

基于模型降阶的最优分数阶 PID 控制器设计

林青松, 肖培智, 宋晓娜

(河南科技大学 信息工程学院, 河南 洛阳 471000)

摘要: 由于一些受控对象较为复杂或者模型系统阶次较高, 使得控制器的设计变得非常困难, 这会造成控制系统的鲁棒性和动态特性下降; 文章在 H_2 范数模型降阶的基础上提出一种新的降阶模型结构, 它可以使降阶后的模型扩展到分数阶并且更加精确地逼近各种高阶系统, 并以降阶后模型的幅频、相频和对对象增益变化的鲁棒特性为约束条件进行最优分数阶 PID 控制器的设计; 仿真实验证明, 与原有闭环控制系统相比, 基于模型降阶的最优分数阶 PID 控制器控制下的闭环系统具有更好的动态性能, 并且鲁棒性较强。

关键词: 模型降阶; H_2 范数; 频域; 最优分数阶 PID

Design of Optimized Fractional Order PID Controller Based on Model Reduction

Lin Qingsong, Xiao Peizhi, Song Xiaona

(Information Engineering College, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471000, China)

Abstract: The design of controllers are difficult because of the complex and high order control systems, which reduce the dynamic performance and robustness. First, this paper briefly introduces the common methods of H_2 norm model reduction, then a new model reduction based on that is proposed, which extends to the fractional order after the mode reduction and models a large variety of higher order systems with greater accuracy. And the optimal fractional PID controller is designed with the constraint conditions of the reduced order model of the phase margin and gain crossover frequency and robustness to gain variation. The simulation experiments prove that compared with the original closed-loop control system, the controlled by optimized fractional order PID can get better dynamic performance and have strong robust.

Keywords: model reduction; H_2 norm; frequency domain; optimized fractional order PID controller

0 引言

自 20 世纪 60 年代分数阶微积分应用于控制领域以来, 分数阶的研究经历了一段相当长的发展岁月, 并且出现了一些令人瞩目的成果。文献 [1] 提出了 PPD^{α} 控制器, 该控制器的出现是一个里程碑, 标志着分数阶控制对于古典控制的普遍化。与整数阶 PID 控制器相比, 分数阶 PID 控制器增加了两个可调参数, 即主要影响系统稳态精度的积分阶数 λ 和主要影响系统超调的微分阶数 μ 。正是由于多了这两个可调的参数, 使分数阶 PID 控制器的设计更加灵活, 其控制性能也更加的优越^[2]。

虽然分数阶 PID 控制器的 5 个参数的非线性关系使参数调节的难度增大, 但是它能够更加灵活、更加精确地控制受控对象, 尤其是一些复杂的、无精确数学模型的受控系统。所以分数阶 PID 参数的整定优化具有广泛的应用前景^[3]。对于分数阶 PID 控制器参数的整定, 出现了一些不同的新方法: 幅值相位裕量法^[4]、基于 RasID 随机搜索法^[5]、极点阶数搜索法^[6]以及一些基于遗传算法^[7]、粒子群算法^[8]和神经网络算法^[9]等优化算法。

本文在 H_2 范数模型降阶方法的基础上提出了两个新的降阶模型结构即以低阶分数阶模型去逼近原有高阶模型, 其不仅适用于分数阶系统而且还适用于整数阶系统。然后基于降阶后模型的幅值裕量和相位裕量设计分数阶 PID 控制器, 使控制器设计的对象由单一的整数阶拓展到分数阶; 同时避免了因受控对象阶次过高, 使得系统的控制器设计变得非常困难, 从而

造成系统控制精度变差且动态性能降低等不利因素。

1 分数阶微积分及控制器

分数阶微积分的积分和微分可以是实数甚至复数, 它是整数阶微积分的推广。分数阶微积分的基本操作算子为 ${}_a D_t^{\alpha}$, 其中 α 和 t 是操作算子的上下限, α 为微积分阶次, 是一个复数, 本文假定它为一实数。

$${}_a D_t^{\alpha} = \begin{cases} \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} & R(\alpha) > 0 \\ 1 & R(\alpha) = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-(\alpha)} & R(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (1)$$

最常用的分数阶微积分定义是 Riemann-Liouville (RL) 定义和 Grunwald (GL) 定义。RL 定义为

$${}_a D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-(m-\alpha)}} d\tau \quad (2)$$

