

一种欠驱动两级柔性自平衡机器人的建模及其最优控制

杨斌, 辛晋渝, 王振玉

(成都理工大学 工程技术学院, 四川 乐山 614007)

摘要: 文章以一种欠驱动两级柔性自平衡机器人这一被控对象的控制问题作为出发点, 详细阐述了其数学建模方法, 讨论了其最优控制策略, 并针对设计过程中出现的 LQ 加权矩阵 Q 的选取难题给出了一种解析解和证明, 同时运用这一结论计算出了实际问题的加权矩阵 Q , 从而求得最优的状态反馈矩阵 K ; 仿真结果表明, 这样一种加权矩阵 Q 的求解方法是有效的, 并能够在较为复杂的实际问题中获得应用。

关键词: 欠驱动; 自平衡机器人; 拉格朗日方程; 加权矩阵; 最优控制

An Under-actuated Two-stage Flexible Self-balancing Robot's Modeling and its Optimal Control

Yang Bin, Xing Jinyu, Wang Zhenyu

(Engineering and Technical College, Chengdu University of Technology, Leshan 614007, China)

Abstract: The paper describes in detail its mathematical modeling method and optimal control tactics for solving an under-actuated two-stage flexible self-balancing robot's control problem, which gives an analytical solution and its proof for a selection of the weighting matrix Q appearing in the LQ design process and uses the conclusion to calculate the weighting matrix Q in the practical problem and to obtain optimal state feedback matrix K . The simulation results shows that such a solving method of weighting matrix Q is effective and the method can be widely applied in more complex practical problem.

Keywords: under-actuated; self-balancing robot; Lagrange equation; Weighting matrix; Optimal control

0 引言

欠驱动两级柔性自平衡机器人属于两轮直立式机器人, 它们又被称为两轮自平衡机器人, 是一种力图保持类似人的直立姿态的平衡控制系统。这种机器人更是一个集环境感知, 动态决策与规划, 行为控制与执行等于一体的综合控制系统。近十年来, 两轮自平衡机器人引起了国内外许多研究机构和机器人爱好者的极大关注。2002 年瑞士联邦工学院的工业电子实验室的研究者为模拟人类行走专门设计装配了一个基于 DSP 控制核心的两轮自平衡小车; 同年美国 Segway 公司发明了世界上第一部自平衡两轮电动滑车, 时速高达每小时 20 千米; 2004 年, 中国科学技术大学成功验证了国内第一款两轮自平衡电动代步车。两轮自平衡机器人的研究成果已相当广泛^[1]。本文在总结上述研究成果的基础上结合全国大学生飞思卡尔智能汽车竞赛项目, 展开对欠驱动两级柔性自平衡机器人的研究工作。

在飞思卡尔智能汽车竞赛项目中, 我们将车体视为刚性模型, 并进行了实际系统的控制。小车能够实现加速、减速、停车、后退以及回转等动作, 且控制效果良好。但我们发现, 类似的车体变为两个关节, 且在其腰椎部的联接处加装弹簧使其变为柔性关节, 则整个车体就变得很难控制了。两级柔性机器人是基于仿人的概念提出来的。本文从生理学的角度对两轮直立式自平衡仿人机器人进行分析研究, 有利于实现真正意义上的复杂拟人柔性机器人的平衡控制。

1 两级柔性自平衡机器人的数学建模

两级柔性自平衡机器人是由两个电动机分别驱动的 4 自由度欠驱动机器人。在这里控制输入是两台电动机, 少于系统自由度, 因此部分关节被动接受控制, 有时我们也称这样的关节是自由的。也正是由于欠驱动机器人驱动器的减少, 具有重量轻、成本低、能耗少等众多优点, 因此引起了学者们的广泛关注, 但同时也给控制器设计带来了诸多困难。

一般来说要定量、准确地分析设计一个控制系统, 提高对研究对象的认识水平和控制能力, 我们必须要建立控制对象的数学模型。由于两级柔性自平衡机器人运动状态的时变性, 使得通过牛顿力学分析受力情况变得更加复杂。而拉格朗日法是建立在能量的基础之上, 因此更适合本控制对象的建模过程。为了简化问题, 我们从机器人两车轮同轴的情况出发, 简化后的被控对象可以抽象地表示为如图 1 所示的结构模型^[2]。

