

# 基于飞行计划的惯性导航误差模型分析

耿宏, 刘晓萌, 刘家学

(中国民航大学 航空自动化学院, 天津 300300)

**摘要:** 为了更有效地评估民航飞机惯性导航性能, 更好地分析其惯导数据相对于飞行计划的误差; 提出一种新方法整体分析惯导误差, 将飞行计划航迹离散化计算出误差数据, 使用小波多尺度分析方法, 经小波变换将误差分为高频与低频两部分, 将非平稳的低频部分进行差分处理转化为平稳时间序列, 最终建立惯导误差数据的自回归滑动平均 (ARMA) 模型; 通过与实际快速存取记录器 (QAR) 数据对比验证, 此模型能较好地描述惯导误差, 较为准确地描述了民航飞机惯性导航误差, 为进一步分析其特性及规律奠定了基础; 此方法可用于评估民航飞机惯导性能。

**关键词:** 惯导误差; 小波变换; 自回归滑动平均模型

## Inertial Navigation Error Model Analysis Based on Flight Plan

Geng Hong, Liu Xiaomeng, Liu Jiaxue

(College of Aeronautical Automation, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

**Abstract:** In order to assess civil aircraft inertial navigation performance more effectively, do better analysis of its inertial data error compared with flight plan. Presents a new method for the overall analysis of inertial navigation error, make flight plan track discrete and calculate the error data, use multi-scale analysis method dividing error into two parts: high frequency coefficients and low frequency coefficients, change non-stationary low frequency coefficient into a stationary time series, eventually establish error data's autoregressive moving average (ARMA) model. Through the practical quick access recorder (QAR) data validation, this model describes civil aircraft inertial navigation error and describe the trends more accurately. This method can be used to assess civil aircraft inertial navigation system performance.

**Keywords:** inertial navigation error; wavelet transform; ARMA model

## 0 引言

惯性导航是一种自主导航, 不需要借助外部设备就可以完成飞行导航。以波音 737 系列飞机为例, 其惯性导航中飞机经纬度信息是由 ADIRS (Air Data Inertial System) 提供。当前惯导误差主要依靠分析惯导系统结构, 根据惯导系统误差方程<sup>[1]</sup>, 计算出惯导误差模型, 并使用轨迹发生器验证模型的正确性。在此基础上, 针对惯导算法测试中真实飞行轨迹数据难以获得的问题, 建立一种基于飞行仿真的惯导算法测试平台。其产生的测试基准数据符合飞行力学的特点, 很好地反映了飞机的动态特性, 可以有效地评估不同惯导算法的性能<sup>[2]</sup>, 进一步完善了惯导系统误差的验证方法。对于民航飞机来说, 飞机制造商没有提供惯导系统具体的系统构成及其数学模型。所以无法从系统组成及其结构的角来建立惯导误差数学模型, 评估其惯导精度, 只能依靠飞机制造商提供的数据评估飞机惯导性能。基于上述原因提出一种新方法将惯导系统作为一个黑箱系统处理, 只分析其输入与输出, 通过对于实际飞行数据计算, 结合对应航班飞行计划, 计算出了其惯导误差并且建立了对应的数学模型, 解决了没有元件级模型的问题。

## 1 惯导误差

在实际飞行计划中, 将航路上的导航点连接就形成了航班预定航迹, 其为一条连续的折线。在实际飞行中, 飞机在指定的高度飞行 (所选航段为 24 000 英尺), 因此只分析其水平面上的误差, 不考虑高度方向上的误差。将飞行计划按照 QAR 数据的采样点数目进行插值计算, 惯导误差定义为飞机实际位置与飞行计划航迹上最短的偏离。