式中, $(m-1 < \alpha < m)$, $\Gamma(\cdot)$ 是著名的 Euler-Gamma 函数。GL 定义为

$${}_a D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\alpha) h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{(t-a)/h} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(t-kh) \quad (3)$$

根据该定义可以推导出分数阶微分计算的算法为

$${}_a D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{[(t-a)/h]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \approx \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{[(t-a)/h]} \omega_j^{\alpha} f(t-jh) \quad (4)$$

其中: $\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ 为函数 $(1-z)^{\alpha}$ 的多项式系数,

该系数还可以更简单地由下面公式直接求出

$$\omega_j^{(\alpha)} = 1, \omega_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{j}\right) \omega_{j-1}^{(\alpha)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (5)$$

收稿日期: 2013-11-21; 修回日期: 2014-03-19。

基金项目: 国家自然科学基金项目(61203047)。

作者简介: 林青松(1965-), 男, 河南洛阳人, 副教授, 主要从事检测技术与自动化装置和计算机应用技术等方向的研究。

对 GL 定义的分数量微分 Laplace 变换有

$$L\{{}_0^c D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha X(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{\alpha-k-1} x(t) |_{t=0} \quad (6)$$

特别的, 若函数 $f(t)$ 及其各阶导数的初始值都为 0, 则

$$L\{{}_0^c D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha L\{f(t)\} \quad (7)$$

分数阶 PID 控制器包括一个积分阶次 λ 和微分阶次 μ , 其中 λ 和 μ 可以是任意实数, 其传递函数为

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad (\lambda, \mu > 0) \quad (8)$$

这里积分项是 s^λ , 即在相频的对数图中, 它的斜率是 $-20 \lambda \text{dB/dec}$, 而不是 -20dB/dec 。

在时域, 控制信号 $u(t)$ 可以表示为

$$u(t) = K_p e(t) + K_i D^{-\lambda} e(t) + K_d D^\mu e(t) \quad (9)$$

方程 (8) 和 (9) 可以看出, 分数阶 PID 是整数阶 PID 的延伸和推广。根据被控对象的阶次不同, 可以选择不同的 λ 和 μ , 以得到最佳的控制效果。如图 1 所示, 当 λ 和 μ 分别取 0 和 1 时, 控制器依次为 P-PI-PD-PID, 而分数阶 PID 可以在 OABC 的内外任意取值。所以分数阶 PID 控制器较整数阶 PID 控制器更具有灵活性, 这就使得分数阶 PID 控制器的结构更灵活、更适合控制系统的动态特性。

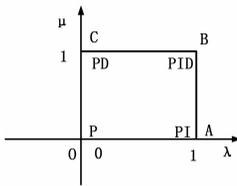


图 1 控制器阶次取值图

2 模型降阶和分数阶 PID 控制器设计

文献 [10] 中提到用改进 Oustaloup 滤波器近似分数阶微分算子, 将会导致非常高阶的整数阶模型, 这样使得系统的控制器设计变得非常困难。所以对分数阶系统进行模型降阶是很有必要的。文献 [11-12] 基于 H_2 范数对高阶模型进行降阶, 取得了较好的效果, 但是仍存在着一定的误差, 且适用范围比较小。纵观现有的模型降阶技术, 基本上都是采用低整数阶模型, 而不是分数阶模型去逼近原有模型, 这样不仅会造成一定的模型误差, 而且还会失去原有高阶系统所具有的一些特性和优势。

在模型降阶过程中, 大部分传统的高阶控制系统都可以用以下两个模型结构进行逼近:

1) 一阶延时系统 (FOPTD):

$$P^1(s) = \frac{K}{T_s s + 1} e^{-Ls} \quad (10)$$

2) 二阶延时系统 (SOPTD):

$$P^2(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} e^{-Ls} \quad (11)$$

为了得到最优的降阶效果, 可能有各种各样的定义和指标, 但是最为直观的是按图 2 中给出的形式来定义降阶误差信号 $e(t)$, 如将误差信号的 H_2 范数定义为目标函数, 对其最小化, 得出最优降阶模型。

