 改善边缘较粗的问题。但在实际应用过程中, Zernike 多项式存在大量的阶乘和幂运算, 计算较复杂, 计算时间不能满足实际需求; 曲迎东等<sup>[9-10]</sup>提出一种 Sobel-Zernike 矩边缘算子, 其检测精度与 Zernike 矩和 Sobel 算子接近, 并在分析影响因素过程中, 得出当图像中边缘点比率为 87.75% 时, Sobel-Zernike 矩和 Zernike 矩运行时间相同, 由于实际图像中边缘点占比率不可能超过 50%, 因此前者方法运算时间更短。本文在 Sobel-Zernike 矩算法基础上, 对 sobel 算子边界点阈值进行重新设定, 并增加有效圆检测, 剔除残差较大的干扰点, 提高定位精度, 最后运用最小二乘法计算得到保持架两端圆直径尺寸。

## 1 Zernike 矩亚像素边缘检测算法

### 1.1 Zernike 矩定义

Zernike 矩是一种正交矩, 由 Teague 在 1980 年提出, 一副连续图像  $f(x, y)$  的  $n$  阶  $m$  次 Zernike 矩定义如下<sup>[11]</sup>:

$$Z_{n,m} = \frac{n+1}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x,y) V_{n,m}^*(\rho) dx dy \quad (1)$$

其中:  $*$  表示共轭,  $V_{n,m}$  为 Zernike 多项式, 定义为:

$$\begin{cases} V_{n,m}(\rho, \theta) = R_{n,m}(\rho) \exp(jm\theta) \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

收稿日期: 2016-12-06; 修回日期: 2017-01-05。

**作者简介:** 孙建辉(1955-), 男, 浙江杭州人, 教授级高工, 硕士生导师, 主要从事计算机控制和机电一体化航天非标地面测试设备研制方向的研究。

其中： $n - |m|$  为偶数， $|m| \leq n$ ， $j = \sqrt{-1}$ ， $R_{n,m}$  ( $\rho$ ) 为径向多项式，定义为：

$$R_{n,m}(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-|m|)/2} \frac{(-1)^s (n-s)! \rho^{n-2s}}{s! \left(\frac{n+|m|-s}{2}\right)! \left(\frac{n-|m|-s}{2}\right)!} \quad (3)$$

对于  $N \times N$  的离散数字图像  $f(x, y)$  二维 Zernike 矩定义为：

$$Z_{n,m} = \sum_x \sum_y f(x,y) V_{n,m}(\rho, \theta) \quad (4)$$

### 1.2 基于 Zernike 矩的边缘检测原理

图像的 Zernike 矩具有旋转不变性，旋转  $\theta$  角度后， $Z'_{n,m}$  与  $Z_{n,m}$  相比，只改变相角，模保持不变，即：

$$Z'_{n,m} = Z_{n,m} \exp(-jm\theta) \quad (5)$$

基于 Zernike 矩的边缘检测原理就是根据这一特性，建立理想阶跃灰度模型，通过像素点的 3 个不同阶次的 Zernike 矩，求解边缘检测所需要的参数  $h$ 、 $\theta$ 、 $l$ 、 $k$ ，最后将这 4 个参数作为边缘判据确定目标边缘。

图 1 为图像的亚像素边缘检测理想模型。其中，圆为单位圆，直线  $L$  被单位圆包含的部分代表理想边缘，圆内  $L$  两侧的灰度值分别为  $h$  和  $h+k$ ， $k$  为灰度差， $l$  为原点到边缘的理论距离， $\theta$  为  $l$  和  $x$  轴的夹角。将图像顺时针旋转  $\theta$  角度后，得到图 (b)，此时直线  $L$  与  $y$  轴平行且关于  $x$  轴对称，旋转后的边缘函数  $f'(x, y)$  满足下式：

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f'(x,y) y dx dy = 0 \quad (6)$$