民航采用 WGS-84 坐标系。WGS-84 坐标系中认为地球为一个椭球, 原点  $O$  为地球质心,  $z$  轴与地轴平行指向北极点,  $x$  轴指向本初子午线与赤道的交点,  $y$  轴垂直于  $xOz$  平面 (即东京  $90^\circ$  与赤道的交点) 构成右手坐标系。经纬度数据 (long, lati) 经 WGS-84 坐标变换后转化为直角坐标系下的  $(x, y)$ , 其转化公式如 (1), 其中  $N = \frac{a}{W}$ ,  $a$  为椭球的长半轴取 6378.137 km,  $N$  为椭球的卯西圈曲率半径,  $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$ ,  $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ ,  $e$  为椭球的第一偏心率,  $b$  为椭球的短半轴取 6356.7523141 km,  $H$  为高度取固定值 7.3152 km。以下所使用的经纬度数据都是经过 WGS-84 坐标变换后的数据。

$$\left. \begin{aligned} x &= (N + H) \cos lat \cos lon \\ y &= (N + H) \cos lat \sin lon \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

若 QAR 中记录的飞机经、纬度坐标为  $(lon, lat)$ , 飞行计划中与其对应的航路段中两个航路点的坐标分别为  $(lon1, lat1)$  和  $(lon2, lat2)$ , 则飞行计划上的轨迹方程为:

$$latP = \frac{lat2 - lat1}{lon2 - lon1} (lonP - lon1) + lat1 \quad (2)$$

收稿日期: 2014-11-26; 修回日期: 2015-01-07。

基金项目: 国家自然科学基金重点项目 (60832011); 天津市科技攻关计划重点项目 (06YFGZGX00700)。

作者简介: 耿宏 (1964-), 男, 陕西西安人, 教授, 硕士研究生导师, 主要从事民航数据分析和飞机维修工程方向的研究。

其中: lonP、latP 分别为飞行计划上点的经纬度。经实际位置点做飞行计划航迹的垂线, 其公式如下:

$$latP = -\frac{lon2 - lon1}{lat2 - lat1}(lonP - lon) + lat \quad (3)$$

由公式 (2) 与 (3) 可以得出飞行计划航迹上与 QAR 数据点对应点的经纬度坐标如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} lonP = \frac{A^2 lon + B^2 lon1 + AB(lat - lat1)}{A^2 + B^2} \\ latP = -\frac{A}{B} \left\{ \frac{A^2(lon - lon1) + AB(lat - lat1)}{A^2 + B^2} + lat \right\} \\ A = lon2 - lon1 \\ B = lat2 - lat1 \end{array} \right. \quad (4)$$

## 2 误差模型计算

### 2.1 惯性导航误差计算

由专用 QAR 数据译码出的数据文件为 CSV (Comma Separated Value) 格式, 其中包括多项数据, 对于分析所需惯性导航数据只需经度、纬度信息这两项。其中经纬度信息每 4 秒更新一次, 故需要对数据进行初步处理筛选出需要的数据, 以减少后续计算量。图 1 为实际数据以及飞行计划数据。图 2 为经坐标变换计算出的惯导误差。

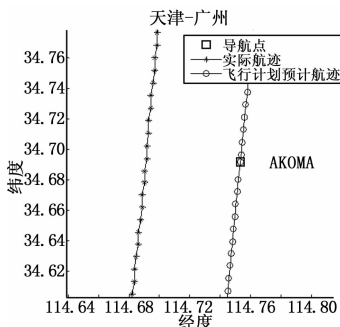


图 1 初步处理的数据

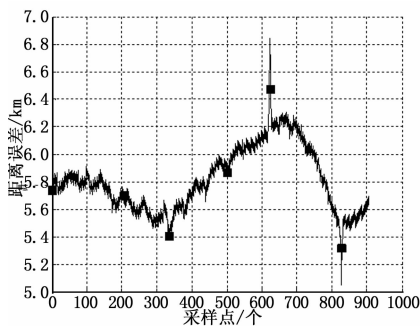


图 2 惯导误差

### 2.2 数据滤波

由图 2 可知计算出的惯导误差数据包含高频噪声, 需要进行进一步的处理。本文选用的是小波去噪方法, 在 matlab 中使用 wdencomp 函数将误差数据进行滤波处理。通过对比最终选用小波基为 db6, 层数为 4 的小波去噪变换。滤波后的数据如图 3 所示, 其已经将高频噪声滤除, 并且较好地保留了原始

