

# 基于拟牛顿法的连铸结晶器热传导反问题求解

李 鹏<sup>1</sup>, 刘春茂<sup>2</sup>

(1. 西藏民族学院 信息工程学院, 陕西 咸阳 712082; 2. 河南工业职业技术学院, 河南 南阳 473000)

**摘要:** 在实际的工业过程中, 热传导反问题广泛的存在于各个应用领域; 由于连铸的生产环境恶劣, 给连铸钢坯的测温造成了很大的困难, 导致连铸结晶器热传导反问题的求解是很困难的; 在研究了热传导反演算法的基础上, 基于连铸结晶器的有限的测量点, 通过热传导反演算法可以求出结晶器的热流密度, 给连铸的优化和控制提供依据; 在建立了连铸热传导反问题模型的基础上, 提出了基于拟牛顿法的连铸结晶器热传导反问题求解的改进算法, 该算法可以有效的利用当前搜索过程中的信息, 通过近似目标函数的二阶导数来加快算法的搜索效率, 采用了 Wolf 步长选择规则克服了算法收敛速率慢的缺点, 并且该算法无需计算 Hessian 矩阵, 能够有效降低计算的复杂度; 实验结果表明该算法能够快速有效的求解该问题; 该方法用于连铸结晶器热传导反问题是可行的、有效的。

**关键词:** 热传导; 反问题; 连铸; 拟牛顿法

## Continuous Casting Mold Heat Conduction Inverse Problem Based on Quasi-Newton Method

Li Peng<sup>1</sup>, Liu Chunmao<sup>2</sup>

(1. Tibet University For Nationalities, Xianyang 712082, China;

2. Henan Polytechnic Institute, Nanyang 473000, China)

**Abstract:** In the actual industrial process, the inverse problem exists in a wide range of thermal conductivity of various application fields. Due to the harsh environment of continuous casting production to continuous casting billet temperature caused great difficulties, resulting in continuous casting mold inverse heat conduction problem is difficult to solve. On the basis of studies on the thermal conductivity inversion algorithm, based on limited measurement points continuous casting mold by thermal conduction heat flux density inversion algorithm can find the mold, to casting optimization and control to provide evidence. On the basis of the establishment of a continuous casting inverse heat conduction problem model, based on the inverse problem raised conduction heat casting mold quasi-Newton method for solving the improved algorithm can effectively use the information in the current search process, through the approximation of the objective function second derivative to speed up the search efficiency of the algorithm, using a step size selection rules Wolf overcomes the disadvantages of the slow convergence rate and the algorithm without calculating Hessian matrix, can effectively reduce the complexity of calculation. Experimental results show that the algorithm can quickly and effectively solve the problem. The method for solving continuous casting mold inverse heat conduction problem is feasible and effective.

**Keywords:** heat conduction; inverse problem; continuous casting; quasi-Newton method

## 0 引言

传热反问题是通过已知偏微分方程的解来反求偏微分方程的边界条件, 偏微分方程源项或者偏微分方程的系数等。因此传热反问题被广泛的应用于工业生产的各个领域。连铸结晶器温度场的反算, 对连铸过程中钢坯的生产质量起着非常重要的作用<sup>[1]</sup>。

国内外很多的学者都对热传导反问题有了很多研究<sup>[2-4]</sup>, 文献[5-6]采用了智能优化算法来求解该热传导反问题, 智能优化算法的特点是对该类复杂问题能给出的一套求解框架, 但大多由于并行搜索计算时间较长, 因此计算代价较高。文献[7-8]采用共轭梯度法代替智能优化算法, 取得了较好的计算效果, 同时降低了计算时间。文献[9]采用拟牛顿法对二维的抛物方程进行了反演计算, 取得了较好的结果。文献[10]

基于拟牛顿法的 BFGS 算法, 提出了一种新的混合 BFGS 算法来求解优化问题, 加快了该算法的收敛性。文献[11]利用实际测量数据, 将实际数据加入到反算过程中, 大大提高了计算的准确性。