假设原有高阶系统模型的传递函数为 $P(s)$, 降阶后的模型传递函数为 $P'(s)$, 引入一个目标函数即最小化误差信号 $e(t)$ 的 H_2 范数

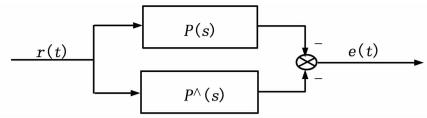


图 2 模型降阶误差信号

$$J_f = \min_{\theta} \|P(s) - P'(s)\|_2 \quad (12)$$

其中: θ 为需要优化的模型参数, 即 $\theta = (K, T, L)$ 或 (K, ζ, ω_n, L) 。原有系统模型 $P(s)$ 的 H_2 范数为

$$\|P(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}[P(j\omega) \overline{P(j\omega)}^T] d\omega} \quad (13)$$

但是研究表明, 用 FOPTD 和 SOPTD 模型结构逼近一些高阶的线性系统会产生较大的模型误差, 并且鲁棒性较差, 这样不利于整个系统的动态性能研究和精确控制。因此, 为了更加准确地逼近原有模型, 现提出两个新的非整数阶优化参数模型结构如下:

3) 一阶非整数阶延时系统 (NIOPTD-1):

$$P^3(s) = \frac{K}{T_s s^\alpha + 1} e^{-Ls} \quad (14)$$

4) 二阶非整数阶延时系统 (NIOPTD-2):

$$P^4(s) = \frac{K}{s^\alpha + 2\zeta\omega_n s^\beta + \omega_n^2} e^{-Ls} \quad (15)$$

其中: α 和 β 为任意实数, 这样可以使降阶模型结构更加灵活。由此可知, 模型结构 FOPTD 和 SOPTD 是模型结构 NIOPTD-1 和 NIOPTD-2 概念的延伸和拓展。

对以上 4 个模型结构分别进行分数阶 PID 控制器的设计。假设 $P(s)$ 为模型传递函数, $C(s)$ 为模型的控制器的, 那么其开环系统表达式为 $G(s) = P(s)C(s)$, 且 $G(s)$ 需满足以下性能指标:

1) 相频特性

$$\text{Arg}[G(j\omega_g)] = \text{Arg}[C(j\omega_g)P(j\omega_g)] = -\pi + \varphi_m \quad (16)$$

2) 穿越频率特性

$$|G(j\omega_g)| = |C(j\omega_g)P(j\omega_g)| = 1 \quad (17)$$

3) 对象增益变化的鲁棒特性

$$\left\{ \frac{d}{d\omega} (\text{Arg}[G(j\omega)]) \right\}_{\omega=\omega_g} = 0 \quad (18)$$

这里, 式 (16) 中的开环系统穿越频率 ω_g 和相位裕量 Φ_m 主要影响其闭环系统的超调量; 式 (17) 中的穿越频率 ω_g 主要影响系统的上升时间和响应速度; 式 (18) 的引入可以使受控对象增益的变化几乎不影响闭环系统的超调, 这将有利于增强控制器的鲁棒性。在满足以上性能指标的要求下, 根据受控对象的频域特性和控制器模型结构, 建立一个寻优性能指标 J , 即

$$J = [\text{Arg}(G(j\omega_g)) + \pi - \varphi_m] + [|G(j\omega_g)| - 1] + \left\{ \frac{d}{d\omega} (\text{Arg}[G(j\omega)]) \right\}_{\omega=\omega_g} + [\text{Arg}(P(j\omega_g)) + \text{Arg}(C(j\omega_g)) + \pi - \varphi_m] + [|P(j\omega_g)| \cdot |C(j\omega_g)| - 1] + \left\{ \frac{d}{d\omega} (\text{Arg}[P(j\omega)]) \right\}_{\omega=\omega_g} + \left\{ \frac{d}{d\omega} (\text{Arg}[C(j\omega)]) \right\}_{\omega=\omega_g} \quad (19)$$

对于给定的模型系统, 其穿越频率 ω_g 和相位裕量 Φ_m 是已知的, 这样在性能指标 J 中, 未知量是 $k_p, k_i, k_d, \lambda, \mu$, 即分数阶 PID 的具体参数。利用 Matlab 优化工具箱中的 fmincon

函数可求解到含有多个变量的非线性约束函数的最小值。虽然以上频域性能指标可能不会同时达到最小，但是对性能指标 J 的寻优很大程度上降低了因控制器参数变化而造成的控制系统的复杂多变性。

