

高效显式模型预测控制在两容水箱中的应用

杨 璞, 王宇红

(中国石油大学(华东)信息与控制工程学院, 山东 青岛 266580)

摘要: 针对一类具有分段仿射形式的混杂系统模型的控制方法问题, 提出了一种高效显式模型预测控制算法; 该算法通过将最优控制问题转化为多参数规划问题, 离线求得具有分段仿射形式的显式控制器; 在线过程, 应用一种新的搜索算法, 它能够快速准确地对系统状态点进行定位, 确定其所属的控制器分区, 再根据该分区所对应的子控制率, 进行简单的线性运算, 即可得到系统的输入; 该控制方法避免了反复的在线优化计算, 大大减少了计算量, 并且, 在线计算的速度更快, 控制的实时性更好; 将该算法应用到具有典型混杂特性的两容水箱系统中, 仿真结果表明: 水箱的液位从初始液位能够快速平稳的达到期望的液位, 且与其它的控制算法相比较, 该算法更加高效。

关键词: 分段仿射模型; 显式模型预测控制; 在线计算; 两容水箱

Application of Efficient Explicit Model Predictive Control in Two Tank System

Yang Pu, Wang Yuhong

(College of Information and Control Engineering, China University of Petroleum (East China), Qingdao 266580, China)

Abstract: An efficient explicit model predictive control algorithm is proposed for a class of hybrid systems based on piecewise affine (PWA) model. The algorithm solves the optimization problem off line by transforming it into an equivalent multi-parameter programming problem and therefore obtains an explicit controller with piecewise affine form. For on-line process, a new search method is used to determine the position of the system state in the partitions of the controller and gets the optimal input according to the control law corresponding to the partition via evaluating a simple linear function. The algorithm greatly reduces the computation complexity. Moreover, it leads to higher computation speed and better real-time performance. Finally, an application case study on two tank system is given to illustrate this method and the simulation results show that it is more efficient comparing with other algorithms.

Keywords: PWA model; explicit model predictive control; online computation; two tank system

0 引言

混杂系统是指包含连续动态和离散动态两种特性, 并且两种动态相互作用的一类系统, 对该类系统的研究被 IEEE 控制协会称为是具有广泛应用前景的研究。分段仿射 (PWA) 模型是一类重要的混杂系统模型, 它不仅能够很好的反应系统的混杂特性, 而且等价于多类混杂模型, 如混合逻辑动态模型 (MLD), 线性互补模型 (LC), 极大极小模型 (MMPS) 等^[1]。

针对 PWA 模型的控制方法的研究也是研究的热点。文献 [2] 中, 提出采用模型预测控制的方法, 但是该方法需要不断在线求解优化问题, 导致计算量过大, 消耗了大量时间。文献 [3-4] 中, 提出采用显式模型预测控制的方法, 可以有效解决这一问题, 它通过离线求解优化问题, 得到系统状态与输入的显式关系, 即显式控制器, 那么在线计算只需要先确定系统当前状态在控制器分区的位置, 再进行简单的线性运算即可。

显式模型预测控制中, 在线计算过程需要不断的对控制器的分区进行搜索, 以确定系统当前状态属于哪个分区, 如果采用合适合理的搜索算法, 则可以大大节省在线计算时间。文献 [5] 中, 通过对控制器分区进行可达性分析, 缩小了搜索范

围, 节省了搜索时间; 文献 [6-9] 中, 通过将分段仿射形式控制率表示为“树”型结构, 可以快速的完成在线计算; 文献 [10-12] 中, 通过对控制器分区进行简化, 提高了搜索效率。但是这些算法大都需要复杂的数据预处理过程, 本文提出了一种距离比较查找法, 它不仅对控制器分区数据的预处理过程十分简单, 而且可以大大提升在线计算速度。

本文首先介绍了 PWA 模型, 然后对基于 PWA 模型的显式模型预测控制的离线计算和在线计算过程进行了详细的研究, 最后, 将该控制方法应用到具有典型混杂特性的水箱系统中。

