

基于运动学方法的小卫星串行编队模型误差研究

赵征宇¹, 蔡远文², 刘高强¹, 姚静波², 王刚¹

(1. 装备学院 研究生管理大队, 北京 101416; 2. 装备学院 航天装备系, 北京 101416)

摘要: 针对小卫星串行编队构型设计, 采用运动学方法建立串行编队相对运动数学模型。考虑偏心率等于零与不等于零时的两种情形, 分别对所构建的运动学模型进行分析; 采用 MATLAB 对相对运动学模型中包含的参考卫星半长轴与初始平近点角差进行仿真, 将运动学模型计算结果与精确模型计算结果进行对比分析, 得出初始平近点角差对编队模型误差的影响相对更大, 为后续小卫星编队综合构型设计奠定基础。

关键词: 小卫星; 串行编队; 运动学方法; 距离误差; 误差比值

Research on Model Error of Small Satellite Serial Formation Based on Kinematic Method

Zhao Zhengyu¹, Cai Yuanwen², Liu Gaoqiang¹, Yao Jingbo², Wang Gang¹

(1. Department of Graduate Management, Equipment Academy, Beijing 101416, China;

2. Department of Space Equipment, Equipment Academy, Beijing 101416, China)

Abstract: In aiming to design the configuration of small satellite serial formation, the relative motion model is built based on kinematic method. Considering the two cases that eccentricity is equal to zero and not, two kinematic models were analysed respectively. The semimajor axis and initial mean anomaly difference of reference satellite in relative motion model are simulated based on Matlab software, and the calculation results of kinematic model and accurate model are compared. The result show that the initial mean anomaly difference has larger influence on the model error of the formation, which is useful for the subsequent comprehensive configuration design of small satellite formation.

Keywords: small satellite; serial formation; kinematic method; range error; error ratio

0 引言

现代小卫星技术不断创新发展, 不但有效弥补了传统大卫星的不足, 还在卫星应用方面推陈出新, 使得星座与编队的发展前景不断开阔^[1]。卫星编队技术在国外发展的相对较早, 已经进入探索应用阶段, 例如“重力和气候实验卫星”(GRACE-1/2), 目的在于获取高精度和高空间分辨率的静态以及时变重力场, 于2002年3月17日发射升空。国内大都还处在理论研究阶段, 也进行了相关技术的探索试验。

基础编队构型是编队构型中形式简单, 容易理解与实现的构型, 充分了解掌握基础构型, 有利于进行复杂的编队构型设计。其中, 串行编队基础构型是编队基础构型中最简单的基础构型。下面应用运动学方法对其进行建模分析, 与精确模型进行比较, 确定轨道根数对模型误差的影响^[2]。

1 运动学方法建模

运动学方法是基于空间几何关系利用参考卫星与伴随卫星的轨道根数差或相对轨道根数在参考卫星坐标系中描述相对运动的方法^[3]。采用轨道根数作为描述参数分析相对运动, 能够在一定程度上克服相对运动的线性化动力学方程对问题背景的

约束, 可以在更广泛的条件下分析相对运动。此外, 采用轨道根数描述相对运动便于编队构型的设计与控制。

本节基于相对运动运动学方法的优势, 应用运动学方法进行小卫星编队的相对运动建模。针对卫星各参数, 以下标表示参考卫星, 以下标表示伴随卫星。将两卫星的轨道根数差分别记为 Δa 、 Δe 、 Δi 、 $\Delta \Omega$ 、 $\Delta \omega$ 、 ΔM 。所有的角度度量以逆时针方向为正^[4]。

分别将地心赤道惯性坐标系、参考卫星轨道坐标系与伴随卫星轨道坐标系记为坐标系 E 、 C 、 B 。由此, 从地心赤道惯性坐标系到参考卫星轨道坐标系和伴随卫星轨道坐标系的转移矩阵^[5]分别为:

$$M_{CE} = M_3(u_c)M_1(i_c)M_3(\Omega_c) \quad (1)$$

$$M_{BE} = M_3(u_b)M_1(i_b)M_3(\Omega_b) \quad (2)$$

式中, $M_j(\theta)$ 表示绕瞬时坐标轴 j ($j=1, 2, 3$) 旋转角度的初等转移矩阵:

$$M_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$M_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