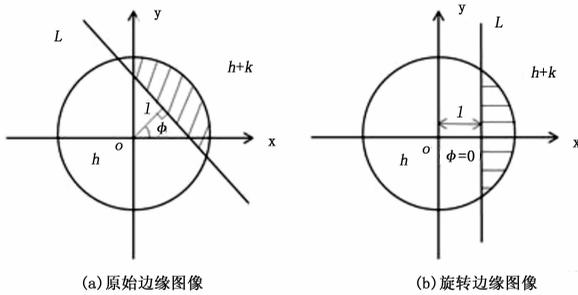


图 1 理想阶跃边缘模型

根据式 (5) 可得如下关系：

$$Z'_{00} = Z_{00}, Z'_{11} = Z_{11} e^{-j\theta}, Z'_{20} = Z_{20} \quad (7)$$

由 Zernike 矩定义式和式 (6) 可知  $Z'_{11}$  的虚部为 0，则可求得参数  $\theta$ ，

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}(Z_{11})}{\text{Re}(Z_{11})} \right) \quad (8)$$

式中， $\text{Re}(Z_{11})$ 、 $\text{Im}(Z_{11})$  分别表示  $Z_{11}$  的实部和虚部。

根据图 1 的理想模型，下面分别求解  $Z'_{00}$ 、 $Z'_{11}$ 、 $Z'_{20}$ ，

$$Z'_{00} = h\pi + \frac{k\pi}{2} - k\sin^{-1}(l) - kl \sqrt{1-l^2} \quad (9)$$

$$Z'_{11} = \frac{2k(1-l^2)^{3/2}}{3} \quad (10)$$

$$Z'_{20} = \frac{2kl(1-l^2)^{3/2}}{3} \quad (11)$$

由式 (7)、(10)、(11) 进一步推导可得，

$$l = \frac{Z'_{20}}{Z'_{11}} = \frac{Z_{20}}{Z_{11} \exp(-j\theta)} \quad (12)$$

$$k = \frac{3Z'_{11}}{2(1-l^2)^{3/2}} = \frac{3Z_{11} \exp(-j\theta)}{2(1-l^2)^{3/2}} \quad (13)$$

$$h = \frac{Z_{00} - \frac{k\pi}{2} + k\sin^{-1} + kl \sqrt{1-l^2}}{\pi} \quad (14)$$

上面的公式推导中需要确定  $Z_{00}$ 、 $Z_{11}$ 、 $Z_{20}$  这三个 Zernike 矩，本文选用曲迎东等<sup>[9]</sup>推导的  $7 \times 7$  模板，利用模板对图像每个像素点的卷积运算得到对应的 Zernike 矩。考虑到模板的放大效应，最终边缘点的亚像素坐标公式为：

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{7l}{2} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中： $(x_s, y_s)$  表示边缘的亚像素坐标， $(x, y)$  表示图 1 中原点的坐标。

## 2 基于 Zernike 的保持架直径测量

为方便测量两端面的直径及减少后续的计算量，处理过程中仅提取圆形 ROI 区域，且进行有效圆检测。具体算法步骤包括：(1) 图像输入；(2) 中值滤波，去除噪声；(3) 阈值分割，将目标和背景分离；(4) Sobel 边缘检测粗定位；(5) 有效圆检测，剔除干扰点；(6) Zernike 矩亚像素检测精定位；(7) 最小二乘法拟合圆。

### 2.1 滤波与阈值分割

为增加检测精度，需对采集后图像去噪，由于中值滤波属于非线性滤波，对消除孤立的噪声点十分有效，且克服图像细节模糊等缺点，因此本文采用  $3 \times 3$  的中值滤波对保持架图像进行处理。

图像分割主要目的是将背景和目标分离开以便于后续处理，图像分割最常用的方法是基于灰度阈值的分割。阈值分割步骤可以分为确定阈值和根据阈值划分图像。根据一定方法确定阈值  $t$  后，若像素点灰度大于阈值则判定为目标，否则为背景。本文采用最大类间方法 (OTSU)，遍历每个像素点的灰度  $t$ ，分别计算目标和背景的像素点占整幅图像的比例  $\omega_0$ 、 $\omega_1$ ，平均灰度  $\mu_0$ 、 $\mu_1$ ，整幅图像的平均灰度  $\mu$ ，根据公式  $\sigma^2 = \omega_0 (\mu - \mu_0)^2 + \omega_1 (\mu - \mu_1)^2$ ，使得  $\sigma^2$  最大时的  $t$  为最佳阈值。