1 PWA 模型

PWA 模型是一类典型的混杂系统模型, 它包含有限个连续变量动态子模型, 随着系统状态的不断演化, 系统根据切换律在不同模式之间进行切换, 其表达式为:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f_{PWA}(x(k), u(k)) = A_i x(k) + B_i u(k) + f_i \\ y(k) &= C_i x(k) + D_i u(k) + g_i \end{aligned}$$

$$\text{满足 } \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \in \Omega_i \quad i = 1, \dots, s$$

其中: $k \geq 0$, $x \in R^n$ 是系统状态, $u \in R^m$, $y \in R^p$ 分别是系统的输入和输出, $\{\Omega_i\}_{i=1}^s \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}; H_{ix} x + H_{iu} u \leq K_i \right\}$, $i = 1, \dots, s$ 是系统在状态与输入空间 R^{n+m} 划分的多面体集。

2 基于 PWA 模型的显式模型预测控制

针对 PWA 模型的显式模型预测控制算法分为离线计算和在线计算两个部分, 其基本思想是将模型预测控制算法与多参数规划理论相结合, 通过离线求取显式控制器, 在线计算时, 只需根据求得的控制器, 对状态点进行定位和简单的线性运算即可。

收稿日期: 2015-09-24; 修回日期: 2015-11-02。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61403420); 山东省自然科学基金资助项目 (2013ZRE28089)。

作者简介: 杨 璞 (1989-), 男, 河北涿州人, 硕士研究生, 主要从事先进控制理论与技术的研究。

王宇红 (1970-), 男, 河北新乐人, 教授, 硕士研究生导师, 主要从事预测控制、化工自动化的研究。

2.1 离线计算

考虑如下有限时域最优控制 (CFTOC) 问题:

$$J_N^*(x(0)) = \min_{U_0^{N-1}} J(U_0^{N-1}, x(0)) = \min_{U_0^{N-1}} \{ \|Q_N(x(N) - x_r)\|_\infty + \sum_{k=0}^{N-1} \|R(u(k) - u_r)\|_\infty + \|Q(x(k) - x_r)\|_\infty \}$$

$$\text{subj. to } \begin{cases} x(k+1) = f_{PWA}(x(k), u(k)) \\ x(N) \in T_{set} \end{cases} \quad (1)$$

其中: $U_0^{N-1} \triangleq [u(0)^T, \dots, u(N-1)^T]^T \in R^{mN}$ 是最优输入序列, 即决策向量, N 是预测时域, $T_{set} \in R^n$ 是终端约束集, Q_N, Q, R 是权值矩阵, 它们都是满秩矩阵。本文采用一种将动态规划理论与多参数线性规划理论相结合的方法求解该问题。

根据贝尔曼最优优化原理, 问题 (1) 可以等价的表示为一个动态规划问题^[4,15]:

$$J_j^*(x(j)) = \min_{u(j)} \{ \|R(u(j) - u_r)\|_\infty + \|Q(x(j) - x_r)\|_\infty + J_{j+1}^*(x(j+1)) \}$$

$$\text{subj. to } \begin{cases} x(j+1) = f_{PWA}(x(j), u(j)) \\ x(j+1) \in T_{j+1} \\ j = 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2)$$

其中: $T_N = T_{set}, J_N^*(x(N)) = \|Q_N(x(N) - x_r)\|_\infty$; $T_j = \{x \in R^n \mid \exists u, f_{PWA}(x, u) \in T_{j+1}\}$ 是使问题 (2) 可行的所有状态的集合。采用逆序解法求解该动态规划问题, 对于每一次迭代过程, 如果把 $x(j)$ 看作参数变量, $u(j)$ 看作决策变量, 那么, 它们都可以转化为如下形式的多参数线性规划问题:

$$J^*(x) = \min_r \{ J(r, x) = f^T r \}$$

$$\text{subj. to } C^r \leq C^x x + C$$

其中: $x \in R^{n_x}$ 是参数向量, $r \in R^{n_r}$ 是决策向量, 并且 $C^x \in R^{n_c \times n_x}, C^r \in R^{n_c \times n_r}, C^c \in R^{n_c}, f \in R^{n_r}$ 。