3 仿真实例

例 1: 文献 [10] 给出了一个温控炉的例子, 其整数阶模型为

$$G_I(s) = \frac{1}{73043s^2 + 4893s + 1.93} \quad (20)$$

其整数阶 PID 控制器为

$$G_{Ic} = 310.96 + \frac{5.04}{s} + 1113.24s \quad (21)$$

采用改进型 H_2 范数模型降阶方法对模型 (20) 进行降阶, 降阶后的模型为

$$G_F(s) = \frac{1.5893e^{-0.1028s}}{1426s^{1.4502} + 5887s^{0.9764} + 1.5893} \quad (22)$$

温控炉模型降阶前后的阶跃响应如图 3 所示, 其逼近效果较为精确并且降阶后的模型在动态性能方面比原有模型有所提高。对降阶后的模型进行基于频域最优分数阶 PID 控制器的设计, 得到

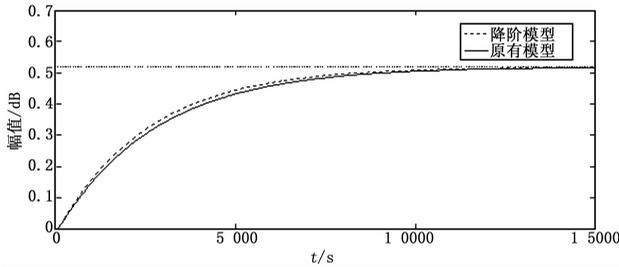


图 3 模型降阶前后阶跃响应曲线对比

$$G_{Fc}(s) = \frac{976.8912s^{0.7346} - 642.1293s^{1.2018} - 0.9178}{s^{0.7346}} \quad (23)$$

分别构建的闭环控制系统: 整数阶 PID 控制器控制整数阶系统、分数阶 PID 控制器控制整数阶系统和分数阶 PID 控制器控制分数阶系统。根据温控炉的特点可知其主要动态性能指标为上升时间、调节时间和超调量。由图 4 所示, 分数阶 PID 控制器控制的分数阶系统在调节时间和超调量方面明显优于其他两个模型闭环系统。另外, 将降阶后分数阶系统设计的控制器直接应用到原有整数阶系统模型上, 其控制效果明显比其他两个闭环控制系统差, 这说明虽然降阶后的模型精确度较高, 但是并不能完全等价于原有模型系统, 具体的系统仍需要单独进行控制器的设计, 这样才能达到更好的控制效果。

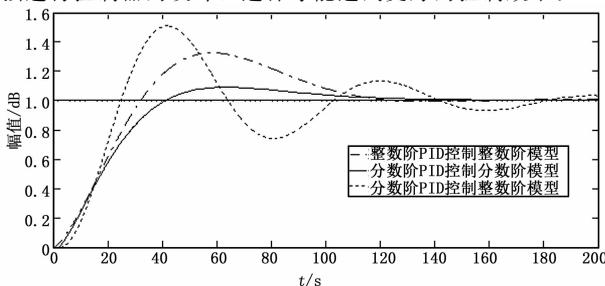


图 4 闭环系统的阶跃响应对比

图 5 中比较了分数阶 PID 控制器控制分数阶系统和整数阶 PID 控制器控制整数阶系统的 Bode 图。从图中可以看出, 分数阶 PID 控制器控制的分数阶系统的控制效果有了明显提高, 并且又有较大的带宽。

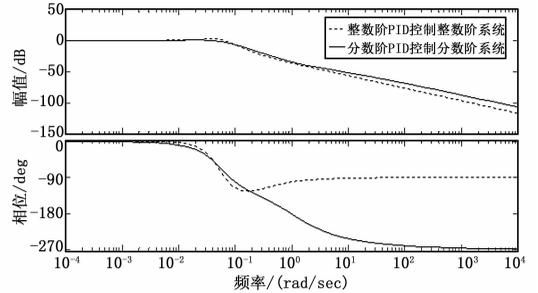


图 5 闭环系统的 Bode 图对比

综上, 对整数阶模型采用改进型 H_2 范数模型降阶方法进行降阶处理得到分数阶系统模型, 然后对分数阶系统模型设计基于频域最优分数阶 PID 控制器, 由此得到的分数阶闭环系统在动态性能方面比原有整数阶系统有了明显的提高。

例 2: 对于一个高阶的分数阶受控对象

$$G(s) = \frac{1}{s^{2.6} + 2.2s^{1.5} + 2.9s^{1.3} + 3.32s^{0.9} + 1} \quad (24)$$