信号有用信息。

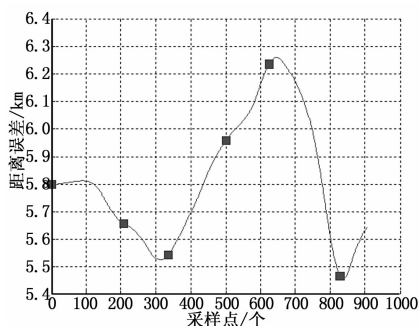


图 3 滤波后的误差数据

### 2.3 误差信号多尺度分析

惯性系统在制造、装调中存在误差, 所有这些因素称为误差源, 捷联惯导系统误差源主要可分为以下几类: 元件误差、安装误差、初始条件误差等。在民航飞机运行过程中, 其惯导系统不是一个独立的系统, 它的运行受到其他系统的影响, 无法单独进行分析。本文所分析的误差结合了飞行管理计算机、飞行控制计算机等误差。其为非平稳的时间序列, 会随着时间的推移而增加, 有一定的趋势。使用小波变换将误差按频率进行分解和重构, 将其分解成高频与低频两部分, 分别进行分析最终得到误差的数学模型。

对惯导误差使用小波分解的 Mallat 算法, 将惯导误差信号经两个互补的滤波器产生两个信号  $x_A^1(n)$  和  $x_B^1(n)$ , 其中  $x_A^1(n)$  为误差信号经 1 层小波分解后的低频部分,  $x_B^1(n)$  为高频部分。经多次实验, 最终选用 matlab 中 db10 的小波基, 对误差信号进行 5 层分解, 其分解过程如图 4 所示, 其中  $x_A^i(n)$  与  $x_B^i(n)$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ) 分别代表误差信号经第  $i$  层小波分解后的低频部分与高频部分。经过 5 层小波分解得到误差信号的低频分量  $x_A^5(n)$  和高频分量  $x_B^5(n)$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ )。

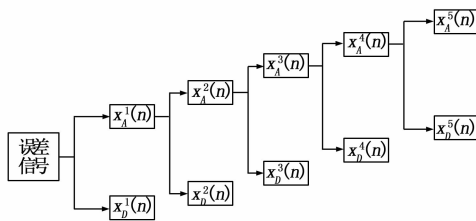


图 4 误差信号的五层小波分解过程

分解后的各层小波系数可以通过单支重构恢复到原来的序列长度, 使之具有与原序列时间尺度一致的性质。应用此方法可以对误差信号进行多尺度分析。误差信号经 5 层小波分解及重构后, 其数据如图 5 所示, 通过观察可知低频分量  $x_A^5(n)$  重构后为非平稳时间序列。

### 2.4 ARMA 模型建立

AR (Auto Regressive) 模型、MA (Moving Average) 模型和 ARMA 模型描述的时间序列为平稳时间序列。如果所研究的时间序列是非平稳的, 则必须先对其做平稳化处理<sup>[8]</sup>。误差信号通过小波分解, 分解到不同的频率通道上, 通过小波单支重构, 得到与原信号时间尺度一致的各层信号。由于分解后