根据文献 [4], 通过对上述多参数线性规划问题求解, 可以得到分段仿射形式的显式控制率:

$$u^*(k) = F_i^k x(k) + G_i^k, x(k) \in R_i^k, i = 1, \dots, N^k$$

其中: $R_i^k, i = 1, \dots, N^k$ 是可行状态集 $x(k)$ 在时间步长 $k = 0, \dots, N-1$ 上的多面体分区。根据滚动时域的思想, 只保留 $k = 0$ 时的显式控制率, 即可得到显式控制器。

2.2 在线计算

在线计算时, 只需要先确定当前时刻系统状态在控制器分区的位置, 再根据与该分区对应的子控制率, 进行简单的线性运算, 即可得到当前时刻的输入。不难看出, 在线计算的关键是是否能够快速准确的确定系统状态在控制器分区的位置, 这实质上是一个“点定位”问题。

解决“点定位”问题最直接的方法是采用顺序查找法, 即从控制器中编号为 1 的分区开始查找, 根据分区表达式, 确定当前系统状态是否属于该分区, 直到找到该状态点所属的分区或判断完最后一个分区为止。顺序查找法的具体过程如算法 1 所示, 这里假设显式控制器有 N 个状态分区, 第 $i(i \leq N)$ 个状态分区表达式为 $R_i = \{x \mid H_i x \leq K_i\}, H_i, K_i$ 分别为 $n_{R_i} \times n_x, n_{R_i} \times 1$ 维的矩阵, 其中 n_{R_i} 表示组成该分区的超平面个数。

算法 1:

- 1) 检测当前时刻系统状态 $x(k)$ 。
- 2) 依次查找第 $i(i = 1, \dots, N)$ 个分区, 若满足 $H_i x \leq K_i$, 则 $x(k) \in R_i$, 否则, 继续查找。
- 3) 若查找结果为 $x(k) \in R_i$, 则根据该分区所对应的子控制率 $u^*(k) = F_i x(k) + G_i$, 即可计算出系统的输入。否则,

该状态不在控制器分区内。

顺序查找法最坏的情况需要对每一个分区进行查找, 对于控制器存在大量分区的情形, 是十分不利的。本文根据 2.1 节求得的显式控制器分区是由若干个凸多面体组成, 并且它们互不相交的特点, 提出了一种距离比较查找法, 可以更高效的解决“点定位”问题。

如图 1 表示一个二维的凸多面体, 如果一个圆心为 c , 半径为 r 的圆包含于该多面体内, 并且, 在多面体的所有点中, 距离 c 最远的点与 c 的距离为 d , 那么, 只要与 c 的距离小于 r 的点, 一定属于该多面体, 只要与 c 的距离大于 d 的点, 一定不属于该多面体。

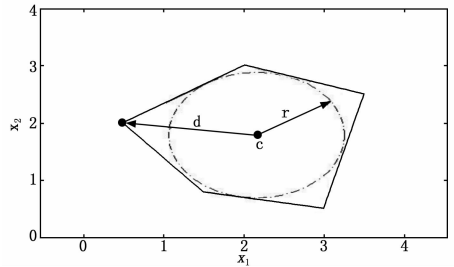


图 1 二维凸多面体

根据上述思想, 运用距离比较查找法时, 首先需要在 n 维控制器的每个状态分区中, 寻找一个包含于该分区的最大的球体。这里仍然用 $R_i = \{x \mid H_i x \leq K_i\}$ 表示控制器的第 $i(i \leq N)$ 个多面体分区, 在该分区中, 假设需要寻找的球体的圆心为 x_{c_i} , 半径为 r_i , 考虑下式中的优化问题:

$$\max_{x_{c_i}, r_i} r_i$$

$$\text{subj. to } H_i^j x_{c_i} + r_i \|H_i^j\|_2 \leq K_i^j, j = 1, \dots, n_{R_i} \quad (3)$$

