

# 基于 OMP 算法的图像重构研究与 FPGA 实现

陈宁<sup>1</sup>, 阎琳<sup>2</sup>, 邱岳恒<sup>3</sup>

(1. 中国飞行试验研究院航电所, 西安 710089; 2. 西安电子科技大学通信工程学院, 西安 710071;

3. 中航工业第一飞机设计研究院, 西安 710089)

**摘要:** 针对高分辨率的图像在采集过程中存在数据量较大的问题, 提出了一种基于正交匹配追踪 (OMP) 算法的图像重构方法, 设计了 OMP 算法的硬件结构, 并在 FPGA 平台上进行了仿真验证; 首先, 研究了压缩感知算法的基本原理; 然后, 分别基于匹配追踪算法 (MP) 和正交匹配追踪算法实现了图像的重构; 最后, 通过仿真对比分析了这两种方法的图像重构结果, OMP 算法误差在  $10^{-15}$  量级, 明显优于 MP 算法的  $10^{-3}$  误差量级, 并且 OMP 算法的迭代收敛性也优于 MP 算法。

**关键词:** 图像; 正交匹配追踪算法; FPGA; 压缩感知算法; 重构

## Study of Image Reconstruction Based on OMP Algorithm and FPGA Implementation

Chen Ning<sup>1</sup>, Yan Lin<sup>2</sup>, Qiu Yueheng<sup>3</sup>

(1. Avionics Department, Chinese Flight Test Establishment, Xi'an 710089, China;

2. Telecommunication Engineering Department, Xidian University, Xi'an 710071, China;

3. Flight Control and Hydraulic Department, AVIC First Aircraft Institute, Xi'an 710089, China)

**Abstract:** For the high-resolution image need a large quantity of data in an acquisition process, a method based on orthogonal matching pursuit (OMP) algorithm for image reconstruction has been proposed and verified through the FPGA platform. Firstly, the basic principle of compressed sensing algorithm has been studied. Secondly, the image reconstruction can be realized based on the matching pursuit algorithm (MP) and orthogonal matching pursuit algorithm respectively. Lastly, compared with the simulation results of image reconstruction based on the above two methods, show that the OMP algorithm is superior to MP algorithm not only at the convergence but also the reconstruction effect.

**Keywords:** image; orthogonal matching pursuit; FPGA; compressed sensing algorithm; reconstruction

## 0 引言

近些年来, 针对在信号处理领域中的可稀疏表示信号, 出现了一种被称之为压缩感知 (compressive sensing) 的理论, 该理论具备将数据采集与数据压缩两个过程合二为一的优点, 用较少的数据就可以准确地恢复原始信号, 从而突破了原始的奈奎斯特采样定律, 具有重要的影响和实践意义, 现已广泛应用于图像的压缩、识别和恢复等领域。

在 2006 年, Candès 从数学原理上证明了可以从部分傅立叶变换系数精确重构原始信号, 为压缩感知奠定了理论基础<sup>[2]</sup>。同年, Candès 和 Donoho 在相关研究基础上正式提出了压缩感知的概念<sup>[1-3]</sup>。Candès 和 Donoho 虽然提出了基于压缩感知图像处理的理论方法, 但没有进行相关仿真对比。

因此, 本文选取了基于压缩感知重构法衍生而来的两种典型方法—匹配追踪算法 (MP)<sup>[9]</sup> 和正交匹配追踪算法 (OMP)<sup>[10]</sup>, 将这两种算法分别用于图像的重构中, 并进行仿真对比, 以验证 OMP 算法在数据恢复上优于 MP 算法。

## 1 基于压缩感知的重构方法

### 1.1 压缩感知算法的基本原理

信号的稀疏具体过程为: 将信号投影到正交变换基时, 绝大部分变换系数的绝对值很小, 可以将所得到的变换向量看作是稀疏的或者近似稀疏的。压缩感知只能针对稀疏信号进行处理, 这是压缩感知的先决条件, 即信号必须在某种变换下进行稀疏表示。

假设一个未知的稀疏信号  $x$ , 稀疏度为  $K$ , 即  $x$  是一个  $K$ —稀疏的信号。测量矩阵  $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$  ( $M < N$ ), 信号  $x$  在该测量矩阵下的线性测量值  $y \in \mathbf{R}^N$ , 以上二者的关系式为

$$y = \Phi x \quad (1)$$

式 (1) 为原始信号  $x$  在  $\Phi$  下的线性投影, 并且可以通过测量矩阵  $\Phi$  和恰当的重构算法, 通过线性测量值  $y$  重构稀疏信号  $x$ 。