本文在充分的研究了连铸结晶器热传导反问题的基础上, 将拟牛顿法应用到热传导反问题的求解中, 提高了算法收敛速率的同时降低了算法的计算时间。并且以现场的实测数据作为基础进行了仿真实验, 证明了该算法的有效性。

## 1 连铸结晶器传热正问题

### 1.1 连铸工艺分析

连铸是钢铁生产中的一重要工序, 其主要目的是使钢水逐渐冷却凝固成为合格质量的钢坯<sup>[12]</sup>。如图 1 所示是一台弧形连铸机的示意图, 该连铸机是由结晶器、钢包、中间包、二次冷却区、夹辊、及切割点等装置构成的。通过合理的选择连铸的喷水冷却强度, 我们可以使铸坯表面温度迅速下降达到目标温度。铸坯在经历了二冷区之后, 高温钢水会逐渐凝固成合格的铸坯<sup>[12]</sup>。

收稿日期: 2014-10-22; 修回日期: 2015-03-31。

基金项目: 西藏自治区科技厅项目(12KJZRYMY07)。

作者简介: 李 鹏(1982-), 男, 陕西西安人, 硕士, 实验师, 主要从事电路与系统、通信系统设计方向的研究。

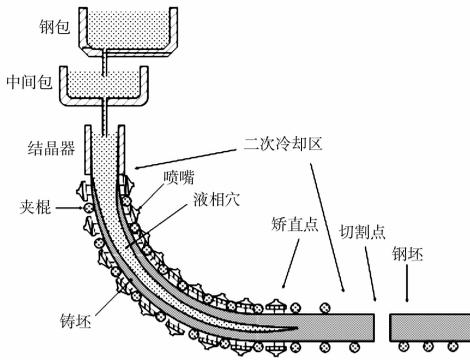


图 1 连铸机结构

1.2 连铸凝固传热模型

在如下的一些假设情况下, 我们基于傅里叶导热定理, 可以建立起连铸方坯的凝固传热模型。

1.2.1 基本假设

在连铸方坯凝固传热模型建立时, 我们做如下假设:

- 1) 不考虑凝固冷却收缩或者形变而引起的铸坯尺寸变化;
- 2) 采用等效比热法来计算两相区的比热容;
- 3) 不考虑流场对温度场的影响;
- 4) 不考虑沿拉坯方向的热量传递。

1.2.2 微分方程

在以上假设的基础上可以得到连铸凝固传热二维模型的基本导热微分方程为:

$$\rho C_e \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

其中:  $T$  代表二维温度场;  $\rho$  为钢的密度;  $C_e$  为钢的比热;  $t$  为时间;  $\lambda$  为导热系数;  $x$  代表铸坯厚度方向;  $y$  代表铸坯宽度方向。

1.2.3 边界条件

铸坯在整个冷却过程中, 通过了结晶器, 二次冷却区, 不同的冷却段其水量大小不一样, 因此每一段的边界条件并非完全一样。

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_i (T_b - T_w) \quad (2)$$

其中:  $h_i$  可以表示铸坯表面与冷却水之间在二冷区第  $i$  段的等效综合换热系数 ( $W / (m^2 K)$ );  $T_w$  为目前冷却水温度 ( $^{\circ}C$ );  $T_b$  表示当前铸坯表面温度 ( $^{\circ}C$ )。

$$h_i = \frac{1576\omega_i^{0.54} [1 - 0.0075(T - 273.13)]}{\alpha} \quad (3)$$

其中:  $i = 1, 2, \dots, n$  分别看做每个冷却区编号;  $\omega_i$  为第  $i$  个冷却区冷却水密度 ( $L/m^2$ );  $\alpha$  为与连铸机有关的参数;  $h_i$  为冷却区  $i$  的综合换热系数。

在连铸板坯生产工艺中, 宽度和厚度方向的边界条件是对称分布的。因此可以将模型的计算区域作对称处理, 即在横截面上, 只计算厚度方向一半的区域, 另一半区域的温度场分布情况由对称性得到。铸坯的厚度、宽度、连铸机长度分别表示为  $Thick$ ,  $Width$  和  $Length$ 。所以在中心线上, 有如下式子成立:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{y=\frac{1}{2}Thick} = 0 \quad (4)$$

$$T_{x=0} = T_c \quad (5)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{x=Length} = 0 \quad (6)$$