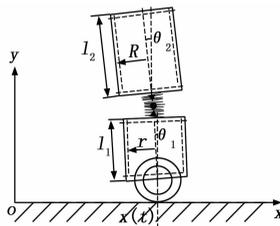


图 1 两级柔性自平衡机器人结构示意图

经过研究分析发现, 当选取平行于地面的车轮轴线作为零势面时, 车身存在重力势能, 因此该系统适用于保守系统的拉格朗日方程。保守系统的拉格朗日方程基本形式如下所示^[3]。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1)$$

其中: L 为拉格朗日函数, $L = T - V$; T 是系统总的动

收稿日期: 2014-04-25; 修回日期: 2014-05-28。

作者简介: 杨斌 (1976-) 男, 工学硕士, 讲师, 主要从事机电一体化技术, 先进控制理论及应用方向的研究。

能; V 为系统总的势能; 系统的广义坐标。

由于简化后的系统具有 3 个自由度, 因此广义坐标可以分别选取小车位移 x , 底部车体偏离平衡位置产生的偏角 θ_1 和腰椎以上车体偏离平衡位置产生的偏角 θ_2 这 3 个物理量。要利用拉格朗日方程, 我们必须首先获得系统总的动能。

$$T = T_w + T_b + T_j + T_h \quad (2)$$

其中: T_w 是两车轮的总动能; T_b 是下半车身总动能; T_j 是关节铰链的动能; T_h 是上半车身总动能。于是柔性两级自平衡机器人运动中产生的总动能可以描述为如下表达式:

$$T = 2\left[\frac{1}{2}M_w\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{M_w r_w^2}{2}\left(\frac{\dot{x}}{r_w}\right)^2\right] + \frac{m_1}{2}\left[\left(\frac{dX_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY_1}{dt}\right)^2\right] + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_3}{2}\left[\left(\frac{dX_3}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY_3}{dt}\right)^2\right] + \frac{m_2}{2}\left[\left(\frac{dX_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY_2}{dt}\right)^2\right] + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 \quad (3)$$

另一方面, 当选取平行于地面的车轮轴线作为零势面时, 运动系统总的势能可以描述为机器人底部车体的重力势能、关节铰链重力势能、铰链以上车体重力势能及弹簧弹性势能这四部分势能之和, 即:

$$V = m_1 g Y_1 + m_3 g Y_3 + m_2 g Y_2 + \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (4)$$

其中: $X_1 = x - \frac{1}{2}l_1 \sin\theta_1$; $Y_1 = \frac{1}{2}l_1 \cos\theta_1$;

$X_2 = x - l_1 \sin\theta_1 - \frac{1}{2}l_2 \sin\theta_2$;

$Y_2 = l_1 \cos\theta_1 + \frac{1}{2}l_2 \cos\theta_2$;

$X_3 = x - l_1 \sin\theta_1$; $Y_3 = l_1 \cos\theta_1$;

为减轻该型机器人的质量, 在机械本体的设计中将机器人的身体上下两个主体部分设计成空心圆柱体, 用于安装电动机、减速器、直流电源、电路板及控制部件。为方便研究, 我们暂时忽略这些元件的质量对机器人的转动惯量的影响。此时上下车体的转动惯量可以描述为空心圆柱体绕转动轴的转动惯量加上上下两端面薄圆盘的转动惯量之和。转动惯量的公式可以查询相关理论力学手册, 并通过转动惯量的平移定理可得。

$$J_1 = \frac{m_1}{12}[3(R^2 - r^2) + 4l_1^2] + \frac{m_1 R^2}{2} + m_1 l_1^2$$

$$J_2 = \frac{m_2}{12}[3(R^2 - r^2) + 4l_2^2] + \frac{m_2 R^2}{2} + m_2 l_2^2$$

以上表达式中各物理符号含义见表 1。

表 1 相关物理符号表

物理符号	物理含义	单位
M_w	车轮质量	0.255 kg
m_1	车体底部车身质量	0.574 kg
m_2	车体上身质量	0.977 kg
m_3	铰链质量	0.1 kg
m_4	车体上下端面圆盘质量	0.106 kg
r_w	车轮半径	0.035 m
R	车身外圆半径	0.05 m
r	车身内圆半径	0.045 m
l_1	底部车身长度	0.09 m
l_2	车体上身长度	0.19 m
k	弹簧劲度系数	10 N/m