在参考卫星轨道坐标系中建立相对运动方程, 如公式(5):

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = M_{CE}M_{BE}^T g \begin{bmatrix} R_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

收稿日期:2016-01-06; 修回日期:2016-01-27。

作者简介: 赵征宇(1990-), 男, 浙江金华人, 硕士研究生, 主要从事卫星编队技术方向的研究。

蔡远文(1967-), 男, 四川彭州人, 教授, 博士生导师, 主要从事飞行器测试发射控制技术、计算机仿真技术方向的研究。

在 10^{-4} 以上, 可以进行简化处理。表 2 是运动学模型 x 轴向距离误差随初始平近点角差变化情况表。

表 2 运动学模型 x 轴向距离的误差变化表

x 轴向距离误差 $\Delta x/\text{km}$	误差比值 $=\Delta x/r_1$
$7.142857143 \times 10^{-5}$	$7.142857143 \times 10^{-5}$
$2.857142857 \times 10^{-4}$	$1.428571429 \times 10^{-5}$
$1.142857143 \times 10^{-3}$	$2.857142858 \times 10^{-4}$
$4.571428571 \times 10^{-3}$	$5.714285714 \times 10^{-4}$
0.01828571429	$1.142857143 \times 10^{-3}$
0.07314285714	$2.285714286 \times 10^{-3}$
0.2925714286	$4.571428572 \times 10^{-3}$
1.170285714	$9.142857141 \times 10^{-3}$
4.681142857	$1.828571429 \times 10^{-2}$
18.72457143	$3.657142857 \times 10^{-2}$
74.89828571	$7.314285714 \times 10^{-2}$

由表 2 可知, 随着初始平近点角差的增加, 运动学模型计算所得的 x 轴向距离与精确 x 轴向距离之间的误差也在增加, 距离误差相对于精确相对距离的比值也在变大。初始平近点角差小于 1.047708851° 时, 模型 x 轴向距离误差相对于精确相对距离比值保持在 10^{-3} 以上; 初始平近点角差在 2.095505297° 与 8.389045462° 之间时, 模型 x 轴向距离误差相对于精确距离的比值保持在 10^{-2} 量级上。表 3 是运动学模型 y 轴向距离误差随初始平近点角差变化情况表。

表 3 运动学模型 y 轴向距离的误差变化表

y 轴向距离误差 $\Delta y/\text{km}$	误差比值 $=\Delta y/r$
3.6×10^{-9}	3.6×10^{-9}
2.7×10^{-8}	1.35×10^{-8}
2.17×10^{-7}	5.425×10^{-8}
1.741×10^{-6}	2.17625×10^{-7}
1.393×10^{-5}	8.70625×10^{-7}
0.00011145	3.4828125×10^{-6}
0.00089166	$1.39321875 \times 10^{-5}$
0.0071334	$5.57296875 \times 10^{-5}$
0.0570711	$2.229339844 \times 10^{-4}$
0.4567062	$8.920042969 \times 10^{-4}$
3.651062	$3.565490234 \times 10^{-3}$

由表 3 可知, 随着初始平近点角差的增加, 运动学模型计算所得的 y 轴向距离与精确 y 轴向距离之间的误差也在增加, 距离误差相对于精确相对距离的比值也在变大; 同时可以得出模型误差相对于半长轴为小量可以忽略不计, 相对于相对距离来说也是小量, 量级保持在 10^{-3} , 可以进行简化处理。

综合对比分析可知:

- 1) 在同一条件下, 运动学模型计算所得的相对距离误差在数值与比值都是最小的, y 轴向次之, x 轴向最大, 由此可以看出在运动学模型公式推导过程中 x 轴向简化的相对较多, 导致模型在 x 轴向模型误差相较于相对距离与 y 轴向都大。
- 2) 基于串行编队构形特点, 三轴向距离在相对距离中所占的比重不同, 其中 y 轴向距离数值最大, 所占比重最大, 对于相对距离的影响最大, 所以相对距离的误差与 y 轴向的误差最接近。
- 3) 在初始平近点角差逐渐增大的前提下, 保持半长轴不