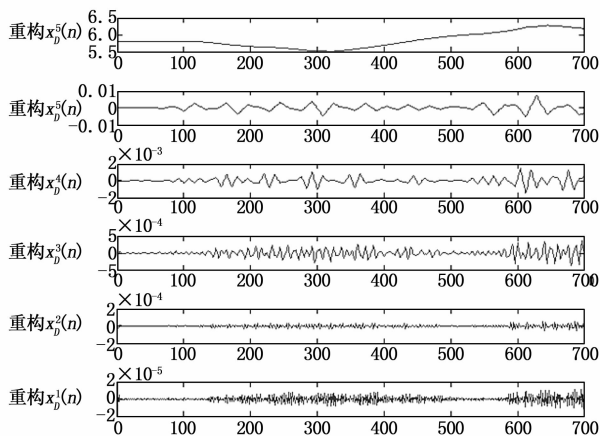


图 5 经 5 层小波分解及重构后的误差信号

的信号在频率成分上比原信号简单，高频部分常为周期振荡信号，可以用均值为零的平稳时间序列分析方法来分析预测<sup>[8]</sup>。图 6 为建模流程图。

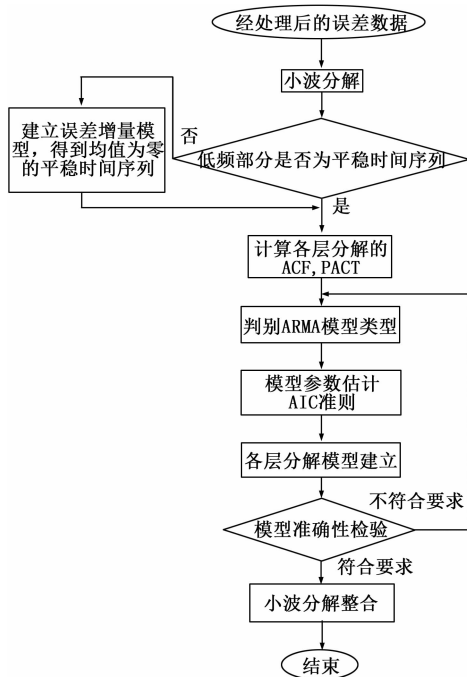


图 6 建模流程图

经过小波分解后得到  $x_A^5(n)$  的重构序列为非平稳时间序列，对  $x_A^5(n)$  的重构序列进行差分处理得到其误差增量模型  $\Delta x_A^5(n)$ ，其计算公式如式 (5)，其中  $n > 1$ 。  $\Delta x_A^5(n)$  为平稳时间序列。

$$\Delta x_A^5(n) = x_A^5(n) - x_A^5(n-1) \quad (5)$$

通过计算  $\Delta x_A^5(n)$  及  $x_b^i(n)$  重构后的小波系数的 ACF (Auto Correlation Function)、PACF (Partial Autocorrelation Function)，结合表 1 所示的 ARMA 模型类型判别准则，判断 ACF 与 PACF 的特性 (截尾或拖尾)，可以判断  $\Delta x_A^5(n)$  及  $x_b^i(n)$  重构后序列的模型形式。AR 模型、MA 模型和 ARMA 模型是平稳随机信号的 3 种标准随机模型，其中 AR 模型和

MA 模型是 ARMA 模型的两种特殊形式。将均值为零的白噪声序列通过全极型、全零型和零极型滤波器，就可以分别产生 AR、MA 和 ARMA 过程<sup>[8]</sup>。通过计算 ACF 及 PACF 并且分析其特性得出  $\Delta x_A^5(n)$  及  $x_b^i(n)$  重构后的序列适用于 ARMA 模型。

表 1 ARMA 模型类型判别准则

判定项目	模型类型		
	AR( $p$ )	MA( $q$ )	ARMA( $p, q$ )
ACF	拖尾	截尾	拖尾
PACF	截尾	拖尾	拖尾

ARMA 模型是 AR 模型和 MA 模型的结合，其中 AR ( $p$ ) 模型描述的是当前值与历史值之间的关系：随机信号可由自身的  $p$  个历史数据  $x(n-k)$  和白噪声  $w(n)$  的线性组合表示。而 MA ( $q$ ) 描述的是自回归部分的误差累计：随机信号可由当前激励值  $w(n)$  和若干次过去激励值  $w(n-k)$  线性组合表示。公式 (6) 为 ARMA ( $p, q$ ) 模型的数学表达式，其中  $x(n)$  代表  $\Delta x_A^5(n)$  及  $x_b^i(n)$ 。

$$x(n) = \sum_{k=0}^q b_k w(n-k) - \sum_{k=1}^p a_k x(n-k) \quad (6)$$

对于 ARMA 模型中阶数  $p, q$  的确定可以借助 Matlab 中的 ARMAX 辨识工具箱。ARMA 模型是 ARMAX 模型的一种特殊形式，其定义为  $\text{arimax}(y, [na nc])$ ，其中  $y$  为需要辨识的数据， $[na nc]$  分别为 ARMA 模型的阶数，函数输出为 ARMA 模型相关的参数。其定义如下：

$$\left\{ \begin{aligned} A(z)Y(t) &= C(z)e(t) \\ A(z) &= 1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i} \\ C(z) &= 1 + \sum_{i=1}^q c_i z^{-i} \end{aligned} \right. \quad (7)$$