因为  $y$  的维数远远低于  $x$  的维数, 式 (1) 有无穷多个解, 很难直接重构原始信号。但是, 由于  $x$  是  $K$ —稀疏的, 理论上可以通过求解一个最优的  $l_0$  范数问题实现精确重构, 为

$$\hat{x} = \min \|x\|_0, \text{ s.t. } y = \Phi x \quad (2)$$

其中:  $\|\cdot\|_0$  是向量为 0 范数, 记作  $l_0$  范数, 表示向量  $x$  中非零元素的个数,  $K$ ,  $M$  和  $N$  满足  $M \geq K * \log(N)$  且矩阵  $\Phi$  满足约束等距性条件时, 可以精确重构  $x$ 。

然而, 一般的自然信号在时域内都不是稀疏的, 因而, 上述信号重构过程不能直接应用于自然信号。必须将信号  $s$  经过

收稿日期: 2014-04-09; 修回日期: 2014-05-12。

基金项目: 国家自然科学基金 (60974146); 航空科学基金 (20100753009)。

作者简介: 陈宁 (1969—), 女, 陕西大荔人, 高工, 硕士, 主要从事机载产品研制、电磁兼容性测试以及航电系统试飞技术方向的研究。

某种可逆的变换  $\varphi$  进行稀疏表示, 从而成为一个  $K$ -稀疏信号, 即  $x = \varphi s$ , 具体的表达式为

$$y = \Phi x = \Phi \varphi s \quad (3)$$

通过以上的分析可以看到, 与传统信号采样方法不同, 压缩感知算法的核心思想不是对原始信号  $x$  先采样后压缩, 而是由少量线性测量通过求解式 (2) 表示的最优化问题得到  $x$ , 从而突破了 Nyquist 采样定理的瓶颈, 降低了对传感器分辨率的要求, 进而获取超高分辨率信号。

### 1.2 重构算法

重构算法的关键在于是利用压缩感知所获得的低维数据来恢复原始的高维数据。信号的重构问题可以通过求解一个最优的  $l_0$  范数问题得以解决, 但是最小  $l_0$  范数问题是一个 NP-hard 问题, 需要穷举  $x$  中非零值的所有多种排列可能, 在数值计算上不可实现。因此, 研究人员提出了一系列求得次最优解的算法, 其中匹配追踪系列算法以其简单易行, 运算速度快得到广泛的应用。

#### 1.2.1 匹配追踪算法

匹配追踪算法 (matching pursuit, MP) 是一种贪婪迭代算法, 基本思想为: 在每一次的迭代过程中, 从测量矩阵  $\Phi$  中选择与信号最匹配的原子来构建稀疏逼近, 并求出信号表示残差; 然后, 继续选择与信号残差最匹配的原子, 经过一定次数的迭代, 信号可以由一些原子线性表示。

算法的基本流程如下所示:

(1) 初始时 ( $k=0$ ), 将残差初值设为输入信号  $x$ , 即

$$r_0 = x; a_0 = 0 \quad (4)$$

(2) 在第  $k$  步, MP 通过解决简单的近似问题为

$$\lambda_k \in \operatorname{argmax}_{\omega \in \Omega} |\langle r_{k-1}, \varphi_{\omega} \rangle| \quad (5)$$

选择另一个索引集  $\lambda_k$ , 然后计算出新的近似值和新的残差

$$a_k = a_{k-1} + \langle r_{k-1}, \varphi_{\lambda_k} \rangle \varphi_{\lambda_k} \quad (6)$$

$$r_k = r_{k-1} - \langle r_{k-1}, \varphi_{\lambda_k} \rangle \varphi_{\lambda_k} \quad (7)$$

残差可以表示为

$$r_k = x - a_k \quad (8)$$

#### 1.2.2 正交匹配追踪算法

正交匹配追踪算法 (OMP) 在 MP 的每步上添加了最小二乘缩减, 得到所选原子的最优近似。这一改进可以大大地提高算法的性能。因为残差正交于所选原子, 所以 OMP 不会两次选中同样的原子。

该算法的实现步骤具体如下。

输入: 测量矩阵  $\Phi$ , 采样向量  $y$ , 稀疏度  $K$ ;

输出:  $x$  的  $K$ -稀疏的逼近  $\hat{x}$ ;