其中:  $T_c$  为浇铸初始温度,  $Length$  为连铸机长度。

2 连铸结晶器传热反问题

由于针对不同工业过程, 传热反问题都具有不同的形式。结晶器是连铸生产过程中的核心部分, 对钢坯的质量起着决定性作用。而往往由于连铸生产过程中恶劣的生产环境, 传感器测量的温度并不可靠。由此依据一些不完备的信息来计算反演结晶器热流密度对连铸生产过程来说是十分重要的。

2.1 传热反问题的目标函数

连铸结晶器都有若干个测温点, 这些测温点能够测量一部分铸坯的表面温度, 我们根据所测量的信息来反算结晶器的热流密度。

$$J(q) = \sum_{k=1}^N [T_k^{cal}(q) - T_k^{mea}]^2 \quad (7)$$

式中,  $q$  为热流密度是我们需要反算的参数,  $T_k^{cal}(q)$  是计算温度值,  $T_k^{mea}(q)$  是测量温度值,  $N$  表示一共有  $N$  个测温点。该目标函数的意义是根据  $N$  个测温点的数据, 来不断的校正我们的计算温度, 从而辨识出来热流密度的大小。事实上当有多个测温点的时候, 传热反问题本质上就变成了多目标优化问题, 优化目标和测温点的数目是一样多的。

2.2 传热反问题的约束条件

传热反问题依然受到偏微分方程的约束, 偏微分方程本质上是描述  $q$  热流密度和  $T_k^{cal}(q)$  计算温度之间的关系, 它们满足如下的偏微分方程约束:

$$\rho C_e \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (8)$$

其边界条件为

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q, \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (9)$$

由上式分析可知  $q$  热流密度存在于偏微分方程的边界条件上, 我们的目的是寻找一个这样的  $q$ , 使得微分方程的解  $T_k^{cal}(q)$  尽可能的接近于我们的测量温度  $T_k^{mea}$ 。

3 基于拟牛顿法的连铸结晶器热传导反问题求解

3.1 改进的 BFGS 算法

拟牛顿法被广泛的应用于无约束优化问题的求解中, 与传统的数值优化算法比较, 拟牛顿法具有收敛速率快, 不用计算 Hessian 矩阵的优点。很多研究者给出了不同的拟牛顿法。

拟牛顿法是由牛顿法发展而来的, 牛顿法利用了二阶导数的信息即 Hessian 矩阵, 但计算 Hessian 矩阵工作量大, 并且有的目标函数的 Hessian 矩阵很难计算, 或者有的目标函数根本就不存在 Hessian 矩阵。那么拟牛顿法的思想就是利用一些其它的信息来近似目标函数 Hessian 矩阵, 使得该方法具有类似牛顿法的收敛速率快等优点, 同时克服了牛顿法的缺点。

考虑下面的无约束优化问题

$$\min f(x), x \in R^n \quad (10)$$

在当前点  $x_k$  处对目标函数进行二阶的泰勒展开可得:

$$m_k(d) = f(x_k) + g_k^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d \quad (11)$$

其中:  $B_k$  是 Hessian 矩阵的近似, 它将在每次迭代中进行校正, 极小化这个二次模型得到:

$$d_k + B_k^{-1}g_k = 0 \tag{12}$$

从而可以得到新的迭代公式

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k = x_k - \alpha_k B_k^{-1}g_k \tag{13}$$

$\alpha_k$  是步长因子,  $d_k$  是当前的搜索方向, 我们用了近似的

Hessen 矩阵  $B_k$  取代了原来在牛顿法中的 Hessen 矩阵。

在  $x_{k+1}$  附近对目标函数进行二次的近似有

$$f(x) \approx f(x_{k+1}) + g_k^T(x - x_{k+1}) + \frac{1}{2}(x - x_{k+1})^T G_{k+1}(x - x_{k+1}) \tag{14}$$

