

# 稀疏射线不完全数据层析成像影响因素分析

郭亚丽, 韩 焱, 刘林茂

(中北大学 信息与通信工程学院, 电子测试技术国家重点实验室, 太原 030051)

**摘要:** 针对地震层析成像、爆炸场重建等工程中稀疏射线不完全数据层析成像问题, 对影响层析成像结果的观测系统布局方式、初始模型及先验信息 3 个因素进行了分析; 提出了观测系统优化布局的判断指标, 并分析了初始模型和先验信息对反演结果的影响程度, 通过模型仿真及对反演结果的比较, 得到在实际工程中通过对观测系统的优化布局、初始模型合理选取及先验信息的充分利用, 可以最大限度地提高反演精度。

**关键词:** 稀疏射线; 层析成像; 影响因素

## Analysis of Influence Factors of Incomplete Data Tomography with Sparse Rays

Guo Yali, Han Yan, Liu Linmao

(National key laboratory of Electronic test Technology, North University of China, Taiyuan, 030051, China)

**Abstract:** This paper aiming at the problems of incomplete data tomography with sparse rays in seismic tomography and explosion field reconstruction, analyses 3 factors which will influence tomography results, that is system layout, initial model and prior information. This paper presents the indexes of system optimal layout, analyses the influence of initial model and prior information to tomography results. A velocity model of explosion is imitated and the inversion results are compared. A conclusion can be gained that system optimal layout, initial model rational selection and prior information sufficient utilization can help to improve inversion precision furthest in practical project.

**Keywords:** sparse rays; tomography; influence factors

### 0 引言

弹性波层析成像(包括地震波层析成像、声波层析成像)技术, 是近年来发展起来的地球物理方法, 是重要的工程物探方法之一<sup>[1-2]</sup>。这种技术借鉴了医学上 X 射线断面扫描的基本原理, 利用探测目标(如: 混凝土、岩石、土体)中存在的物理参数在空间和时间分布上的差异来实现探测目的的一类方法<sup>[3-4]</sup>。在医学 CT 中数据采集是密集的、全方位的; 而实际工程中的弹性波层析成像, 受激励源和探测器条件的限制, 不能象医学层析成像那样对目标物进行全方位观测, 此类工程问题必然导致层析成像射线稀疏、成像数据不完全<sup>[5-6]</sup>。数学上往往表现为欠定问题, 求得的成像结果多解性强、可信性差, 因此, 在低密度射线情况下, 如何保证成像结果的真实性是目前急需解决的问题。

本文针对弹性波层析成像存在反演数据稀疏、反演精度低的问题, 通过数值试验, 对观测系统布局方式、初始模型选择、及先验信息 3 个主要因素进行了分析, 旨在探讨各参数对层析反演效果的影响程度, 并提出各参数的选取策略, 达到提高稀疏射线层析反演精度的目的。

### 1 算法及试验模型

层析成像反演可以归结为解不适定方程组<sup>[7]</sup>

$$Ax = y \quad (1)$$

从矩阵的观点求解方程(1), 也就是求系数矩阵  $D$  的逆矩阵的问题。但是不完全数据层析成像问题中系数矩阵  $D$  一般是奇异矩阵, 不存在通常意义下的逆矩阵, 因此需要采用广义逆理论进行求解。本文采用加权广义逆反演算法对模型进行仿真研究。

数值仿真模型为一区域空气爆炸冲击波速度分布模型, 传感器及爆炸点分布如图 1 所示, 对该区域进行速度场反演, 此问题为典型的稀疏射线层析成像问题。

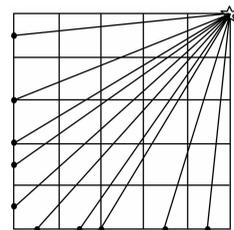
其中定义第  $i$  个网格单元速度的相对误差为:

$$\delta_i = \frac{v_i - v'_i}{v'_i} \quad (2)$$

其中:  $v'_i$  为网格单元速度真实值,  $v_i$  为反演的速度值。

定义网格平均相对误差为:

$$\bar{\delta} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n |\delta_j| = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n \frac{|v_j - v'_j|}{v'_j} \quad (3)$$