初始化: 残差  $r_0 = y$ , 索引集  $\Lambda_0 = \Phi, t = 1$ ;

step1: 找出残差  $r$  和测量矩阵的列  $\varphi_j$  的积中最大值所对应  $\lambda$ , 即  $\lambda_t \in \operatorname{argmax}_{j=1, \dots, N} |\langle r_{t-1}, \varphi_j \rangle|$ ;

step2: 更新索引集  $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{\lambda_t\}$ , 记录找到的传感矩阵中的重构原子集合  $\Phi_t = [\Phi_{t-1}, \varphi_{\lambda_t}]$ ;

step 3: 由最小二乘法可得  $\hat{x}_t = \operatorname{argmin} \|y - \Phi_t \hat{x}\|_2$ ;

step 4: 更新残差  $r_t = y - \Phi_t \hat{x}_t, t = t + 1$ ;

step 5: 判断是否满足  $t > K$ , 若满足, 则停止迭代; 若不满足, 则执行 step 1。

OMP 算法保证了每次迭代的最优性, 减少了迭代的次数。

但是, 它在每次迭代中仅选取一个原子来更新原子集合, 这样必然会付出巨大的重构时间代价。迭代的次数与稀疏度  $K$  或采样个数  $M$  密切相关, 随着迭代次数的增大, 耗时也将大幅增加。

## 2 基于 OMP 算法的 FPGA 实现

随着现代芯片工艺的改进, FPGA 的等效系统门达到几百万门, 而且工作频率也随之提高。FPGA 具有体系结构和逻辑单元灵活、集成度高以及适用范围宽等特点, 兼容了 PLD 和通用门阵列的优点, 可实现较大规模的电路, 编程也很灵活。与门阵列等其它 ASIC 相比, 它又具有设计开发周期短、设计制造成本低、开发工具先进、标准产品无需测试、质量稳定以及可实时在线检验等优点, 因此被广泛应用于产品的原型设计和产品生产之中。

依据 OMP 算法的基本过程, 选择一个随机高斯矩阵  $\Phi$  作为测量矩阵, 正交矩阵选择傅里叶变换矩阵  $\varphi$ , 因此恢复矩阵  $T$  等于二者的乘积, 即  $T = \Phi * \varphi$ 。整个算法的 FPGA 硬件电路图如图 1 所示。

矩阵求逆的硬件设计电路包括块 LU 分解电路、块 L 矩阵与块 U 矩阵的求逆电路、块矩阵乘法电路, 它们共同完成块矩阵的硬件求逆过程, 硬件结构示意图如图 2 所示。

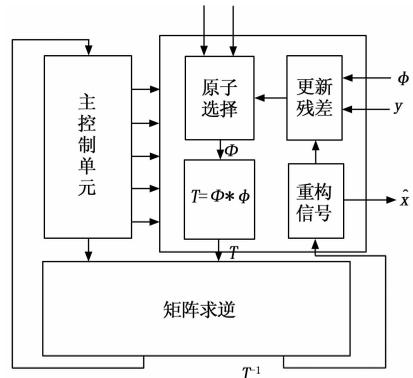


图 1 OMP 算法硬件电路图

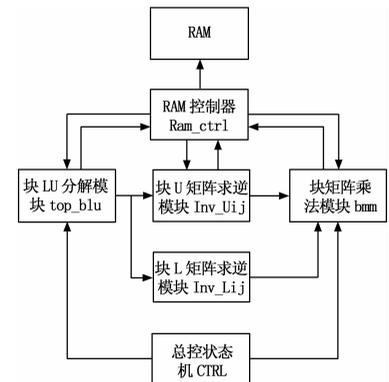


图 2 矩阵求逆的硬件设计电路

## 3 仿真实验

本文分别采用 MP 和 OMP 算法对图像信号进行处理, 信号图像的类型分别为:

(1) 一维信号图像: 长度为 1 024, 稀疏度为 15 的稀疏矩阵;