将式 (3) 和 (4) 代入到 (1) 式中, 并选取小车加速度作为控制变量, 整理后可以得到如下形式的非线性方程组^[4]。

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = f_1(x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{x}) \\ \dot{\theta}_2 = f_2(x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{x}) \end{cases} \quad (5)$$

为求取状态空间表达式, 将 (5) 式在平衡位置附近泰勒级数展开, 并线性化, 可以得到:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = k_{11}x + k_{12}\theta_1 + k_{13}\theta_2 + k_{14}\dot{x} + k_{15}\dot{\theta}_1 + k_{16}\dot{\theta}_2 + k_{17}\ddot{x} \\ \ddot{\theta}_2 = k_{21}x + k_{22}\theta_1 + k_{23}\theta_2 + k_{24}\dot{x} + k_{25}\dot{\theta}_1 + k_{26}\dot{\theta}_2 + k_{27}\ddot{x} \end{cases} \quad (6)$$

经计算, 代入相应数据后可得:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -704.031\theta_1 + 800.313\theta_2 + 9.8246\ddot{x} \\ \ddot{\theta}_2 = 405.694\theta_1 - 368.793\theta_2 + 3.76545\ddot{x} \end{cases} \quad (7)$$

选取状态变量 $\mathbf{X} = [x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]$, 联立相关方程可得如下状态空间表达式 (8), 完成数学建模。

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -704.031 & 800.313 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 405.684 & -368.693 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 9.825 \\ 3.765 \end{pmatrix} u$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} \quad (8)$$

2 两级柔性自平衡机器人的最优控制问题

最优控制理论是 20 世纪 60 年代基于空间飞行器制导的研究背景发展起来的, 在航空航天领域被广泛应用。由于两级柔性自平衡机器人已获得了准确的数学模型, 因此 LQ 线性二次型最优控制更适合于本案。但是二次型性能泛函指标主要包括系统偏差及控制能量大小, 每一方面的得益总是以另一方面性能指标的牺牲为代价, 它往往体现在对加权矩阵 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 的选取上。在控制工程中, 对加权矩阵 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 的选取多是凭借经验和试凑的办法获得。由于在对控制系统设计过程中我们总是把希望的系统性能指标的闭环极点通过反馈控制律转变为系统真实的闭环极点, 因此是否能够通过一组指定的闭环极点来确定满足最优控制律的加权矩阵 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 呢? 这便是 LQ 的逆问题。关于这一问题至今尚无定论, 并成为研究的热点。本文给出了一单输入最优控制系统中 \mathbf{Q} 矩阵的一种解析表达式, 从而通过求解代数 Riccati 方程来确定最优状态反馈系数矩阵 \mathbf{K} 的方法。这一方法正好适用于两级柔性自平衡机器人最优控制器的设计^[5]。

2.1 相关定理及结论

为不失一般性, 考虑如下单输入 LQ 最优控制问题:

$$\begin{cases} J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)]dt \\ \text{s. t. } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (9)$$

其中的加权矩阵 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 使得闭环控制系统

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t), K = R^{-1}B^T P \quad (10)$$

的极点是期望的闭环极点 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ 。(9)、(10) 中的矩阵均为适当的维数，并且满足 LQ 最优控制问题中的一些必要条件。此外，矩阵 P 是代数 Riccati 方程

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (11)$$

的唯一对称正定解。

为保证 LQ 逆问题的存在，定义与 (10) 对应的开环系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (12)$$

最优闭环极点的集合 $C_0 = \{\lambda \in C \mid \lambda \in \lambda(A - BK), K = R^{-1}B^T P, A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, Q \geq 0, R > 0\}$ ，其中 $\lambda(*)$ 表示 * 的全部特征值集合。当期望的闭环极点 $\lambda_i \in C_0$ 时，则 LQ 逆问题的解是存在的^[6-7]。

此外，为方便表达，引入如下数学符号定义^[6-7]：

$$\alpha_i = p(\cdot) p(-\cdot), Q_c = (BAB \cdots A^{n-1}B),$$

$$\Psi_i = Q_c H \Lambda_i^+ (\Lambda_i^-)^T H Q_c^T = \Psi_i^+ (\Psi_i^-)^T,$$

$$\Lambda_i^\pm = [1 \pm \lambda_i \cdots \pm \lambda_i^{n-1}]^T,$$

其中 H 是第一行为 $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ 的上三角 Toeplitz 矩阵， $a_i, i=1, 2, \dots, n$ ，为系统 (12) 的开环特征多项式 $p(\lambda)$ 的系数。