变, 运动学模型计算所得的相对距离、 x 轴向距离与 y 轴向距离的误差都在增加, 运动学模型在相对距离与 y 轴向距离误差更小, 在 x 轴向距离误差相对于前两者较大; 相对于半长轴来说, 模型误差都可以忽略, 但相对于相对距离来说, x 轴向需要进行适当考虑, 以减少模型误差。

上面对初始平近点角差进行了分析, 下面对半长轴进行计算分析。保持初始平近点角差不变, 改变半长轴, 观测模型相对距离、 x 轴向与 y 轴向的距离误差变化情况。保持初始平近点角差, 则模型的相对距离、 x 轴向距离与 y 轴向距离误差随半长轴变化情况如表 4~表 6 所示。

表 4 运动学模型相对距离的误差变化表

半长轴 a/km	相对距离误差 $\Delta r/\text{km}$	误差比值 $=\Delta r/r_1$
6700	4.16×10^{-7}	5.43284×10^{-8}
6800	1.691×10^{-6}	5.43015×10^{-8}
6900	1.716×10^{-6}	5.44022×10^{-8}
7000	1.74×10^{-6}	5.425×10^{-8}
7100	1.766×10^{-6}	5.43486×10^{-8}
7200	1.79×10^{-6}	5.43229×10^{-8}
7300	1.816×10^{-6}	5.44178×10^{-8}
7400	1.84×10^{-6}	5.42736×10^{-8}

表 5 运动学模型 x 轴向距离的误差变化表

x 轴向距离误差 $\Delta x/\text{km}$	误差比值 $=\Delta x/r_1$
$4.375510205 \times 10^{-3}$	$5.714285715 \times 10^{-4}$
$4.440816327 \times 10^{-3}$	$5.714285714 \times 10^{-4}$
$4.506122449 \times 10^{-3}$	$5.714285714 \times 10^{-4}$
$4.571428572 \times 10^{-3}$	$5.714285714 \times 10^{-4}$
$4.636734695 \times 10^{-3}$	$5.714285715 \times 10^{-4}$
$4.702040817 \times 10^{-3}$	$5.714285715 \times 10^{-4}$
$4.767346939 \times 10^{-3}$	$5.714285714 \times 10^{-4}$
$4.832653062 \times 10^{-3}$	$5.714285715 \times 10^{-4}$

表 6 运动学模型 y 轴向距离的误差变化表

y 轴向距离误差 $\Delta y/\text{km}$	误差比值 $=\Delta y/r_1$
4.16×10^{-7}	5.43284×10^{-8}
1.691×10^{-6}	2.17592×10^{-7}
1.716×10^{-6}	2.17609×10^{-7}
1.74×10^{-6}	2.175×10^{-7}
1.766×10^{-6}	2.17641×10^{-7}
1.79×10^{-6}	2.17535×10^{-7}
1.816×10^{-6}	2.17671×10^{-7}
1.84×10^{-6}	2.17568×10^{-7}

由表中数据可知, 当初始平近点角差保持不变, 半长轴逐步增加时, 运动学模型计算所得相对距离、 x 轴向距离与 y 轴向距离误差逐渐增加, 但其相对于精确相对距离之间的比值基本保持稳定, 在相同量级上存在微小差别。

综上分析可知, 半长轴的变化对运动学模型计算所得的相对距离与各轴向距离的误差影响基本保持不变; 相对于初始平近点角差变化对模型距离误差的影响小。所以, 在进行串行编队构形设计时, 需要充分考虑初始平近点角差, 以减少模型误差对于编队构形的设计中带来的误差。