● 传感器 ☆ 爆炸点  
图 1 传感器分布示意图

收稿日期: 2014-03-06; 修回日期: 2014-04-10。

基金项目: 国防重点实验室基金项目(9140c1204040908); 基于不规则阵列的冲击波重建技术及国家自然科学基金项目(61171179)。

作者简介: 郭亚丽(1980-), 女, 山西运城人, 讲师, 在读博士, 主要从事信号与信息处理, 信息重建方向的研究。

### 2 观测系统优化布局

传感器布设时, 应使射线覆盖面广、分布均匀; 减少射线

路径矩阵中零元素的个数、降低其条件数。对于稀疏射线不完全数据层析成像问题，由于探测器数目有限，应根据激励源数目及位置，尽量使探测器布设在激励源对面测试区域的边界处，以增大射线覆盖范围。本文采用射线密度、射线正交性及矩阵  $D$  的条件数作为探测器优化布局的判断指标。

射线密度代表通过各网格像元的射线数目，而射线正交性是通过各网格像元的射线之间夹角的最大正弦值来度量<sup>[8]</sup>，射线密度小和正交性差的区域，图像误差大；反之，则结果比较可靠。在射线总数一定时，根据探测目标形状，模型分布特点等合理分布射线。

反演问题的稳定性是根据方程中系数矩阵  $A$  的条件数决定的，条件数越大，问题的稳定性越差，反之亦然。设观测数据  $y$  有微小变化时解的变化为  $\delta x$ ，这时对线性方程组 (1) 有： $A(x + \delta x) = y + \delta y$ ， $\delta x = A^{-1} \delta y$ ，根据从属范数的性质有：

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta y\|, \|y\| \leq \|A\| \|x\|, \text{ 因此 } \frac{\|\delta S\|}{\|S\|} \leq \frac{\|D^{-1}\|}{T} \|\delta T\|, \text{ 即: } \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(D) \frac{\|\delta y\|}{\|y\|}.$$

其中： $\text{cond}(D) = \|A\| \|A^{-1}\|$  称为矩阵  $A$  对方程的解的条件数。合理分布射线，可降低矩阵  $A$  的条件数，使得方程组 (1) 更稳定。

选择探测器数 13 个，选取两种不同的探测器布设方式，如图 2 所示，图 2 (a) 中探测器节点坐标基本呈均匀分布。图 2 (b) 按照本文中探测器布设指标优化布局，单元格标号如图 3 中顺序。

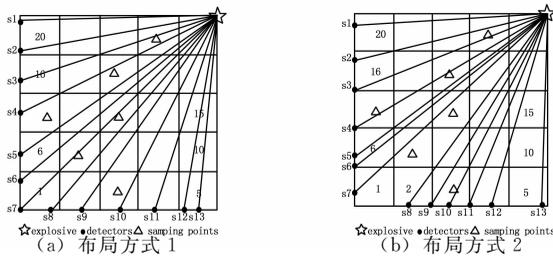


图 2 两种布局方

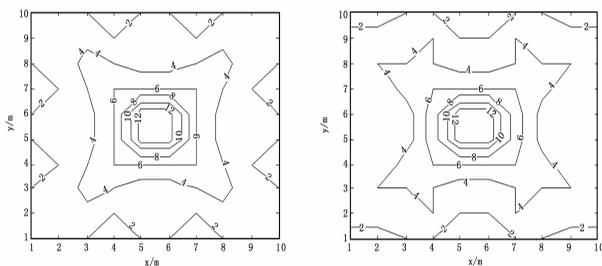


图 3 两种布局方式的密度分布

两种不同布设方式下测试区域整体射线密度分布及正交性分布如图 3、4 所示。同时，两种布局方式矩阵  $D$  条件数分别为  $2.74 \cdot 10^{16}$  和 35.61。由图可知，在射线总数一定时，第二种布局方式下射线分布更合理，正交性更好，同时矩阵  $D$  的条件数更小。选取相同的初始模型，采用加权广义逆算法进行