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0, a_n = 1 \quad (13)$$

定理^[8]：考虑由 (9) ~ (11) 式所描述的 LQ 最优控制问题的逆问题。对于该问题，满足特征值 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ ，要求的加权矩阵 Q 在 $R=1$ 的条件下，可以参数化表示为：

$$Q = -(a_1 \xi_1 \ a_2 \xi_2 \ \dots \ a_n \xi_n) (\Psi_1 \xi_1 \ \Psi_2 \xi_2 \ \dots \ \Psi_n \xi_n)^{-1} \quad (14)$$

的充分必要条件为：

(1) 方程 (10) 的特征值为 $\lambda_i \in C_0, (i=1, 2, \dots, n)$ ，且 λ_i 的几何重根数等于它的代数重根数；

(2) 当 $\lambda_i \in \lambda(A)$ 或 $\lambda_i \in \lambda(-A)$ 时，矩阵 A 的特征值集合 $\{\lambda_{\alpha_i}\}_1^n$ ，中的某个 $\lambda_{\alpha_i} = \lambda_i$ 或 $\lambda_{\alpha_i} = -\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ 的几何重根个数为 1；

其中 $\xi_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的选取使得 $Q = Q^T \geq 0$ ，以及 $\Psi_i \xi_i, i=1, 2, \dots, n$ ，在复数空间上线性独立；且当 $\lambda_i = \lambda_i^*$ 时， $\xi_i = \xi_i^*, *$ 表示复数共轭。

上述定理文献 [8] 中已经给出证明，由此我们还可以推出如下结论：

对于给定的 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$ ，若方程

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \text{diag}[-1 \ 1 \ \dots \ (-1)^n] \cdot \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{2(n-1)} \\ 1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{2(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad (15)$$

使得 $q_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n$ ，则 q_i 是实数，且满足 λ_i 要求的矩阵 Q 和 $R=1, Q$ 可以表示为：

$$Q = [(Q_c H)^T]^{-1} \text{diag}[q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] (Q_c H)^{-1} \quad (16)$$

以下给出简单证明。

证明：当 λ_i 是实数时，定义 $\xi_i = [\xi_{i1} \ \xi_{i2} \ \dots \ \xi_{im}]^T$ ，

由 (14) 式可得：

$$Q \Psi_i^+ ((\Psi_i^-)^T \xi_i) = -\alpha_i \xi_i \quad (17)$$

进而有：

$$\begin{pmatrix} (\Psi_i^-)^T \\ 0 \quad I \end{pmatrix} \xi_i = [(\Psi_i^-)^T \xi_i \ \xi_{i2} \ \dots \ \xi_{im}]^T$$

所以有：

$$\xi_i = \begin{pmatrix} (\Psi_i^-)^T \\ 0 \quad I \end{pmatrix} \xi_i = [(\Psi_i^-)^T \xi_i \ \xi_{i2} \ \dots \ \xi_{im}]^T \quad (18)$$

将上述方程代入 (17) 式后得：

$$\begin{pmatrix} (\Psi_i^-)^T \\ 0 \quad I \end{pmatrix} Q \Psi_i^+ (\Psi_i^-)^T \xi_i = -\alpha_i [(\Psi_i^-)^T \xi_i \ \xi_{i2} \ \dots \ \xi_{im}]^T \quad (19)$$

解 (19) 式时可以得到两个方程：

$$(\Psi_i^-)^T Q \Psi_i^+ = -\alpha_i \quad (20)$$

$$(0 \quad I) Q \Psi_i^+ (\Psi_i^-)^T \xi_i = -\alpha_i [\xi_{i2} \ \xi_{i3} \ \dots \ \xi_{im}]^T \quad (21)$$

将方程 (16) 代入 (20) 得：

$$(\Lambda_i^-)^T \text{diag}[q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] (\Lambda_i^+) = -\alpha_i, i=1, 2, \dots, n \quad (22)$$

将 (22) 式进一步整理，可表示为：

$$[1 \ \lambda_i^2 \ \dots \ \lambda_i^{2(n-1)}][q_1 - q_2 \ \dots \ (-1)^{n-1} q_n] = -\alpha_i, i=1, 2, \dots, n \quad (23)$$

(23) 式移项后得：

$$[q_1 - q_2 \ \dots \ (-1)^{n-1} q_n] = -[1 \ \lambda_i^2 \ \dots \ \lambda_i^{2(n-1)}]^{-1} \alpha_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (24)$$