2.2 偏心率不为零时的串行编队构形

当参考星轨道偏心率为一阶小量并略去二阶及以上小量

时, 有:

$$E \approx M + e \sin M \quad (21)$$

$$f \approx M + 2e \sin M \quad (22)$$

则相对运动运动学方法所建立的串行编队基础构形模型如下:

$$\begin{cases} x = -a_c e_c \sqrt{(\cos \Delta M - 1)^2 + \sin^2 \Delta M} \cos(M_c + \theta) \\ y = 2a_c e_c \sqrt{(\cos \Delta M - 1)^2 + \sin^2 \Delta M} \sin(M_c + \theta) \\ z = 0 \end{cases} \quad (23)$$

其中:

$$\cos \theta = \frac{\cos \Delta M - 1}{\sqrt{(\cos \Delta M - 1)^2 + \sin^2 \Delta M}} \quad (24)$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \Delta M}{\sqrt{(\cos \Delta M - 1)^2 + \sin^2 \Delta M}} \quad (25)$$

取半长轴为 7 000 km, 偏心率为 0.001, 使初始平近点角差从 0.008185111366° 变化到 8.389045462° , 应用 MATLAB 进行仿真, 来分析 x 轴向、 y 轴向、 z 轴向与相对距离的误差变化情况。

首先, 对 x 轴向距离误差进行仿真。 x 轴向距离误差数值变化情况如图 2 所示, 图中 a、b、c、d 分别表示选择 $\Delta M = 0.008185111366^\circ$ 、 0.06548089444° 、 0.5238489515° 、 8.389045462° 时, x 轴向距离误差的变化情况。

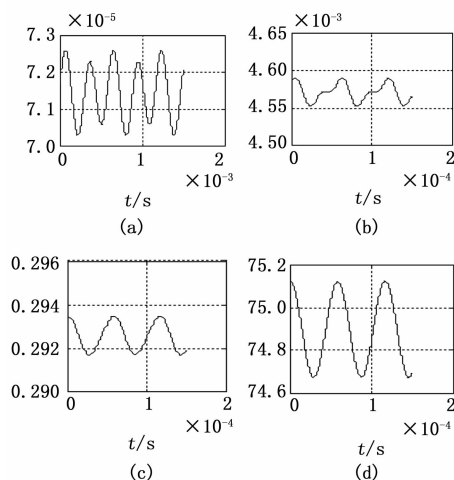


图 2 x 轴向距离误差随时间 t 变化

由图 2 可知, x 轴向距离误差随着初始平近点角差的增加逐渐增加, 量级从 10^{-5} 增加到 10^{-1} 。而其距离误差相对于精确模型中的相对距离的比值如图 3 所示。

由图 3 可知, x 轴向距离误差与精确相对距离的比值随着初始平近点角差的增加而增加, 比值的量级没有数值的量级变化那么大, 比值量级从 10^{-5} 变化到 10^{-2} 。

其次, 对 y 轴向进行仿真, y 轴向距离误差变化情况如图 4 所示。

由图 4 可知, y 轴向距离误差随着初始平近点角差的增加逐渐增加, 量级从 10^{-3} 增加到 10^0 。相较于 x 轴向距离误差来说, 变化幅度没有 x 轴向大。而其距离误差相对于精确模型中的相对距离的比值如图 5 所示。