### 2.2 Sobel 算子边缘粗定位

保持架图像边缘的粗定位是利用基于一阶导数的边缘检测算子——Sobel 算子，采用水平 X 方向、垂直 Y 方向小区域模板和图像卷积来近似计算梯度值  $G(x, y)$ 。计算出每个像素点的梯度值后，根据设定的阈值  $T$ ，若  $G(x, y) > T$ ，则判定为边缘点。

$$G(x,y) = \sqrt{G_x(x,y)^2 + G_y(x,y)^2} \quad (16)$$

其中： $G_x(x, y)$  表示该点 X 方向的梯度分量， $G_y(x, y)$  表示该点 Y 方向的梯度分量。

在边缘检测算法中，关键在于阈值  $T$  的选取。如果阈值取值过大，则出现的伪边缘就越多；如果阈值取值过小，则有效边缘点也可能被去除。因此，阈值的取值一般需要满足不丢失重要边缘、抗噪性好、计算简单等要求。阈值的选取方法很多，有全局阈值、局部梯度阈值<sup>[12]</sup>等，本文采用分割后图像的标准差作为阈值  $T$  进行边缘判断，即：

$$T = \sqrt{\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M [f(x,y) - J]^2 / MN} \quad (17)$$

其中： $J = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M f(x, y) / MN$  为图像灰度均值， $M$ 、 $N$  分别表示图像的行数和列数。

### 2.3 有效圆检测

为增加检测精度，本文在 Sobel 粗定位后增加了有效圆检

测。有效圆检测是一种迭代法, 在每一次迭代的过程中剔除残差过大的干扰点, 直至满足条件。

$G = \{ (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N) \}$ , 为 Sobel 粗定位后边缘点集,  $N$  表示当前像素点。具体步骤如下:

1) 对点集  $G$  进行二乘法拟合, 得圆方程  $(x - a_n)^2 + (y - b_n)^2 = r_n^2$ , 圆心坐标  $G_n = (a_n, b_n)$ , 半径  $r_n$ ,  $n$  为迭代次数;

2) 计算每个边缘点的残差:  $\epsilon_{n,i} = (x_{n,i} - a_n)^2 + (y_{n,i} - b_n)^2 - r_n^2$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, N_n$ , 其中  $(x_{n,i}, y_{n,i})$  表示当前迭代次数为  $n$  的边缘点坐标,  $N_n$  表示当前迭代次数为  $n$  的边缘点总数;

3) 将残差  $\{\epsilon_{n,i}, i = 1, 2, 3, \dots, N_n\}$  从小到大排序, 剔除排在末尾的  $N_n \times c$  个点,  $c$  表示百分比, 本文取  $c = 70\%$ , 一次迭代后, 边缘点集缩小为  $G_{n+1}$ 。

4) 对点集  $G_{n+1}$  重新拟合, 求得圆心坐标  $C_{n+1} = (a_{n+1}, b_{n+1})$ , 半径  $r_{n+1}$ , 当迭代前后圆心距  $d_n < k$  或者  $n = 3$  时, 结束算法, 否则返回步骤 (2), 经多次实验, 本文中取  $k = 0.03$ 。

### 3 实验及结果分析

#### 3.1 实验测量装置及编程环境

实验测量的光源为红外平面光源, 由 LED 阵列来产生红外光, 照明方式采用背光照明; 选用黑白相机, 型号为 Basler aca2500-14gm, 靶面尺寸 1/2.5", 像素尺寸  $2.2 \mu\text{m} \times 2.2 \mu\text{m}$ ; 镜头为固定焦距 25。实验编程环境为 MatlabR2012a, 采集到的图像大小  $648\text{p} \times 486\text{p}$ 。由于固定焦距镜头的放大倍数与物面位置有关, 为保证被测精度需使得被测特征处在同一物面上。因此本文实验分两次拍摄, 分别对大端面外圆、小端面内圆进行尺寸检测。