采用文献 [13] 基于 ITAE 准则的最优分数阶 PID 控制器设计方法得到的分数阶 PID 控制器为

$$G_c(s) = \frac{7.4049s^{1.7287} + 14.9941s^{1.018} + 2.4687}{s^{1.018}} \quad (25)$$

采用改进型 H_2 范数模型降阶方法对原有高阶分数阶模型进行降阶处理, 得到的降阶模型为

$$G_R(s) = \frac{5.4896e^{-0.2784}}{s^{2.3672} + 8.6741s^{1.023} + 5.4701} \quad (26)$$

对模型 (24) 和模型 (26) 进行阶跃响应仿真, 如图 6 所示, 降阶后模型的阶跃响应曲线和原有模型的阶跃响应曲线几乎完全拟合。

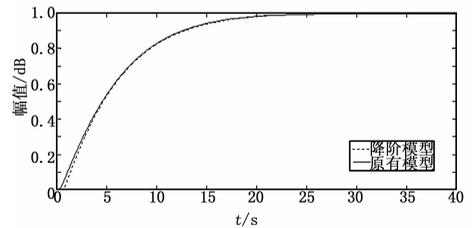


图 6 原有模型和降阶模型阶跃响应拟合曲线

采用基于频域最优化分数阶 PID 算法对降阶后模型系统分别进行分数阶 PID 控制器的设计得到

$$G_{Rc}(s) = \frac{5.4287s^{1.8789} + 7.8633s^{0.5366} + 2.4215}{s^{0.5366}} \quad (27)$$

分别构建原有模型和降阶后模型的闭环控制系统。其阶跃响应如图 7 所示, 降阶模型闭环系统的阶跃响应动态性能指标比原有分数阶闭环系统有了明显的提高。这说明, 采用基于频域最优化 PID 控制器算法对高阶分数阶系统的降阶模型进行控制器的设计, 避免了因原有高阶分数阶系统阶次过高而造成系统控制器设计的精度误差, 提高了原有系统的动态性能。

表 1 两类预测方法对检验样本的拟合结果

寿命 /h	真实值	定权组合预测模型		本文预测模型	
		拟合值	相对误差/(%)	拟合值	相对误差/(%)
5 719	-0.340 1	-0.399 4	17.44	-0.371 8	9.32
5 922	-0.414 0	-0.406 2	1.88	-0.403 6	2.51
6 114	-0.448 9	-0.413 0	8.00	-0.441 3	1.69
6 308	-0.547 9	-0.420 1	23.33	-0.478 4	12.68

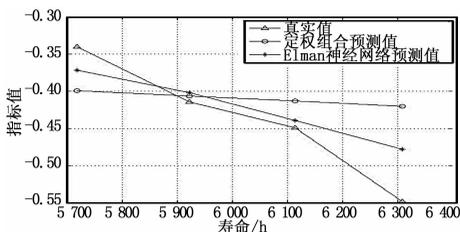


图 7 两类组合预测方法对检验样本的拟合结果对比图

由表 1 可以看出,与定权组合预测方法相比,Elman 神经网络组合预测模型的预测精度更高,前 3 个预测值的相对误差都在 10%以内,第 4 个预测值的相对误差达到了 12.68%,之后的预测值出现明显的下降趋势,预测精度进一步降低,因此认为该模型的能够以可接受的精度预测未来 600 h 以内的状态,为状态维修计划的制定和实施提供充分的反应时间。

4 结论

本文利用 Elman 神经网络建立了装备状态的组合预测模型,实现了对单一预测模型的动态组合预测,一定程度上解决了单一预测模型适用范围不广、预测精度不高的问题。针对神

神经网络结构参数设计困难的问题,提出了运用遗传算法,以网络泛化能力为决策目标的参数优化方法,有效地提高了模型的预测精度和预测步长。在模型应用的过程中,随着状态监测的不断进行,对训练样本和验证样本进行更新并通过训练得到新的 Elman 神经网络,能够保持模型对新数据的敏感性,提高预测结果的可信性。

参考文献:

[1] 李爱民,张耀辉,张仕新. 装甲车辆工况监测参数的选择 [J]. 装甲兵工程学院学报, 2006, 20 (4): 32-35.
 [2] 任淑红,左洪福. 基于性能衰退的航空发动机剩余寿命组合预测方法 [J]. 机械科学与技术, 2011, 30 (1): 23-29.
 [3] 王培光,李扬,宗晓萍. 一种基于支持向量机与灰色的组合预测新方法 [J]. 河北省科学院学报, 2008, 25 (4): 5-7.
 [4] 蒋丽英,王蕾,席剑辉. 航空发动机磨损趋势变权重组合预测技术研究 [J]. 计算机工程与应用, 2011, 47 (28): 228-231.
 [5] 余健明,燕飞,杨文字,等. 中长期电力负荷的变权灰色组合预测模型 [J]. 电网技术, 2005, 29 (17): 26-29.
 [6] 贾文铜,周瑞祥,张忠,等. 基于 Elman 神经网络的齿轮故障诊断研究 [J]. 计算机测量与控制, 2012, 12 (5): 1173-1176.
 [7] 魏海坤. 神经网络结构设计的理论与方法 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2005: 143-149.
 [8] 陈果. 神经网络模型的预测精度影响因素分析及其优化 [J]. 模式识别和人工智能, 2005, 18 (5): 528-533.
 [9] 刘泽双,闫付强. 基于遗传算法的就业需求量组合预测模型 [J]. 系统工程, 2009, 27 (8): 62-68.
 [10] 戎翔. 民航发动机健康管理中的寿命预测与维修决策方法研究 [D]. 南京航空航天大学, 2008: 73-75.

(上接第 2484 页)

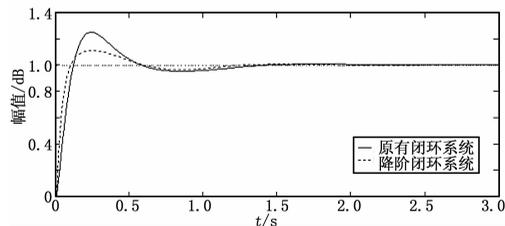


图 7 原有模型系统和降阶模型系统阶跃响应

4 结论

本文利用分数阶系统不仅具有类似于整数阶系统的良好鲁棒性,而且具有更好的动态性能等特点,对 H_2 范数模型降阶方法进行改进,并对降阶后的模型行动进行基于频域的最优分数阶 PID 控制器设计。通过仿真研究证明,改进型 H_2 范数模型降阶方法的逼近效果较好,且与原有模型闭环控制系统相比,基于频域最优分数阶 PID 控制器构建的闭环系统响应速度快、调节时间短、超调量小,具备更好的动态性能和更强的鲁棒性。

参考文献:

[1] Podlubny I. Fractional-order systems and controllers [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44 (1): 208-214.
 [2] 严慧,刘坤,汪木兰. 分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器控制性能的研究 [J]. 计算机仿真, 2009, 26 (11): 335-338.

[3] 胡海波. 分数阶 PID 控制器参数的整定和研究 [D]. 淮南: 安徽理工大学, 2010.
 [4] Monje C A, Calderon A J, Vinagre B M. On fractional PI^{λ} controllers: some tuning rules for robustness to plant uncertainties [J]. Nonlinear Dynamics, 2004, 38: 369-381.
 [5] 李大字,刘展,靳其兵,等. 分数阶控制器参数整定策略研究 [J]. 系统仿真学报, 2007, 19 (19): 4402-4406.
 [6] 严慧. 分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器的设计及数字实现 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2007.
 [7] 刘晋胜,彭志平,周靖. 一种多策略并行遗传算法研究 [J]. 计算机测量与控制, 2011, 18 (5): 1188-1190.
 [8] Zamani M, Ghartemani M K, Sadati N, et al. Design of a fractional order PID controller for an AVR using particle swarm optimization [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 17: 1380-1387.
 [9] Chen Y Q, Vinager B M, podlubny I. Continued fraction expansion approaches to discretizing fractional order derivatives an expository review [J]. Nonlinear Dynamics, 2004, 38 (1-4): 155-170.
 [10] 薛定宇. 控制数学问题的 Matlab 求解 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2007.
 [11] 王静,张庆灵,刘万泉. 离散广义系统的 H_2 模型降阶 [J]. 东北大学学报, 2002, 23 (12): 1139-1142.
 [12] 王静,张庆灵,刘万泉. 广义系统的 H_2 及 H_{∞} 次优模型降阶 [J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25 (3): 335-338.
 [13] 彭军. 最优分数阶 PID 控制器的设计与研究 [D]. 沈阳: 东北大学, 2009.