式 (3) 中, H_i^j, K_i^j 分别代表矩阵 H_i, K_i 的第 j 行, 这是一个线性规划问题, 通过求解该问题, 得到 x_{c_i} 和 r_i , 即可得到需要寻找的球体, 用 $B(x_{c_i}, r_i)$ 表示。

经过上述运算过程, 总共可以得到 N 个球体, 它们的球心和半径依次为 x_{c_i} 和 $r_i(i = 1, \dots, N)$, 然后, 需要继续在控制器的每个分区中, 寻找距离该分区球心最远的点 $d_i(i = 1, \dots, N)$, 不难发现, 该点只有可能在多面体的顶点取得, 如果将

$$R_i \text{ 用顶点组合的形式表示 } R_i = \{x \in R^n \mid x = \sum_{j=1}^{v_{R_i}} \alpha_j V_{R_i}^{(j)}, 0 \leq \alpha_j \leq 1, \sum_{j=1}^{v_{R_i}} \alpha_j = 1\}, \text{ 其中, } V_{R_i}^{(j)} \text{ 代表 } R_i \text{ 的第 } j \text{ 个顶点, } v_{R_i} \text{ 代表 } R_i \text{ 的顶点总数, 那么 } d_i = \max_{V_{R_i}^{(j)}} \|V_{R_i}^{(j)} - x_{c_i}\|_2, \forall i = j, \dots, v_{R_i}.$$

以上运算均可以离线完成, 那么在线查找时, 只需要依次求取系统当前时刻状态 $x(k)$ 与控制器第 i 个分区的球心之间的距离 c_i , 同时, 比较 c_i 与 r_i 的大小, 当 $c_i \leq r_i$ 时, 说明 $x(k) \in R_i$, 查找结束; 当 $c_i > r_i$ 时, 需要再比较 c_i 与 d_i 的大小, 当 $c_i > d_i$ 时, 说明 $x(k)$ 不在该分区中, 需要继续查找下一个分区, 当 $c_i \leq d_i$ 时, 则说明 $x(k)$ 可能在该分区中, 存储该分区。当查找完最后一个分区仍未找到 $x(k)$ 所属的分区时, 则在之前存储的分区中, 再采用顺序查找法查找。距离比较查找法的具体过程如算法 2 所示。

算法 2:

- 1) 离线求取 $B(x_{c_i}, r_i)$ 和 $d_i(i = 1, \dots, N)$ 。

2) 检测当前时刻系统状态 $x(k)$ 。

3) 当 $i = 1$ 时, 求取 $x(k)$ 与 x_{c_1} 之间的距离 c_1 。若 $c_1 \leq r_1$, 则 $x(k) \in R_1$, 跳转到步骤 5; 否则, 若 $d_1 < c_1$, 则 $x(k) \notin R_1$, 跳转到步骤 4, 若 $c_1 \leq d_1$, 则将该分区存储。

4) 若 $i < N$, 则 $i = i + 1$, 重复步骤 3; 否则, 在步骤 3 所存储的所有分区中, 采用顺序查找法进行查找。

5) 若查找结果为 $x(k) \in R_i$, 则根据该分区所对应的子控制率 $u^*(k) = F_i x(k) + G_i$, 即可计算出系统的输入。否则, 该状态不在控制器分区内。

对于显式模型预测控制在在线计算过程, 如果控制器的分区数为 N , 组成第 i 个分区的超平面的数量为 $n(i)$, 运用算法 2 解决“点定位”问题, 若只考虑在线查找过程, 一般情况下, 只需要在每个分区中进行 1 次范数运算, 2 次比较运算即可; 在最差的情况下, 需要进行 1 次范数运算, $2 + n(i)$ 次比较运算, 然而, 当控制器存在大量分区时, 发生这种情况的分区的比例是较小的。而运用算法 1 则需要在每个分区中进行 $n(i)$ 次矩阵运算, $n(i)$ 次比较运算, 特别的, 当控制器的维数较高时, $n(i) \geq 2$ 。