#### 3.2 测量对象

本文测量对象是型号为 32007E 圆锥滚子轴承筐形保持架, 两端面呈圆形, 侧边坡面均匀的分布 23 个梯形兜孔。对保持架质量检测包括两端圆直径尺寸、兜孔上下边尺寸、兜孔分布的均匀度等, 本文以直径为例, 对两端的直径进行实验测量。图 2 为局部结构示意图, 其中  $d_c = 43_0^{+0.62} \text{ mm}$ ,  $D_c = 57.5 \text{ mm}$ 。

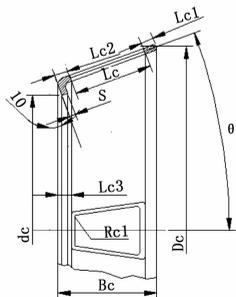


图 2 保持架局部结构示意图

#### 3.3 实验结果

第一组实验对大端面直径测量, 测量结果如图 3 所示。图 (a) 为黑白相机拍摄图, 对其进行中值滤波后, 采用上述提到的自适应阈值分割法 (OTSU), 遍历图像中每一个灰度级, 使得背景和目标之间的类间方差最大, 实验中取最佳阈值  $t_1 = 0.5569$ , 分割结果如图 (b) 所示, 可见滤波去除了大部分噪声, 使得分割后的效果较好, 除外圆最左侧个别像素点外, 保持架外圆基本完整; 对图 (b) 进行 Sobel 边缘算子检测得到

图 (c), 其中边界判断阈值取分割后图像的方差,  $T_1 = 0.2748$ , 从图中可看出 Sobel 检测后图像的边缘已是单像素宽度且外圆曲线连续, 未见明显的锯齿状; 通过亚像素边缘检测和最小二乘法拟合得到检测结果图 (d), 其中, 有效圆检测迭代 3 次, 阶跃强度阈值取  $k_t = 1.5$ , 距离阈值取  $l_t = 1/\sqrt{2}$ , 这里通过对亚像素检测后边缘点集的连通域边缘点总数计算, 设定阈值的方法, 仅对大端外圆进行最小二乘法拟合, 得到外圆直径为 172.4622 (pixel)。

第二组实验对小端面直径测量, 测量结果如图 4 所示。图 (a) 为黑白相机拍摄图, 和第一组实验方法相同, 经过中值滤波和自适应阈值分割后得到图 (b), 其中最佳阈值  $t_2 = 0.108$ , 由图 (b) 可知保持架侧边坡面上均匀分布着的兜孔已分割为背景, 这有利于减少后续算法的计算复杂度; 图 (c) 为 Sobel 边缘检测结果, 边界判定阈值  $T_2 = 0.2369$ , 和第一组实验结果一样, Sobel 检测后图像的边缘也是单像素宽度, 内圆边界完整光滑, 未见明显的锯齿状; 图 (d) 为最终检测结果, 有效圆检测迭代 2 次后, 以相同方法得到内圆直径为 130.6915 (pixel)。