显然方程 (24) 与方程 (15) 同解，且 q_i 是实数。因此，当 $q_i \geq 0$ ，方程 (16) 就是所求的权矩阵。

另一方面，同理当 λ_i 是复数时，可以设：

$\lambda_i = \lambda_{i+1}^* = \bar{\lambda}_i + j\bar{\lambda}_{i+1}$ ，定义 \bar{I} 和 Λ ：

$$\bar{I} = \text{diag}[-1 \ 1 \ \dots \ (-1)^n],$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{2(n-1)} \\ 1 & \lambda_2^{*2} & \dots & \lambda_2^{*2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{2(n-1)} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

及变换矩阵 T 。

$$T = \text{Block-diag}\{1, 1, \dots, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{pmatrix}, 1, \dots, 1\}$$

对 (14) 式右边进行矩阵变换后有：

$$\bar{I} \Lambda^{-1} [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T = \bar{I} (T \Lambda)^{-1} T [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n]^T$$

故当上式成立时，同样有 $Q \in R^{n \times n}$ ，方程 (16) 仍是所求的加权矩阵。

证毕

2.2 两级柔性自平衡机器人 LQ 问题的求解

运用以上结论我们可以求取柔性两级自平衡机器人系统 (8) 的在 $R=1$ 时，指定期望的闭环极点为： $\lambda_1 = \lambda_2^* = -1.333 + j1.334, \lambda_3 = -25, \lambda_4 = -26, \lambda_5 = -27, \lambda_6 = -28$ ，加权矩阵 Q 的解析解。具体求解过程如下：

(1) 求取系统 (8) 的开环多项式：

$$p(\lambda) = \lambda^6 + 1072.724\lambda^4 - 65 \ 110.881\lambda^2$$

(2) 求取所有的 $\alpha_i = p(\lambda_i) p(-\lambda_i)$ ；

$$\alpha_1 = \alpha_2^* = -5.346 \ 4e + 010 - j6.253 \ 0e + 009,$$

$$\alpha_3 = 3.874 \ 8e + 017, \alpha_4 = 5.701 \ 9e + 017,$$

$$\alpha_5 = 8.281 \ 8e + 017, \alpha_6 = 1.188 \ 5e + 018$$

第三步：求取 $[1 \ \lambda_i^2 \ \dots \ \lambda_i^{10}]$ ，并代入方程 (14)；

第四步: 求取向量 $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]$;

通过计算机解得:

$$q = 1.0e + 012 \begin{bmatrix} 3.053983703898170 \\ 0.013458054977717 \\ 0.237248917994495 \\ 0.001243104966420 \\ 0.000001941899657 \\ 0.000000004959431 \end{bmatrix}$$

第五步: 求解出能控性矩阵 Q_c , 并连同矩阵 H 和向量 q 代入方程 (15), 求解得出加权矩阵 Q .

$$Q = \begin{bmatrix} 720 & -47 & -70 & 0 & 0 & 0 \\ -47 & 54\ 950 & -58\ 281 & 0 & 0 & 0 \\ -70 & -58\ 281 & 67\ 015 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 146 & -163 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -163 & 209 \end{bmatrix}$$