对上式两边同时求导可得:

$$g(x) \approx g_{k+1} + G_{k+1}(x - x_{k+1}) \tag{15}$$

令  $x = x_k$  得

$$G_{k+1}(x_{k+1} - x_k) \approx g_{k+1} - g_k \tag{16}$$

由此可得

$$s_k = x_{k+1} - x_k, y_k = g_{k+1} - g_k \tag{17}$$

由上式可知

$$G_{k+1}s_k \approx y_k \tag{18}$$

如果目标函数  $f(x)$  是正定的二次函数, 上述表达式是精确成立的。如果我们要求拟牛顿法构造出来的 Hessen 矩阵  $B_{k+1}$  满足这种关系, 从而得到

$$B_{k+1}s_k = y_k \tag{19}$$

由此可知牛顿迭代的公式为:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k = x_k - \alpha_k B_k^{-1}g_k \tag{20}$$

拟牛顿条件使得二次模型具有以下的才插值性质, 如果  $B_{k+1}$  满足拟牛顿条件, 那么在  $x_{k+1}$  点的二次模型

$$m_{k+1}(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) + g_k^T(x - x_{k+1}) + \frac{1}{2}(x - x_{k+1})^T B_{k+1}(x - x_{k+1}) \tag{21}$$

考虑 Hessen 逆近似序列  $\{H_k\}$ , 设对称秩二校正为:

$$H_{k+1} = H_k + auu^T + bv v^T \tag{22}$$

其中:  $a, b$  为给定的数, 令拟牛顿法满足如下表达式:

$$H_k y_k + auu^T y_k + bv v^T y_k = s_k \tag{23}$$

对于该改进的 BFGS 方法有如下表达式

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \frac{\gamma_k \gamma_k^T}{\gamma_k^T s_k} \tag{24}$$

其中:  $s_k = x_{k+1} - x_k, \gamma_k = g_{k+1} - g_k$ , 如果  $B_k$  是一个对称正定的矩阵并且  $\gamma_k^T s_k > 0$ , 由此可得  $B_{k+1}$  也是对称正定的矩阵。

### 3.2 求解流程

首先 BFGS 算法的关键是求得目标函数对决策变量的导数, 但是由于连铸结晶器热传导反问题的特殊性, 该问题并不同于一般的优化问题存在显示的表达式来描述这个关系。由此我们必须通过人为的方法来定义出这样导数的结构。

$$\frac{\partial J}{\partial q} = \sum_{k=1}^N 2(T_k^{val} - T^{mea}) \frac{\partial T_k^{val}}{\partial q} \tag{25}$$

从上式分析可知  $\frac{\partial T_k^{val}}{\partial q}$  是计算目标函数导数的关键, 但是  $T_k^{val}$  和  $q$  并没有显示表达式, 它们分别是连铸热传导正问题中偏微分方程的解和边界条件。本文依据导数的定义给出了如下的一种数值导数的计算表达式:

$$\frac{\partial T_k^{val}}{\partial q} = \frac{T_k^{val}(q + \Delta q) - T_k^{val}(q)}{\Delta q} \tag{26}$$

由此我们可以轻松的得到目标函数对决策变量导数的信

息, 这样可以方便的使用拟牛顿法来求解该问题。

当算法搜索方向  $d_k$  已经确定的时候, 搜索步长大小的选择对算法来说有着至关重要的作用。好的步长选择法则可以使算法具有较好的性质, 而不好的步长选择法则可能会影响算法的效率, 甚至导致算法不收敛等问题。

常见的线搜索方法如下所示。

1) 标准 Armijo 法:

设  $\beta > 0, \gamma \in (0, 1)$ , 取步长  $\alpha_k = \beta \gamma^{m_k}$ , 其中  $m_k$  是满足下式的最小非负整数:

$$f(x_k + \beta \gamma^m d_k) \leq f(x_k) + \sigma \beta \gamma^m g_k^T d_k \tag{27}$$

式中,  $\sigma \in (0, 1)$ 。Armijo 步长规则是线搜索技术中最为常见的一种  $\alpha_k < \beta$  则可得到如下表达式:

$$f(x_k + \beta \gamma^m d_k) \leq f(x_k) + \sigma \beta \gamma^{m_k} g_k^T d_k$$

$$f(x_k + \beta \gamma^m d_k) > f(x_k) + \sigma \beta \gamma^{m_{k-1}} g_k^T d_k \tag{28}$$