从这方面来说, 算法 2 能够减少在线计算量, 从而使控制更高效。

3 仿真实例

3.1 两容水箱的 PWA 模型

对水箱系统的研究, 已经作为一个研究的标准问题 (Benchmark Problem), 被广泛的应用于混杂系统研究成果的验证中。两容水箱是一类重要的水箱系统, 如图 2 所示, 在实际对象中, 各参数的意义和具体数值见表 1。

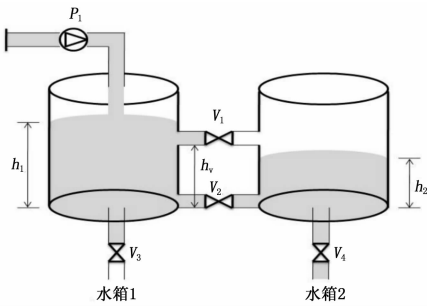


图 2 两容水箱

它由水箱 1 和水箱 2 两个水箱组成, 流经它们之间的液体通过 V_1 、 V_2 两个阀门进行控制, 流出水箱的液体可以通过 V_3 、 V_4 两个阀门进行控制, V_1 、 V_2 、 V_3 、 V_4 均为开关型阀门, 水箱 1 有连续输入泵 P_1 , 输入量记为 Q_{P1} ($0 \leq Q_{P1} \leq Q_{\max}$)。若将阀 V_3 常闭, 阀 V_4 常开, 则可得到系统的模型为:

表 1 两容水箱参数

参数	含义	数值
A	水箱的横截面积/ m^2	0.0154
a_z	阀的流量系数	1
S_1, S_2	阀的横截面积/ m^2	0.00002
h_v	阀 V_1 的高度/ m	0.3
h_{\max}	液位的最高值/ m	0.62
Q_{\max}	流量的最大值/ (m^3/s)	0.0001
T	采样周期/ s	5

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A} \cdot (Q_{P1} - Q_1 - Q_2)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A} \cdot (Q_1 + Q_2 - Q_4)$$

其中: 各流量表达式分别为:

$$Q_1 = V_1 \cdot a_z \cdot S_1 \cdot \text{sign}(\max\{h_1, h_v\} - \max\{h_2, h_v\}) \cdot \sqrt{2g(\max\{h_1, h_v\} - \max\{h_2, h_v\})}$$

$$Q_2 = V_2 \cdot a_z \cdot S_1 \cdot \text{sign}(h_1 - h_2) \cdot \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

$$Q_4 = a_z \cdot S_2 \cdot \sqrt{2gh_2}$$

若将 $\text{sign}(x) \cdot \sqrt{|x|}$ 用 $\frac{x}{\sqrt{x_{\max}}}$ 近似表示, 即 $\text{sign}(x) \cdot \sqrt{|x|} \approx \frac{x}{\sqrt{x_{\max}}}$, 则可以对系统模型进行简单线性化, 经过线性化后系统模型中各流量可表示为:

$$Q_1 = V_1 \cdot a_z \cdot S_1 \cdot (\max\{h_1, h_v\} - \max\{h_2, h_v\}) \cdot \sqrt{\frac{2g}{h_{\max} - h_v}}$$

$$Q_2 = V_2 \cdot a_z \cdot S_1 \cdot (h_1 - h_2) \cdot \sqrt{\frac{2g}{h_{\max}}}$$

$$Q_4 = a_z \cdot S_2 \cdot h_2 \cdot \sqrt{\frac{2g}{h_{\max}}}$$

再将该线性连续模型离散化, 令

$$\frac{dh_i}{dt} = \frac{h_i(k+1) - h_i(k)}{T}, (i = 1, 2)$$

得到:

$$h_1(k+1) = h_1(k) + \frac{T}{A} \cdot [Q_{P1}(k) - Q_1(k) - Q_2(k)]$$

$$h_2(k+1) = h_2(k) + \frac{T}{A} \cdot [Q_1(k) + Q_2(k) - Q_4(k)]$$

若选择 h_1, h_2 作为系统的状态变量 $x(k) \in [0, 0.62] \times [0, 0.62]$, Q_{P1}, V_1, V_2 作为系统的输入 $U(k)$, 并将参数值代入, 那么即可得到两容水箱的 PWA 模型, 它共有 16 子系统模型组成。