(2) 二维信号图像。

对一维稀疏信号的算法恢复如图 3 所示。

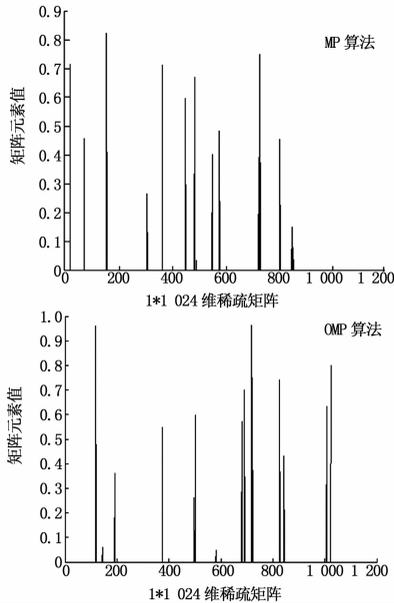


图 3 MP 与 OMP 算法恢复后的一维信号图像

从图 3 可以看出，重构信号和原始信号极为相近，可见 MP 算法和 OMP 算法均能成功的用于信号的恢复并且对一维信号的处理效果很好。通过图 4 可以看出，OMP 算法误差的数量级是  $10^{-15}$ ，MP 算法的数量级是  $10^{-3}$ ，可见 OMP 算法性能要优于 MP 算法。在图 4 中，横轴表示迭代次数，纵轴表示残差信号与原始信号比的残差值，从图中可以看出，在前 7 次迭代时，二者的收敛速度基本相同，从第 8 次迭代开始，OMP 算法的迭代速度要比 MP 算法快，也说明 OMP 算法的收敛性要比 MP 算法好。

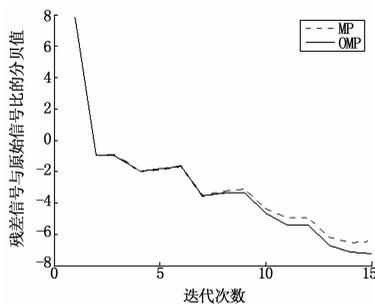


图 4 MP 算法和 OMP 算法的收敛性对比

对二维图像的算法恢复如图 5 和图 6 所示，具体过程为：采用 MP 或 OMP 算法处理二维图像时，将图像进行离散 FFT 变换  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ ，转换成对应基下的稀疏矩阵，并按列进行处理，再将处理后的系数转换过来，即可获得稀疏重构的信号。

从图 5 和图 6 可以看出，虽然 MP 算法能够恢复出二维图像信号，但恢复出的图像信号比较模糊，效果一般，而 OMP 算法能较好地恢复出二维图像信号，比 MP 算法恢复出的图像清晰了许多。从而说明 OMP 算法的性能优于 MP 算法。

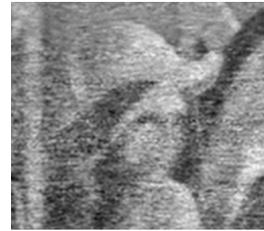


图 5 MP 算法恢复后的二维信号图像



图 6 OMP 算法恢复后的信号图像

### 4 结论

压缩感知是近年来信号处理领域的热门研究，匹配追踪算法以其实现简单，运行速度快得到广泛应用。因此，本文对以 MP 和 OMP 为代表的压缩感知算法进行了研究及仿真，对比了两种算法性能。从仿真的结果来看，OMP 算法比 MP 算法效果更佳，运算速度更快。此外，在 FPGA 平台上对 OMP 算法进行仿真验证，通过采用自顶向下的设计方法，该算法内核系统具有很好的移植性。

### 参考文献:

- [1] Donoho D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52 (4): 1289 - 1306.
- [2] Candès E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Transactions on Information Theory. 2006, 52 (2): 489 - 509.
- [3] Candès E. Compressive sampling [A]. In: Proceedings of International Congress of Mathematicians [C]. Zürich, Switzerland: European Mathematical Society Publishing House, 2006. 1433 - 1452.
- [4] Baraniuk R. Compressive sensing [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24 (4): 118 - 121.
- [5] A Bruck stein, D Donoho, M Elad. From sparse solutions of systems of equations to sparse modeling of signals and images [J]. SI-AM Review, 2009, 51 (1): 34 - 81.
- [6] J Tropp and S Wright. Computational methods for sparse solution of linear inverse problems [R]. Caltech ACM Technical Report, Jan. 2009.
- [7] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展 [J]. 电子学报, 2009, 37 (5): 1070 - 1081.
- [8] 金 坚, 谷源涛, 梅顺良. 压缩采样技术及其应用 [J]. 电子与信息学报, 2010, 32 (2): 470 - 475.
- [9] S Mallat and Zhang. Matching pursuit with time-frequency dictionaries [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41 (12): 3397 - 3415.
- [10] Tropp J, Gilbert A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. Transactions on Information Theory, 2007, 53 (12): 4655 - 4666.