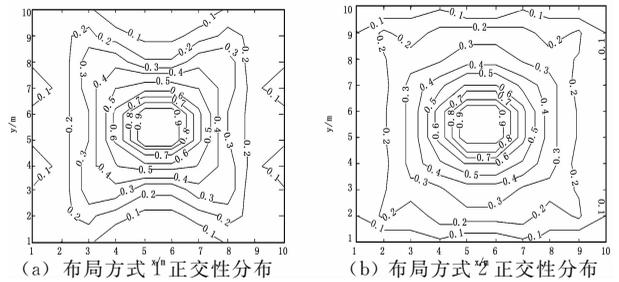


图 4 两种布局方式正交性分布

速度场反演，两种布局方式所得各个网格单元速度相对误差如图 5 所示，平均相对误差分别为 8.47% 和 3.32%，由反演误差可以看出，采用本文传感器优化布局得到的反演结果误差更小，更接近真实模型。

### 3 初始模型选取

初始模型直接影响最终反演结果的精度。初始模型一般是结合被测对象特点及先验知识建立起来的。在缺乏先验知识的情况下，可采用常速模型。

本文采用相关系数计算初始模型与真实模型的相关程度，并得到相关系数随反演误差的关系，从而得到不完全数据稀疏射线层析成像对初始模型的依赖程度。

根据相关系数的定义<sup>[9]</sup>，对于两组数据序列  $x_i$  和  $y_i (i =$

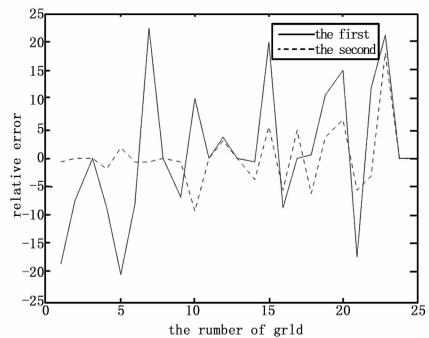


图 5 两者布局方式下各个网格单元速度相对误差

$1, 2, \dots, n)$ ，由下列公式计算这两组数据的相关系数：

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (4)$$

相关系数  $r$  的绝对值越接近 1，说明两组数据相关程度越高。在真实模型基础上加上一定比例的随机噪声，产生不同的初始模型，使得的初始模型与真实模型的相关系数从 0 至 1 变化，采用同一种广义逆算法在不同初始模型条件下，对上述速度场进行反演重建，得到不同相关系数与反演所得速度场平均相对误差的关系曲线，如图 6 所示。由图可知，初始模型与真实模型的相关系数越接近 1，即初始模型与真实模型相关程度越高，反演误差越小。图 7 为初始模型与真实模型相关系数分布为 0.97、0.75、0.54 及初始模型为匀速模型时，各网格反演相对误差。

由上述分析可知，相同条件下，层析成像反演结果严重

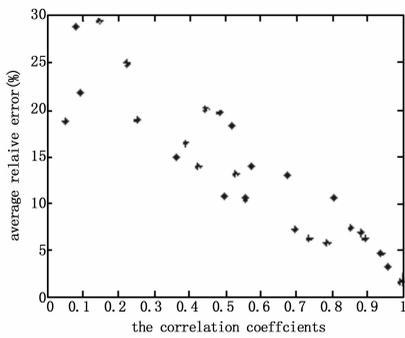


图 6 相关系数与反演平均相对误差关系曲线

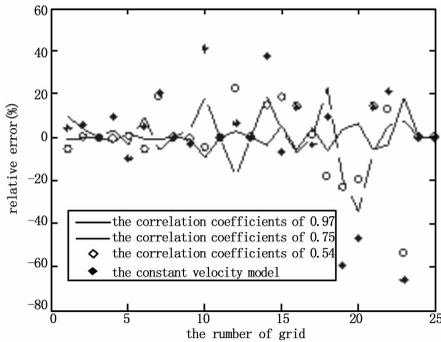


图 7 不同相关系数各网格相对误差

依赖初始模型, 所以层析成像时, 应根据先验信息分析模型特点, 或利用经验公式设置合理的初始模型, 并尽可能增大初始模型与真实模型的相关程度, 以最大限度地提高反演精度。

#### 4 先验信息约束

对于稀疏射线不完全数据层析成像问题, 克服反演欠定问题多解性的一个重要方法就是利用先验信息对反演过程及反演结果进行约束<sup>[10]</sup>。先验信息包括某些参数的精确值、根据先验认识得到的某些参数的取值范围以及模型特点等。模型特点在设置初始模型时利用, 本文对层析成像区域进行个别点取样, 将其作为先验信息, 对反演过程进行紧约束; 同时, 若根据先验信息可以得到参数的真实取值范围对反演值进行上下限约束, 将更有助于提高反演精度。