3.2 仿真结果与分析

本文的控制目标是使水箱从初始液位状态 $x(k) = [0 \ 0]$, 在系统输入 $U(k)$ 的作用下, 能够达到期望的液位状态 $x(k) = [0.1 \ 0.5]$ 。采用显式模型预测控制算法对系统进行控制, 通过离线计算得到的显式控制器如图 3 所示。

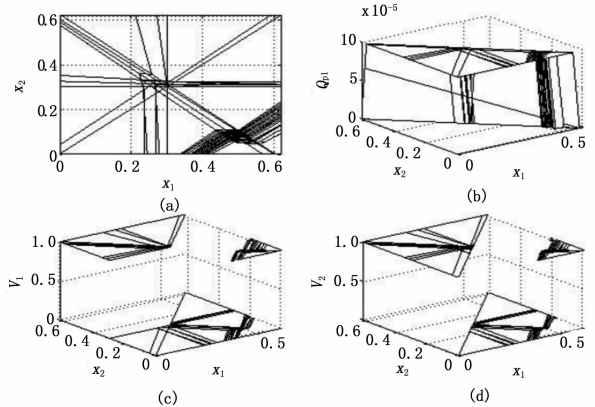


图 3 显式模型预测控制器

图中, (a) 表示控制器的分区, 它共有 29 个不同的子控制率分布在 371 个状态分区上, (b)、(c)、(d) 表示系统输入 Q_{P1}, V_1, V_2 分别在控制器分区上对应的线性连续控制率。根据得到的显式控制器, 在线计算分别采用算法 1、可达分区算

法^[5]、二叉树算法^[6]、算法 2 求取系统最优输入值,若选取 $K=60$ (表示 60 个采样时间), 4 种算法对比见表 2。

表 2 在线计算算法对比

算法	时间/ms		
	预处理时间	在线计算时间	平均每次在线计算时间
算法 1	0	821.014	13.684
可达分区算法	68 176.237	391.013	6.517
二叉树算法	189 249.526	63.031	1.051
算法 2	122.872	388.115	6.469

表 2 中, 可达分区算法、二叉树算法和算法 2 均需要对分区数据进行离线预处理, 算法 2 用时分别是其他两种算法的 0.18% 和 0.065%; 完成在线计算过程, 算法 2 用时比算法 1 用时减少了 430.001 ms, 与可达分区算法用时相当, 但是比二叉树算法用时长。需要指出的是二叉树算法虽然在线计算用时最短, 但是, 该算法预处理时间过长, 当控制器存在大量分区时, 可能使预处理过程变为 NP-hard 问题; 算法 1 虽然不需要预处理过程, 但是, 在线计算用时过长; 综合考虑, 这里选择算法 2 作为在线计算算法。得到系统的状态和输入随时间的演变过程曲线如图 4, 图 5 所示。