根据泰勒展开式可以知道, 这种步长选择法则得到的  $\alpha_k$  是单调不增的。

2) Goldstein 步长规则:

$$f(x_k + \alpha d_k) \leq f(x_k) + \alpha \sigma g_k^T d_k$$

$$f(x_k + \alpha d_k) > f(x_k) + (1 - \sigma) \alpha g_k^T d_k \tag{29}$$

式中,  $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ , 当  $\alpha > 0$  足够小的时候, 上式中第二个式子一定是不成立的。由此可以推知该规则是首先保证目标函数的下降性, 然后使得下一次迭代点尽快的远离当前迭代点的一种策略。

3) Wolf 步长规则:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \sigma_1 \alpha_k g_k^T d_k$$

$$\nabla f(x_k + \alpha d_k)^T d_k \geq \sigma_2 g_k^T d_k \tag{30}$$

其中:  $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ , 该步长搜索的法则主要考虑的是让函数  $\varphi_k(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$  在  $\alpha_k$  点处的梯度有所减缓, 从而使得下一次迭代点能够尽量的远离当前的迭代点, 增加其搜索效率。因此本文采用了 wolf 线搜索技术来确定我们的搜索步长。

如图 2 所示是该 BFGS 算法的流程图, 首先要求解偏微分方程用来计算导数信息, 求解完偏微分方程依据式 (26) 即可

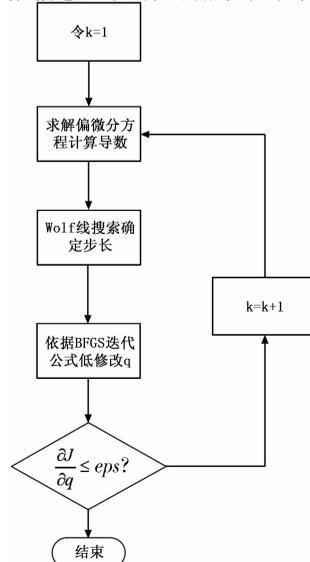


图 2 算法流程图

求解出目标函数的在当前点的导数, 然后以 wolf 线搜索技术确定出搜索步长, 最后更加 BFGS 算法迭代的表达式更新决策变量  $q$ , 如此循环迭代, 直到满足收敛条件  $\frac{\partial J}{\partial q} \leq \epsilon ps$

## 4 仿真实验

我们以某厂的实际测温数据和我们反演计算的温度进行对比, 来验证我们算法的有效性。

### 4.1 仿真实验 1

实验参数选取的是初始浇铸温度为  $1560\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 在这样的情况下我们使用本文提出的 BFGS 算法看反演出的温度和测量温度是否接近。图 3 和图 4 分别表示的是连铸结晶器两个不同区段的反演计算温度和测量温度的对比情况, 由于两个不同的冷却区段有着不同的换热系数, 其温度的变化过程并不是一样的。从图 3 和图 4 分析可知, 反演计算的问题和真实的测量温度十分接近, 最大误差的地方也小于  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 实验结果说明了该反演算法的有效性。

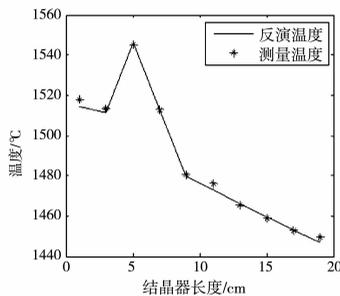


图 3 结晶器第一段反演温度与测量温度对比

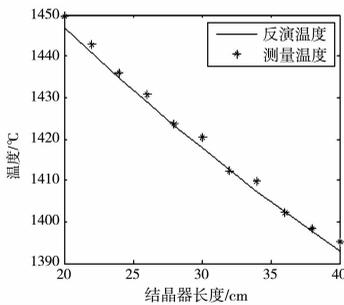


图 4 结晶器第二段反演温度与测量温度对比

### 4.2 仿真实验 2

实验参数选取的是初始浇铸温度为  $1540\text{ }^{\circ}\text{C}$  的情况, 由于连铸生产过程中初始浇铸温度经常发生变化, 它对反演计算肯定会产生影响。图 5 和图 6 分别表示的是连铸结晶器两个不同区段的反演计算温度和测量温度的对比情况。从图 5 和图 6 分析可知, 反演计算的问题和真实的测量温度十分接近, 最大误差的地方也小于  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 实验结果说明了该反演算法的有效性。