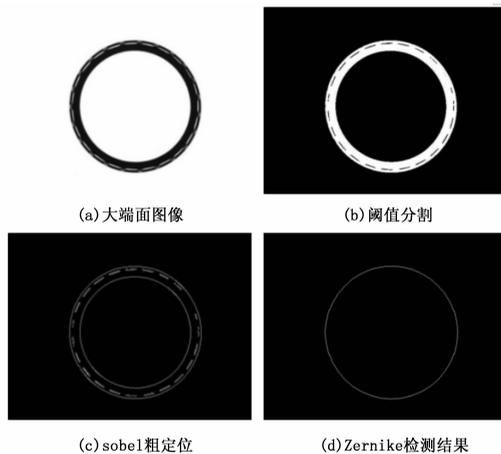


图 3 大端面直径测量结果

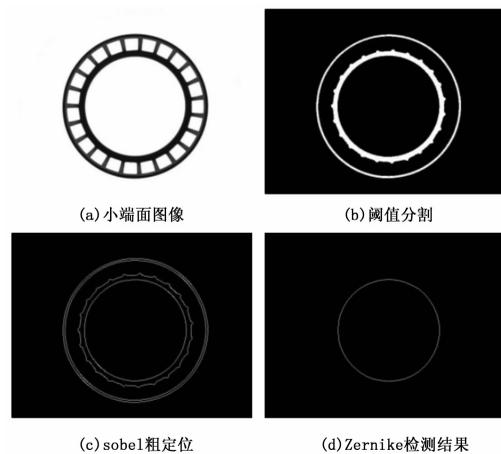


图 4 小端面直径测量结果

实验最后对一标准件在相同条件下进行实验测量, 通过换算可得到最终保持架直径测量结果。

#### 3.4 对比分析

对保持架进行多次等精度手动测量, 计算测量平均值  $\bar{x}$

和误差  $\sigma$ 。对于每一个测量值都不可避免的存在许多偶然误差（读数误差、卡尺本身误差等）的影响，其中每一个因素都引起基本误差项，而总的测量误差则由这一系列个别因素引起的基本误差项之和组成，且每一个基本误差项对总的测量误差的影响都是均匀的小，因此其总的测量误差近似服从正态分布。手动得到保持架大小端测量结果分别为  $\bar{x}_1 = 43.47 \text{ mm}$ ,  $\sigma_1 = 0.056 \text{ mm}$ ;  $\bar{x}_2 = 57.54 \text{ mm}$ ,  $\sigma_2 = 0.071 \text{ mm}$ ，因此将保持架大小端的平均值  $\bar{x}$  作为观测值，测量误差范围分别为  $43.47 \pm 0.056 \text{ mm}$ ,  $57.54 \pm 0.071 \text{ mm}$ 。实验通过将保持架手动测量和实验所得测量结果两者对比来证实本文算法的有效性和可行性。

图 5 和图 6 为对保持架应用本文算法检测后，计算得到绝对误差值。表 1 显示了为对检测结果进一步的分析计算，其中相对误差值由以下公式得到：

$$\text{相对误差 } \delta = \frac{|\text{测量值} - \text{观测值}|}{\text{观测值}} \times 100\% \quad (18)$$

其中，平均相对误差由各相对误差取平均值得到，视觉测量的两端面平均相对误差为 0.033 和 0.029，人工测量的两端面平均相对误差为 0.109 和 0.102，且视觉测量中小端面和大端面的绝对误差范围分别为  $[-0.023, 0.025]$  和  $[-0.020, 0.031]$ ，而人工测量小端面和大端面的绝对误差范围为  $[-0.047, 0.042]$  和  $[-0.051, 0.055]$ ，再比较两种测量方法的保持架直径平均值，视觉测量中小端面和大端面的直径平均值为 43.45 和 57.53，人工测量中小端面和大端面的直径平均值为 43.47 和 57.54。上述的比较可得，在相对误差和绝对误差上，视觉测量比人工测量所得到的结果更小，这表明视觉测量结果更接近观测值；另外，图 5、图 6 的结果显示，对保持架的视觉检测，绝对误差值变化较平稳，不存在跃变现象，视觉检测结果满足手动测量得到的  $(-\sigma, +\sigma)$  误差范围，说明视觉测量结果有效，满足检测精度要求。