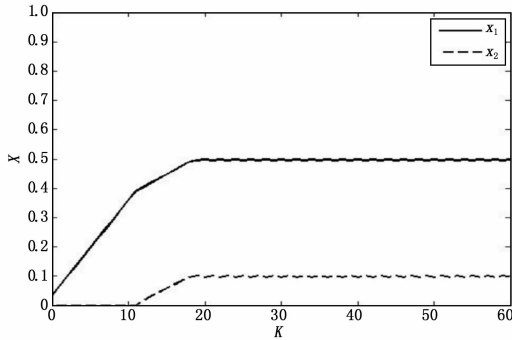


图 4 系统状态演变曲线

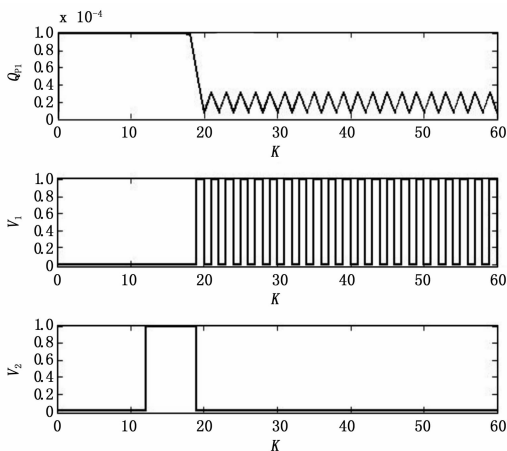


图 5 系统的控制输入演变曲线

图中, 水箱的液位在控制输入的作用下, 能够快速平稳的达到设定的液位, 并在该液位附近微小波动, 这是由于两容水箱在该稳态存在极限环所导致的。

4 结论

本文介绍了基于 PWA 模型的显式模型预测控制算法, 针

对该算法的在线计算过程, 提出了一种距离比较查找法, 并且应用到了对两容水箱控制的研究中。仿真结果表明, 水箱液位从初始液位, 能够快速平稳的达到期望的液位, 并且在线计算过程中, 采用距离比较查找法比其它 3 种算法能够更高效的得到系统输入值。

参考文献:

- [1] Heemels W P M H, Schutter B D, Bemporad A. Equivalence of hybrid dynamical models [J]. Automatica, 2001, 37 (7): 1085 - 1091.
- [2] Bemporad A, Morari M. Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints [J]. Automatica, 1998, 35 (98): 407 - 427.
- [3] Bemporad A, Morari M, Dua V, et al. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems [J]. Automatica, 2002, 38 (1): 3 - 20.
- [4] Baotic M, Christophersen F J, Morari M. A new algorithm for constrained finite time optimal control of hybrid systems with a linear performance index [A]. Proceedings of Europe Control Conference [C]. Cambridge, United Kingdom, 2003: 3335 - 3340.
- [5] Spjotvold J, Rakovic S V, Tondel P, et al. Utilizing Reachability Analysis in Point Location Problems [A]. Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control [C]. San Diego, USA, 2006: 4568 - 4569.
- [6] Tondel P, Johansen T A, Bemporad A. Evaluation of Piecewise Affine Control via Binary Search Tree [J]. Automatica, 2002, 39 (5): 945 - 950.
- [7] Christophersen F J, Kvasnica M, Jones C N, et al. Efficient evaluation of piecewise control laws defined over a large number of polyhedra [A]. Proceedings of the European Control Conference [C]. Kos, Greece, 2007: 2360 - 2367.
- [8] Mönnigmann M, Kastsian M. Fast explicit model predictive control with multiway trees [A]. Proceedings of 18th IFAC World Congress [C]. Milano, Italy, 2011: 1356 - 1361.
- [9] Bayat F, Johansen T A, Jalali A A. Flexible Piecewise Function Evaluation Methods Based on Truncated Binary Search Trees and Lattice Representation in Explicit MPC [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2012, 20 (3): 632 - 640.
- [10] Geyer T, Torrisi F D, Morari M. Optimal complexity reduction of polyhedral piecewise affine systems [J]. Automatica, 2008, 44 (7): 1728 - 1740.
- [11] Kvasnica M, Fikar M. Clipping-Based Complexity Reduction in Explicit MPC [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57 (7): 1878 - 1883.
- [12] Stevek J, Kvasnica M, Fikar M. Towards a dominant-polytope complexity reduction in explicit MPC [A]. Proceedings of International Conference on Process Control [C]. strbské pleso, Slovak Republic, 2013: 124 - 129.
- [13] Fuchs A N, Jones C N, Morari M. Optimized decision trees for point location in polytopic data sets - application to explicit MPC [A]. Proceedings of American Control Conference [C]. Baltimore, USA, 2010: 5507 - 5512.
- [14] 席裕庚, 李德伟, 林 妹. 模型预测控制——现状与挑战 [J]. 自动化学报, 2013, 39 (3): 222 - 236.
- [15] Bertsekas, D P. Dynamic Programming and Optimal Control [M], Massachusetts: Athena Scientific, 1996.
- [16] 王 琳, 张根宝. 自抗扰控制器在双容水箱中的应用 [J]. 计算机测量与控制, 2013, 21 (3): 775 - 778.