## 5 结语

本文针对连铸结晶器热传导反问题的特性, 在建立了反问题优化模型的基础上, 提出了改进的拟牛顿算法来求解该问题, 该算法可以有效的利用当前搜索过程中的信息, 通过近似目标函数的二阶导数来加快算法的搜索效率, 采用了 Wolf 步长选择规则克服了算法收敛速率慢的缺点。并利用传感器测量的温度值作为反算钢坯温度的依据。实验表明该算法能够准确

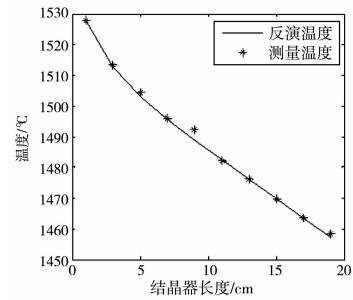


图 5 结晶器第一段反演温度与测量温度对比

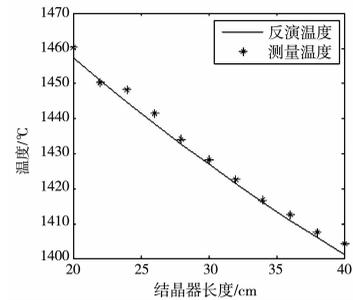


图 6 结晶器第二段反演温度与测量温度对比

快速的计算出钢坯的表面温度, 且保证最大误差在  $5\text{ }^{\circ}\text{C}$  以内。下一步的研究目标是, 如果在连铸生产工况发生动态变化时来准确的辨识出钢坯的表面温度。

### 参考文献:

- [1] 唐 玲. 连铸结晶器传热/润滑反问题方法及应用 [D]. 大连: 大连理工大学, 2012.
- [2] Woodbury K A, Beck J V, Najafi H. Filter solution of inverse heat conduction problem using measured temperature history as remote boundary condition [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2013, 05 (72): 139-147.
- [3] Lu S, Heng Y, Mhamdi A. A robust and fast algorithm for three-dimensional transient inverse heat conduction problems [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2012, 25 (55): 7865-7872.
- [4] 闵 涛, 李 辉, 杨晓莉, 等. 抛物型方程反问题的混合粒子群算法 [J]. 计算机工程与应用, 2011, 47 (16): 35-37
- [5] 田 娜, 朱龙超. 求解热传导系数反问题的量子行为粒子群算法 [J]. 计算机工程与设计, 2014, 24 (5): 55-61.
- [6] 薛齐文, 魏 伟. 热传导反问题智能化识别 [J]. 科学技术与工程, 2009, 24 (65): 7315-7318.
- [7] Dinh Nho Hào, Nguyen Trung Thành, Hichem Sahli. Splitting-based conjugate gradient method for a multi-dimensional linear inverse heat conduction problem [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 2 (232): 361-377.
- [8] 王阳华, 刘宗辉, 杨慧君. 基于传热反问题的微型燃料电池冷却通道优化 [J]. 计算机仿真, 2013, (1): 169-172.
- [9] 闵 涛, 卢宏鹏, 武 苗. 二维抛物型方程参数反演模型的拟牛顿法 [J]. 计算机应用, 2012, 18 (14): 40-42.
- [10] 李文敬, 刘之家, 蓝贞雄. 无约束最优化问题的 BFGS 松弛异步并行算法 [J]. 控制与决策, 2012, 48 (17): 44-47.
- [11] 张 华, 赵文柱, 王国栋. 基于传热反模型的动态测温方法研究 [J]. 仪器仪表学报, 2011, 11 (22): 2499-2505.