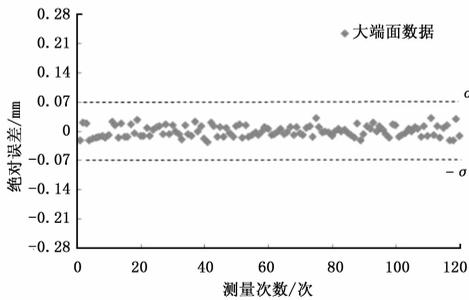


图 5 大端绝对误差计算结果

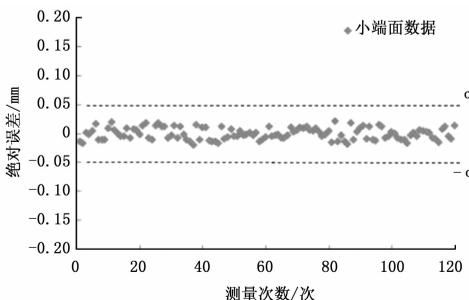


图 6 小端绝对误差计算结果

表 1 视觉测量与人工测量结果对比

结果对比	视觉平均相对误差 $\delta_1/\%$	视觉绝对误差范围 $\Delta_1/\text{mm}$	人工平均相对误差 $\delta_2/\%$	人工绝对误差范围 $\Delta_2/\text{mm}$	视觉测量平均值 $\bar{x}_1/\text{mm}$	人工测量平均值 $\bar{x}_2/\text{mm}$
小端面	0.033	-0.023~0.025	0.109	-0.047~0.042	43.45	43.47
大端面	0.029	-0.020~0.031	0.102	-0.051~0.055	57.53	57.54

实验表明，本文算法的稳定性较好，将视觉测量结果和人工测量结果作比较后，可知基于 Zernike 的亚像素边缘测量结果和人工测量结果接近，在误差方面，视觉测量比人工测量得到的误差更小，证明本文提出的算法可行，有现实意义。

### 4 结论

本文将 Zernike 亚像素边缘检测方法应用到保持架直径测量中，在 Sobel-Zernike 矩算法基础上，对 sobel 算子边界点阈值进行重新设定，在获得初步定位的边缘点集后，增加有效圆检测，剔除部分偏离有效圆的点，再利用 Zernike 矩亚像素检测方法进行边缘点判定并计算精确坐标，最后将这些坐标点进行最小二乘法拟合，计算出直径尺寸。实验证明，本算法确切可行，视觉测量数据和人工数据对比后，能够达到人工检测的精度要求，且在一定程度上避免了人工误检的可能性，直径圆的拟合也为后续检测保持架侧边窗孔的均匀分布情况提供一定帮助。

### 参考文献：

- [1] 李江响, 王宇浩, 童朝南. 一种 Zernike 矩的高精度板材尺寸测量方法 [J]. 电子学报, 2015, 43 (7): 1432-1436.
- [2] 伍济钢, 宾鸿赞. 薄片零件机器视觉图像亚像素边缘检测 [J]. 中国机械工程, 2009, 20 (3): 297-300.
- [3] 陶 李, 王 珏, 邹永宁, 等. 改进的 Zernike 矩工业 CT 图像边缘检测 [J]. 中国光学, 2012, 5 (1): 48-56.
- [4] Zhao B Y, Qi Y J. Improved algorithm for sub-pixel edge detection based on Zernike moments [J]. Advanced Materials Research, 2011, 341-342: 763-767.
- [5] EPLYvers, ORMitchell, MLaKey, APReeves. Sub-pixel measurements using a moment-based edge operator [J]. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11 (12): 1293-1309.
- [6] Ghosal S, Mehrotra R. Detection of composite edges [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1994, 3 (1): 14-25.
- [7] 高世一, 赵明扬, 张 雷, 等. 基于 Zernike 正交矩的图像亚像素边缘检测算法改进 [J]. 自动化学报, 2008, 34 (9): 1163-1168.
- [8] 李金泉, 王建伟, 陈善本, 等. 一种改进的 Zernike 正交矩亚像素边缘检测算法 [J]. 光学技术, 2003, 29 (4): 500-503.
- [9] 曲迎东, 崔成松, 陈善本, 等. 利用 Sobel-Zernike 矩算子的快速亚像素边缘检测方法 [J]. 光电工程, 2003, 30 (5): 59-61.
- [10] 曲迎东, 崔成松, 陈善本, 等. Sobel-Zernike 矩亚像素边缘算子的影响因素分析 [J]. 光电工程, 2005, 32 (7): 71-73.
- [11] Teague M R. Image analysis via the general theory of moments [J]. Opt. Soc. Am, 1980, 69 (8): 920-930.
- [12] 沈德海, 侯 建, 鄂 旭. 基于改进的 Sobel 算子边缘检测算法 [J]. 计算机技术与发展, 2013, (11): 22-25.