其中： $Y(t)$  为输出序列， $e(t)$  为白噪声序列， $p$  和  $q$  分别为 ARMA 模型中 AR 和 MA 的阶数。ARMA 模型的阶数越高，对于时间序列的描述就越准确。但是随着阶数的增大，计算量也就相应的变大，这就需要在确定 ARMA 模型阶数时兼顾简洁性和精确性。

由 ARMAX 工具箱估算出  $\Delta x_A^5(n)$  及  $x_b^i(n)$  重构序列所对应的 ARMA 模型阶数后，计算出 ARMA 模型与  $\Delta x_A^5(n)$  及  $x_b^i(n)$  重构序列的残差平方和，结合赤池信息量准则 (AIC, Akaike Information Criterion) 可以较好地估计 ARMA 模型的阶数。

AIC 准则是衡量统计模型拟合优良性的一种标准，在一般的情况下可以表示为：

$$AIC = (2k - 2L)/n \quad (8)$$

$$L = -\left(\frac{n}{2}\right) \ln(2\pi i) - \left(\frac{n}{2}\right) \ln\left(\frac{SSE}{n}\right) - \frac{n}{2} \quad (9)$$

它的假设条件是模型的误差服从独立正态分布。其中： $k$  是参数的数量，这里取值为 2， $L$  是对数似然值， $n$  是观测值数目即误差序列的长度，SSE 为残差平方和。AIC 的大小取决于  $L$  和  $k$ 。 $k$  取值越小，AIC 越小； $L$  取值越大，AIC 值越小。 $k$  小意味着模型简洁， $L$  大意味着模型精确。因此 AIC 和修正的决定系数类似，在评价模型时兼顾了简洁性和精确性。通过计算建立  $\Delta x_A^5(n)$  及  $x_b^i(n)$  ( $i=5, 4, 3, 2, 1$ ) 重构后序列的 ARMA 模型，其结阶数  $p$  和  $q$  的值如表 2 所示，经 AIC 准则

检验, 其较好地描述了  $\Delta x_{\lambda}^i(n)$  及  $x_b^i(n)$  重构后序列。表 3 和表 4 为  $\Delta x_{\lambda}^i(n)$  及  $x_b^i(n)$  重构后序列 ARMA 模型的系数值, 其中 A5 代表  $\Delta x_{\lambda}^5(n)$ , D5、D4、D3、D2、D1 代表  $x_b^i(n)$  ( $i = 5, 4, 3, 2, 1$ )。

表 2 ARMA 模型阶数

阶数	10,10	9,10	7,9	10,10	10,9	6,7
----	-------	------	-----	-------	------	-----

表 3 ARMA 模型系数  $a_i$

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
A5	-5.683	14.7	-23.65	28.23	-29.23
D5	-4.222	8.374	-10.82	11.35	-11.35
D4	-2.529	3.347	-3.237	3.313	-3.304
D3	-2.653	4.953	-6.706	8.771	-9.331
D2	1.69	3.518	4.403	5.925	5.845
D1	3.32	2.213	-4.28	1.12	6.21
	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$
A5	28.28	-23.62	14.56	-5.554	0.962
D5	10.41	-7.201	3.046	-0.561	
D4	2.362	-0.781			
D3	8.812	-6.743	4.967	-2.716	1.084
D2	5.805	4.193	3.303	1.498	0.869
D1	-0.287				

表 4 ARMA 模型系数  $c_i$

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$
A5	0.040	0.307	1.108	-0.030	1.003
D5	0.618	0.462	1.252	1.132	1.408
D4	1.318	2.269	2.251	0.254	-0.367
D3	0.544	-2.614	-1.531	1.556	1.923
D2	-3.102	2.77	0.057	-1.269	1.057
D1	1.971	-0.482	6.213	8.154	-1.541
	$c_6$	$c_7$	$c_8$	$c_9$	$c_{10}$
A5	0.487	0.490	0.458	0.276	0.695
D5	1.114	1.207	0.388	0.5262	0.915
D4	-2.229	-2.212	-1.215	-0.912	
D3	1.692	-1.395	-2.556	0.458	0.923
D2	0.163	-2.311	2.333	-0.698	
D1	0.21	6.31			