由图 5 可知, y 轴向距离误差与精确相对距离的比值没有随着初始平近点角差的增加而增加, 比值的量级基本保持不

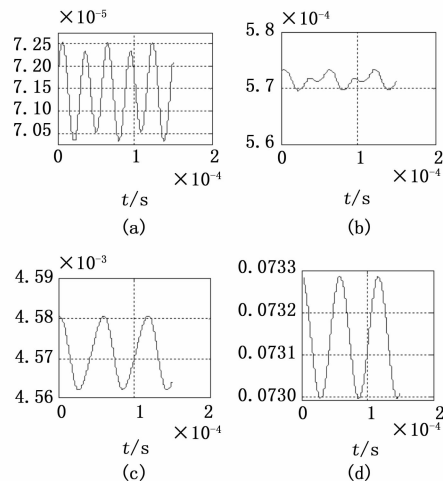


图 3 x 轴向距离误差与精确相对距离比值随时间 t 变化

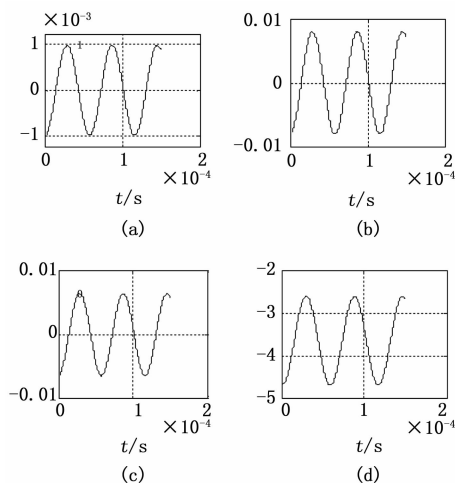


图 4 y 轴向距离误差随时间 t 变化

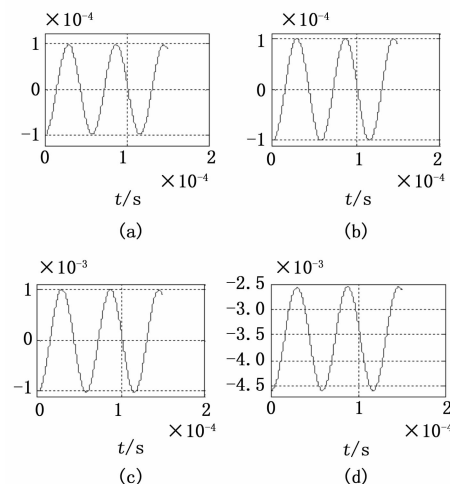


图 5 y 轴向距离误差与精确相对距离比值随时间 t 变化

变, 在 10 的负 3 次量级上。说明 y 轴向的距离误差相较于相对距离来说是一个小量。对比 x 轴向可知, y 轴向误差比值相对于 x 轴向误差比值变化小。

(下转第 293 页)

Engineering Chemistry Research, 2012, 51 (36): 11744–11752.

[13] Pai N S, Chang S C, Huang C T. Tuning PI/PID controllers for integrating processes with deadtime and inverse response by simple calculations [J]. Journal of Process Control, 2010, 20 (6): 726–733.

[14] Jeng J C, Lin S W. Robust proportional-integral-derivative controller design for stable/integrating processes with inverse response and time delay [J]. Industrial & Engineering Chemistry Research, 2012, 51 (6): 2652–2665.

(上接第 247 页)

由仿真可知, 运动学模型与精确模型的 z 轴向距离计算都为零, 不存在误差。

- 综合对比 3 个轴向可知:
- 1) x 轴向距离误差在数值与比值上的变化幅度最大;
 - 2) y 轴向距离误差在数值上有明显变化, 但其比值保持在同一量级上;
 - 3) 而 z 轴向没有距离, 不存在距离误差。
- 因此, 初始平近点角的差异对 x 轴向的影响最大。

最后, 对相对距离进行仿真, 相对距离误差数值变化情况如图 6 所示。

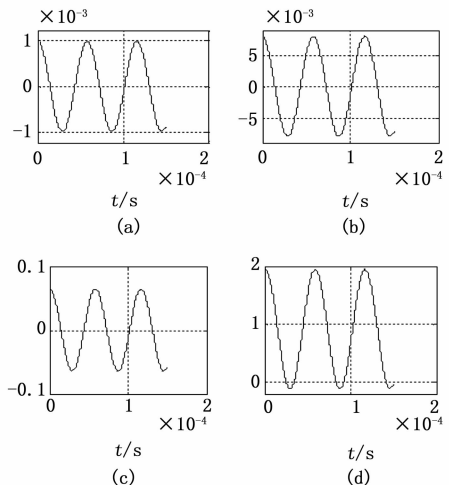


图 6 相对距离误差随时间 t 变化

由图 6 可知, 相对距离误差随着初始平近点角的增加逐渐增加, 量级从 10 的负 3 次增加到 10 的 0 次。而其距离误差相对于精确模型中的相对距离的比值如图 7 所示。