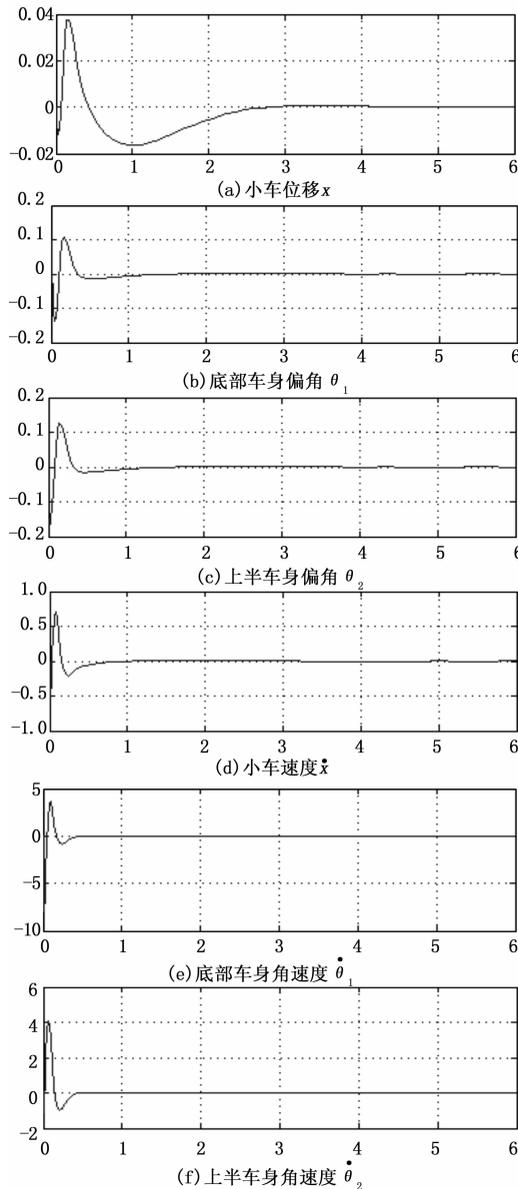


图 2 两级柔性自平衡机器人控制仿真结果

通过计算可以判断 $Q \geq 0$, 代入 Riccati 方程中可以验证结果的正确性, 并可以求解出最优状态反馈矩阵 K .

$$K = [-26.84 \ 494.71 \ -374.35 \ -24.16 \ 11.45 \ 5.40]$$

通过 matlab 仿真^[9-10], 当底部车身产生 0.1rad, 上半车身产生 -0.15rad 偏角时, 各状态变量仿真结果如图 2 所示:

2.3 仿真及试验结果分析

由仿真结果可以看出 LQ 最优反馈控制律作用于被控对象时, 底部车身和上半车身产生的初始偏角在 1.5 s 内就能够得到纠正; 小车位移在 3 s 以内也能够回到平衡状态; 其它对应的小车速度、偏角速度均能够在较短的时间内获得收敛。系统具有良好的动态性能指标, 满足控制要求。在实际试验测试中, 系统控制器参数均在设计参数左右较小的范围取值, 就可以获得良好的控制效果。

3 小结

本文从两级自平衡机器人控制问题的实际出发, 针对设计过程中出现的 LQ 问题进行了深入的探讨, 并给出了合理的解决方案, 获得了被控系统的 LQ 逆问题加权矩阵 Q 的解析解, 从而求得指定闭环极点的最优状态反馈矩阵 K 。仿真结果表明控制器设计是有效的。应该指出的是, 在运用上述的结论求解 Q 矩阵的过程中需要注意两点: 一是在高阶系统的计算过程中必须保证足够的计算精度, 否则不能正确求解出 Q 矩阵; 二是并不是所有稳定的闭环极点都具有最优的状态反馈矩阵, 它的选取将直接影响到向量 q_i 是否大于等于 0, 这是因为所求的加权矩阵 Q 必须是半正定矩阵。

参考文献:

[1] HA YS, YUTA S. Trajectory tracking control for navigation of the inverse pendulum type self-contained mobile robot [J]. Robotics and Autonomous Systems, 1996, 17 (1-2): 65-80.

[2] 张三川, 彭楠, 李霞. 两轮自平衡电动车的结构设计与有限元分析 [J]. 郑州大学学报 (工学版), 2011, 32 (1): 30-33.

[3] 吴克河, 李为, 柳长安, 等. 双轮驱动式移动机器人动力学控制 [J]. 宇航学报, 2006, 27 (2): 272-275.

[4] 阮晓钢, 赵建伟. 基于 Hopfield 网络的柔性两轮自平衡机器人控制 [J]. 机器人, 2010, 32 (3): 405-413.

[5] 冀晓萌, 董朝铁, 李健, 等. 基于 H_2 最优控制的小型无人机飞行姿态控制器设计 [J]. 计算机测量与控制, 2013, 21 (10): 2704-2706.

[6] Lee, T. T. and Liwa, G. T., The Inverse Problem of Linear Optimal Control for Constant Disturbance [J]. Int. J. Control, 1986, 43 (2): 233-246.

[7] 王耀青. LQ 最优控制系统加权矩阵 Q 的一种数值算法 [J]. 控制与决策, 2000, 15 (5): 513-517.

[8] 王耀青. LQ 逆问题的一种有效算法. 控制理论与应用, 1992, 9 (1): 10-14.

[9] 吴受章. 最优控制理论与应用 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2008.

[10] 武俊峰, 张继段. 两轮自平衡机器人的 LQR 改进控制 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2012, 17 (6): 1-5.