针对模型特点, 为了使每个网格单元均有射线穿过, 所使用的探测器最少数目为 7 个。将探测器数目从 7 个到 20 个依次增加, 根据观测系统优化布局原则, 将探测器分布在探测区域左边界和下边界, 无取样单元, 利用上述加权广义逆反演算法进行速度场反演; 对测试区域的任意网格单元进行取样, 取样点数分别为 3 个、4 个、5 个、6 个, 采用同样算法进行速度场反演, 所得网格单元速度平均相对误差如图 8 所示。无取样点时, 平均相对误差在 20% 左右。有取样点时, 平均相对误差随探测器数目及取样点数的增加迅速减小。由此可见, 增加取样点数目可以更加有效降低反演误差。

#### 5 结论

实际工程中的弹性波层析成像, 由于工程结构的特殊性和复杂性, 决定了探测器的不完全布设, 本文针对稀疏射线不完

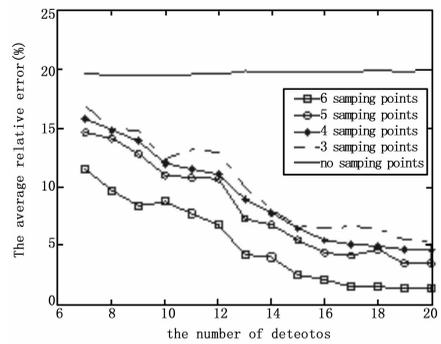


图 8 平均相对误差随取样点数目变化曲线

全数据层析成像问题, 研究了观测系统布局方式、初始模型选择及先验信息约束对反演结果的影响程度, 并采用爆炸速度场模型对三种影响因素进行了仿真研究, 得到如下结论:

- (1) 在探测器数目较少的情况下, 通过对观测系统的优化布局, 提高反演精度, 并提出了观测系统优化布局的方法及判断指标;
- (2) 初始模型制约着反演的精度, 初始模型与真实模型相关程度越高, 反演结果越精确;
- (3) 采用先验信息对反演过程及反演结果进行约束, 可以提高反演精度, 先验信息越多, 反演结果越精确。

在实际工程中, 可以通过对观测系统的优化布局、初始模型合理选取及先验信息的充分利用, 可以最大限度地提高反演精度。

#### 参考文献:

- [1] 刘红军, 薛新华. 弹性波 CT 技术在码头加固效果检测中的应用 [J]. 工程地质学报, 2003, 11 (4): 435-439.
- [2] Watanabe T, Sassa K. Seismic attenuation tomography and its application to rock mass evaluation [J]. International journal of rock mechanics and mining sciences & geomechanics abstracts, 1996, 33 (5): 467-477.
- [3] 马存宝, 李海皓, 张 潇. 基于改进图像重建算法的工业 CT 系统 [J]. 计算机测量与控制, 2007, 15 (11): 1494-1496.
- [4] Kepler W F, Bond L J, Frangopol D M. Improved assessment of mass concrete dams using acoustic travel time tomography (II-application) [J]. Construction and Building Materials, 2000, 14 (3): 147-156.
- [5] 刘国华, 王振宇, 孙 坚. 弹性波层析成像及其在土木工程中的应用 [J]. 土木工程学报, 2003, 36 (5): 76-81.
- [6] 孙旭辉, 田启川, 李临生, 等. 面向 CT 影像的肺结节计算机辅助诊断算法 [J]. 计算机测量与控制, 2011, 19 (2): 295-298.
- [7] Nolet G. 冯 锐, 郝锦琦译. 地震层析技术 [M]. 北京: 地质出版社, 1991.
- [8] 裴正林, 余钦范, 狄帮让. 井间地震层析成像分辨率研究 [J]. 物探与化探, 2006, 26 (3): 218-224.
- [9] 陈家鼎, 等. 概率统计讲义 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1995.
- [10] 刘玉柱, 董良国, 夏建军. 初至波走时层析成像中的正则化方法 [J]. 石油地球物理勘探, 2007, 6 (42): 682-685.