由图 7 可知, 在 (a) ~ (c) 之间, 相对距离误差与精确相对距离的比值没有随着初始平近点角差的增加而增加, 比值的量级基本保持不变, 在 10 的负 3 次量级上。而在 (d) 中, 比值有所增加, 但量级基本保持不变。说明相对距离误差相较于相对距离来说是一个小量。

综合对比 3 个轴向与相对距离误差的仿真分析图可以发现, 相对距离与 y 轴向的距离误差变化比较接近。分析运动学模型式也可以得出相同的结论, y 轴向距离数值远大于 x 轴向距离数值, 在计算相对距离时 y 轴向距离所占的比重远大于 x 轴向距离。由此可知, 相对距离误差随初始平近点角变化的趋势与 y 轴向变化基本一致。同时 x 轴向受初始平近点角差的影响较大, 误差变化幅度较大, 在进行构形设计时, 需要充分考

[15] Huang W, Chiu M S. Direct design of PID controllers for stable processes with inverse response [A]. SICE Annual Conference (SICE) [C], Sapporo, 2014: 165–170.

[16] Chen D, Seborg D E. PI/PID controller design based on direct synthesis and disturbance rejection [J]. Industrial & engineering chemistry research, 2002, 41 (19): 4807–4822.

[17] Rao A S, Rao V S R, Chidambaram M. Direct synthesis-based controller design for integrating processes with time delay [J]. Journal of the Franklin Institute, 2009, 346 (1): 38–56.

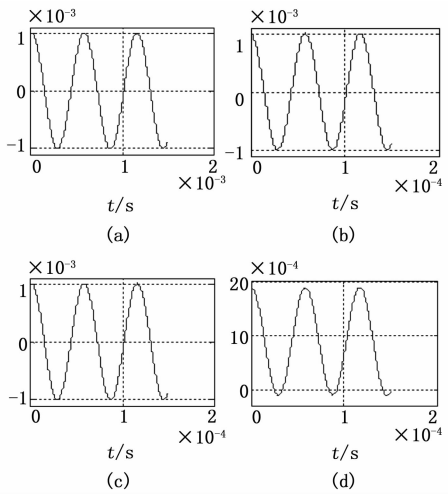


图 7 相对距离误差与精确相对距离比值随时间 t 变化

虑 x 轴向误差对构形功能的影响, 适当选取初始平近点角差, 以减少误差。

3 结论

在现代小卫星蓬勃发展的背景下, 编队应用模式的研究不断深入。运用运动学方法对串行基础编队构形进行建模仿真, 通过与精确模型的对比分析, 得出:

- 1) 在低轨串行编队中, 初始平近点角差不同造成的模型误差比半长轴不同造成的模型误差来的大。在编队设计时, 相较于半长轴, 需要更加注意初始平近点角的选择, 以减少模型误差;
- 2) 初始平近点角差在模型 3 个轴向中的影响不同, 对于 x 轴向的影响最大, y 轴向次之, z 轴向由于编队特性, 没有造成影响。在进行设计时, 更需要注意对 x 轴向误差的控制, 使之符合要求;
- 3) 由模型式与仿真分析图可知, y 轴向距离在 3 个轴向中所占的最大, 相对距离的变化情况与 y 轴向的变化情况更加接近。

参考文献:

[1] 闻 新, 马文弟, 周 露. 小卫星编队飞行的应用模式分析及展望 [J]. 中国航天, 2005 (8): 40–43.

[2] 肖玉婷, 朱立东. 一种卫星编队构形设计方法 [J]. 计算机仿真, 2013, 31 (2): 126–130.

[3] 冯永新, 武金花. 基于 STK 的小卫星编队飞行仿真 [J]. 火力与指挥控制, 2011, 36 (3): 67–70.

[4] 曹喜滨, 张锦绣, 王 峰, 等. 航天器编队动力学与控制 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2013.

[5] 孟云鹤. 航天器编队飞行导论 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2014.