### 3 ARMA 模型验证

通过以上方法建立惯导误差的 ARMA 模型, 使用另一同航线航班的飞行数据进行验证, 起始时间为通过规定导航点的时间, 其对应的距离误差作为 ARMA 模型的输入信号, 最终

得到 ARMA 模型的输出信号即估算误差。实际误差数据与 ARMA 模型估算误差如图 7 所示。由对比可知建立的模型符合要求, 能较好地反映其变化趋势。若无其他因素影响, 飞机在飞行中依靠惯性导航及飞控计算机可以较好地保持其航迹。实际飞行中, 由于有空管因素存在, 飞机飞行轨迹并不是一直按照飞行计划飞行; 同时因为天气(雷电或积雨云)等原因, 飞机会进行绕飞, 这些因素就造成了飞机轨迹的不可预测。由于飞机结合飞行计划及空管发布的指令飞行, 且航路有一定的宽度, 故飞机在接通自动驾驶仪后, 会和飞行计划预计航线之间有固定的偏差, 在此不进行特别的分析。

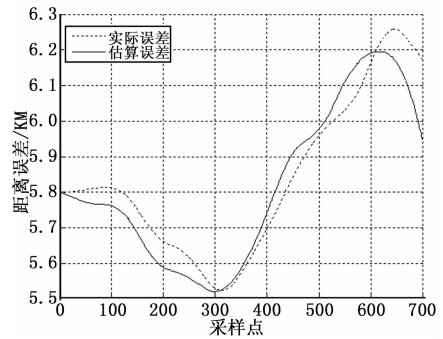


图 7 实际误差与 ARMA 模型估算误差

### 4 结束语

惯性导航是民航飞机最为重要的导航系统之一, 它自主地为飞行提供飞机导航信息, 由于当前我国民航所使用的飞机主要为外国制造, 生产厂商并不会提供其设计资料, 故无法从系统结构的角度的分析并评估其惯导误差。而本文提出的方法可以用于评估飞机在实际运行过程中惯导误差。当前我国正在推进 PBN (performance based navigation) 技术实施, 其运行对飞机导航系统有特定的要求, 本文提出的方法可以用于飞机惯导性能评估, 并且对于在实际运行新型号民航飞机, 中评估其惯性导航性能也有一定的借鉴意义。

#### 参考文献:

- [1] 徐梓峰, 卢艳娥, 庞春雷. 基于 GPS 的捷联惯导系统误差校正研究 [J]. 计算机测量与控制, 2013, 21 (9): 2518-2519.
- [2] 李军伟, 程咏梅, 陈克喆, 等. 基于飞行仿真的捷联惯导算法测试平台 [J]. 中国惯性技术学报, 2012, 20 (5): 530-535.
- [3] 张卫侠, 张立峰, 刘中平, 等. 机载激光捷联惯导系统动态误差的影响分析 [J]. 中国惯性技术学报, 2014, 22 (3): 306-310.
- [4] Boeing, Aircraft Maintenance Manual [M]. Seattle: Boeing.
- [5] 耿宏, 李萍萍, 刘家学, 等. 基于压缩感知的 QAR 数据重构 [J]. 计算机测量与控制, 2013, 21 (5): 1351-1353.
- [6] 张德丰. MATLAB 数字信号处理与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2010.
- [7] 卓金武, 魏永生, 秦健, 等. MATLAB 在数学建模中的应用 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2014 年.
- [8] 席超, 蔡成林, 李思敏, 等. 基于模型的导航卫星钟差长期预报 [J]. 天文学报, 2014, 55 (1): 78-89.
- [9] 黎志勇, 李宁. 基于的非平稳时间序列预测方法研究 [J]. 计算机工程与应用, 2014, 50 (10): 38-43.
- [10] 秦永元. 惯性导航 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.